Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

Szakdolgozat

Sudoku

készítette:

Varga Valéria

témavezető: Tengely Szabolcs

Debrecen, 2007

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Köszönetem szeretném kifejezni Dr. Tengely Szabolcsnak, hogy lehetőséget nyújtott diplomamunkám elkészítéséhez, és hogy szakmai tanácsaival mind elméleti, mind gyakorlati téren segítette előrehaladásomat.

Valamint köszönetet mondok családomnak, akik a kezdetektől biztosították a családi és anyagi hátteret tanulmányaim sikeres befejezéséhez.

1. Bevezető

A név ”Sudoku” a Japán rövidítése egy hosszabb frázisnak ”Suuji wa dokushin single”, ami azt jelenti, hogy ”a számjegyeknek egyedülállóaknak kell lenni”. Ez egy levédett rejtvény, kiadója Nikoli Co. Ltd Japánban[1].

A Sudoku feladványok rendkívül népszerűvé váltak Nagy – Britanniában 2004 után. Az ötlet nagyon egyszerű; egy 9×9-es rács, felbontva $9\ 3 \times 3$-as blokkra.

Néhány rekeszben előre megadva elhelyeznek számokat $1 - 9$-ig[2]. A megfejtő célja, hogy kiegészítse a rácsot, minden rekeszt feltöltsön számjegyekkel oly módon, hogy minden sor, minden oszlop és minden 3×3-as rekesz tartalmazzon minden számot $1 - 9$-ig pontosan egyszer.

A kényelem kedvéért használnak számokat a Sudoku-ban; a számok közötti aritmetikai összefüggések lényegtelenek. Különböző más szimbólumok is használhatóak (betűk, minták, vagy színek) a szabályok megváltoztatása nélkül. Amióta először megjelent újságcikkben a Dell Magazinban 1979 - ben, azóta számokat használnak minden ilyen cikkben. Ezen fejtörő varázsa abban rejlik, hogy a szabályok egyszerűek, de a megoldás eléréséhez a gondolatmenet bonyolult lehet.

1.1. Története

A rejtvényt Howard Grans tervezte, aki egy 74 éves nyugdíjas építész és szabadúszó rejtvény tervező, először 1979-ben publikálta. Bár valószínűleg inspirálta Leonhard Euler Latin kocka találmánya, Garns hozzátett egy harmadik kiterjedést (a területi megszorítás) a matematikai felépítéshez, és bemutatta az alkotását, úgy mint egy feladványt; egy részlegesen kitöltött rács, és a megfejtőnek a maradék hely kitöltése a feladata. A rejtvény először New York-ban jelent meg, a speciális feladványokat megjelentető Dell Magazine - ban, annak a *Dell Pencil Puuzzles and Word Games* rovatában, a *Number Place* cím alatt (melyet feltevések szerint Garns adott).

A rejtvényt bemutatták Japánban Nikoli-ban, *Monthly Nikolist* újságban 1984 áprilisában, úgy mint *Suuji wa dokushin ni kagiru*, melyet fordíthatunk úgy, hogy ”a számoknak egyedülállónak kell lenni”, vagy ”a számok csak egyszer bukkanhatnak fel”, (szó szerinti fordításban ”egyedülálló”, ”nőtlen”). A fejtörőt Maki Kaji nevezte el, aki Nikoli elnöke. Később a nevet Sudoku-ra rövidítették. 1986-ban Nikoli bemutatott két újítást, hogy biztosítsa a fejtörő népszerűségét: a megadott számok mennyiségét korlátozták, 32-nél nem lehetett több, és a rejtvény szimmetrikussá vált. Ez most a kiadók irányvonala a Japán területeken, úgy mint *Asahi Shimbum*. Nikoli még fenntartja a védjegyet a *Sudoku* névre, más kiadók alternatív neveket használnak Japánban.

1989, Loadstar/Softdisk Publishing megjelentette a *DigitHunt*-ot Commodore 64-re, mely kétségkívül a Sudoku első személyi számítógépes verziója volt.

Yoshimitsu Kanai kiadta a saját számítógépes fejtörő generátorát *Single Number* néven az Apple Macintosh számára 1995-ben Japánban és Angliában, a Palm részére 1996-ban, és a Mac OS – X-nek 2005-ben.

A folyamat teljes kört tett, Dell Magazines, mely megjelentette az eredeti *Number Place* fejtörőt, most is kiad két *Sudoku* magazint: *Original Sudoku* és *Extreme Sudoku*. Továbbá, Kappa újranyomtatta Nikoli *Sudoku*-t a *GAMES Magazine*-ban *Sqared Away* néven; a *New York Post, USA Today, The Boston Globe, Washington Post, The Examiner,* és *San Francisco Chronicle* most is megjelenteti a fejtörőt. A fejtörő gyűjtemények is gyakran tartalmazzák, mint amilyen a *The Giant* 1001 *Puzzle Book* (*Kilenc Szám* címen).

1.2. Játékszabály

A feladvány leggyakrabban 9×9-es rács, 3×3-as részrácsokból összeállítva, melyeket régióknak hívnak (más szavakat is használhatunk, mint "rekeszek", "tömbök" és még hasonló variációk; néha az egyenlő "negyedek" kifejezést is használják, annak ellenére, hogy ez pontatlan kifejezés a 9×9-es rácsra). Néhány cella már tartalmaz számokat, ezek ismertek mint más rejtvényekben a kulcsok. A cél feltölteni a cellákat, mindegyikbe egy számot helyezni, úgy hogy minden sor, oszlop és régió pontosan egyszer tartalmazzon minden számot $1 - 9$-ig.

1.3. Nehézségi beosztás

A megjelent feladványokat gyakran nehézségek szerint kifejezve besorolják. Meglepően, a megadott számok kicsit, vagy nem fontosak a nehézség szempontjából. A feladvány minimálisan megadott számmal lehet nagyon könnyű a megfejtő számára, és több, mint az általában megadott számokkal lehet rendkívül nehéz. A rejtvény nehézsége inkább támaszkodik a megadott számok fontosságára és poziciójára, mint a mennyiségére.

A számitógépes megoldó programok meg tudják becsülni a nehézséget az emberek számára, (hogy megtalálják a megoldást), a megoldáshoz szükséges technikák bonyolultságára támaszkodva. Ez a becslés lehetővé teszi a kiadók számára, hogy a közönség sokféle megoldási tapasztalatainak megfelelően alakitsák a saját Sodoku feladványaikat. Van néhány online verzió különböző nehézségi pályával.

A legtöbb kiadó a Sudoku feladvány 4 fokát különbözteti meg: ”könnyű”, ”középhaladó”, ”nehéz” és ”kihívó”.

1.4. Variációk

Habár a 9×9 - es rács 3×3 - as régiókkal messze a leghétköznapibb, variációkban bővelkedik a játék: minta fejtörők lehetnek a 4×4 - es rácsok 2×2 - es régiókkal; 5×5 - ös rács pentominó régiókkal *Logi* – 5 név alatt. A World Puzzle Championship korábban fő helyen szerepeltetett egy 6×6 - os rácsot 2×3 - as régiókkal és egy 7×7 - es rácsot hat heptomino régióval és egy elválasztott régióval; Daily Sudoku fő helyen szerepelteti új 4×4, 6×6 és egyszerű 9×9 - es rácsait minden nap úgy, mint *Daily Sudoku Gyerekeknek*. Nagyobb rácsok is lehetségesek, ilyen például a Daily Sudoku 12×12 - es rácsa a *Monster Sudoku*. A Times hasonlóképpen kínál 12×12 - es rácsot, *Dodeka Sudoku*, 12 régióval, mindegyik 4×3 - as. Dell 16×16 játéka *Number Place Challenger* néven, és Nikoli kínál 25×25 - t *Sudoku the Giant* néven.

Korlátozásokat adtak ki a további hétköznapi variációkra, hogy kikényszerítsék a számok elhelyezésén kívül a szokásos sor, oszlop, és régió követelményeket. Gyakran ezek a korlátozások teszik extra dimenzióba a formát, ilyen leggyakrabban amikor a számoknak a rács főátlóiban is egyedülállónak kell lenni.

Az említett *Number Place Challenger* fejtörők ezen variációk mindegyike, így vannak a *Sudoku X* feladványok a *Daily Mail*-ben, melyek 6×6 - os rácsot használnak, valamint főhelyen szerepelteti a *Super Sudoku X* - et a hétvégi magazinjában: egy 8×8 - as rács, melyben a sorok, oszlopok, fő átlók, 2×4 - es és 4×2 - es blokkok tartalmaznak minden számot egyszer.

Más dimenziók is használatosak; a számok viszonylag ugyanolyan elhelyezésével a régiókban, az ilyen feladványokat általában színesen nyomtatják, lehet kocka, ekkor a fél felszínen dolgozunk, és minden ”sor/oszlop” átfog két oldalt.

Más fajtája a korlátozásoknak lehet számtani, ilyen például amikor azt is megkövetelik, hogy legyenek speciális összegek vagy szorzatok a régiókban.

1.5. Egy egyszerű példa

1.5.1. Jelölés

Ez egy teljesen szabványos Sudoku rejtvény.

		9		7		5		
	1	3				6	8	
	4		9		6		1	
	2		4		9		5	
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8				9		

Ez pedig a megoldása ennek a rejtvénynek.

2	6	9	1	7	8	5	3	4
7	1	3	2	5	4	6	8	9
8	4	5	9	3	6	2	1	7
3	2	1	4	8	9	7	5	6
5	8	4	6	2	7	3	9	1
6	9	7	3	1	5	8	4	2
9	3	2	5	6	1	4	7	8
1	5	8	7	4	2	9	6	3
4	7	6	8	9	3	1	2	5

Megfigyelve a sorokat, az oszlopokat és a 3×3-as blokkokat, láthatjuk, hogy valamennyi tartalmazza egytől kilencig az összes számot.

Ezen az egyszerű példán szeretném bemutatni, hogyan lehet megoldani egy ilyen feladványt.
Ahhoz, hogy az olvasó követni tudja a Sudoku megoldásának menetét, pontosan kell tudnia, hogy épp a rejtvény melyik részéről szól a magyarázat.
A nyolcvanegy négyzetből álló rejtvény egészének neve: *rács*.
A rács 9 *blokkból* tevődik össze, a következő módon:

	A			B			C	
	D			E			F	
	G			H			I	

Valamennyi blokk kilenc *négyzetet, vagy cellát* tartalmaz, amelyekre számokkal hivatkozok a blokkon belül. Pl. az *A blokk* esetében:

1	2	3						
4	5	6		B			C	
7	8	9						
	D			E			F	
	G			H			I	

Ezután tehát, ha az **A1** celláról lesz szó, akkor az olvasó is tudni fogja, hogy a feladvány első sorában szereplő első négyzetről beszélek. Így mostmár nekikezdhetünk a rejtvény megfejtésének.

1.5.2. Egy Sudoku megoldása

1. lépés

		9		7		5		
	1	3				6	8	
	4		9		6		1	
	2		4	X	9		5	
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8				9		

Először is próbáljuk meg kitölteni a középső, vagyis az **E**-vel jelölt blokkot. Természetesen nem muszáj itt kezdeni, mindenki tetszőlegesen megválaszthatja azt a pontot, ahonnan el szeretne indulni.
Én az **E** blokk felső sorának középső négyzetéből indulok ki, melynek azonosító jele: **E2**, és az ábrán **X**-el jelöltem a keresendő értéket.
Mindenekelőtt nézzük meg, mely számok szerepelnek abban a sorban, oszlopban, illetve blokkban, amelyben az E2 található.
Ez a művelet azért fontos, mert az E2 négyzetben nem szerepelhet egyetlen olyan szám sem, amely a sorában, oszlopában, vagy abban a blokkban már szerepel. Ez a Sudoku alapszabálya.
Az oszlopában szerepel a 7, az 1 és a 6, a sorában pedig a 2, a 4, a 9, és az 5. Az E blokkban található a 4, a 9, a 3, az 1 és az 5. Mivel ezek közül egyik sem lehet az általunk keresett szám, ki kell derítenünk, mely számok jöhetnek még számításba. Az egyetlen olyan szám, amely nem szerepel sem a sorában, sem az oszlopában, sem a blokkban, a 8. Az **E2** négyzetbe tehát csakis a 8 kerülhet.

2. lépés

		9		7		5		
	1	3				6	8	
	4		9		6		1	
	2		4	8	9		5	
				X				
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8				9		

Most lépjünk az **E5** négyzetre, az ábrán ismét X jelöli. Végezzük el ugyanazt a műveletet, amit az 1. lépésben, vagyis nézzük meg, milyen számok szerepelnek az E5 sorában, oszlopában, valamint az E blokkban.
Az oszlopában a 7, 8, 1, 6, a blokkban a 4, 8, 9, 3, 1, 5 számok találhatóak, a sorában pedig nincsenek előre beírt számok. Az egyetlen szám ami kimaradt a 2, tehát ez kerül az **E5** cellába.

3. lépés

		9		7		5		
	1	3				6	8	
	4		9		6		1	
	2		4	8	9		5	
			X	2				
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8				9		

Lépjünk az **E4** cellára. Ismét nézzük meg, milyen számok szerepelnek abban a sorban, oszlopan, illetve blokkban, amelyben az **E4** szerepel.

Az oszlopban található számok: 9, 4, 3, 5. A sorban szerepel az imént beírt kettes szám. A blokkban pedig a következő számok: 4, 8, 9, 2, 3, 1, 5. Ebben az esetben két olyan szám van egy és kilenc között, amely számításba jöhet: a 7 és a 6. Nem tudjuk, hogy melyiket kell beírni, ezért egyenlőre nézzük meg az E blokk utolsó, még nem vizsgált celláját, vagyis az **E6**-ot.

4. lépés

		9		7		5		
	1	3				6	8	
	4		9		6		1	
	2		4	8	9		5	
				2	X			
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8				9		

Ha megnézzük az oszlopát, a sorát, és a blokkot, kiderül, hogy az egyetlen hiányzó szám a 7. Mivel ebbe a cellába egyértelműen a hetes szám kerül, ezért a D4-be egyedül a hatos írható.

5. lépés

		9		7		5		
	1	3				6	8	
	4		9		6		1	
	2		4	8	9		5	
			6	2	7			
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8				9		

Most már az E blokk valamennyi cellája ismert.
Nézzünk meg egy újabb blokkot. Mint korábban említettem, tetszés szerint bármelyikkel folytathatjuk. Én most a **B**-t választom.
Látható, hogy ezen blokk 1. vagy 3. oszlopával érdemes folytatni, hiszen ha az egész feladványt nézzük, ebben a két oszlopban már elég sok szám ismert.

6. lépés

Vegyük például a **B4** cellát, és kövessük az E blokk esetében megfigyelt eljárást. Nézzük meg milyen számok szerepelnek egytől kilencig a B4 oszlopában, sorában, cellájában. Miután megnéztük, kiderül, hogy egyedül a 2 nem szerepel egyikben sem. Ebbe a négyzetbe tehát beírhatjuk a kettes számot.

7. lépés

Nézzük meg most a **B6** cellát. Követve a már jól ismert eljárást, kiderül, hogy az egyetlen hiányzó szám a 4.

		9		7		5		
	1	3	2		4	6	8	
	4		9		6		1	
	2		4	8	9		5	
			6	2	7			
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8				9		

8. lépés

Folytassuk például a **B5** négyzettel. Megvizsgálva a sorát, oszlopát, és a blokkot, látható, hogy egyedül az 5 írható a cellába.

9. lépés

Legyen a következő a **B8**. Követve az eddigi eljárást, ebbe a cellába is egy szám írható be, mégpedig a 3.

		9		7		5		
	1	3	2	5	4	6	8	
	4		9	3	6		1	
	2		4	8	9		5	
			6	2	7			
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8				9		

A B blokkban még két megfejtendő cella maradt, a **B1** és a **B3**. Kövessük a szokásos eljárást, nézzük meg azokat az oszlopokat, sorokat és blokkot, amelyek tartalmazzák a B1 és a B3 cellákat. Már csak két olyan szám maradt egy és kilenc között, amely nem szerepel a blokkban. Ez a két szám az 1 és a 8. A B1-ből az 1, a B3-ból a 8 hiányzik.

		9	1	7	8	5		
	1	3	2	5	4	6	8	
	4		9	3	6		1	
	2		4	8	9		5	
			6	2	7			
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8				9		

10. lépés

A B és E blokkokban tehát minden szám a helyére került, haladjunk tovább!

Majdnem teljesen kitöltöttük a feladvány középső három oszlopát. Folytassuk tehát a **H** blokkal, így teljesen megoldhatjuk a rejtvény központi részét.

Kezdjük a középső cellával, vagyis a **H5**-el. Ha végignézzük ezen cella sorát, oszlopát, és a blokkot, látható, hogy az egyetlen hiányzó szám a 4. A **H5** cellába tehát a 4 kerül.

11. lépés

Haladjunk tovább a **H4** négyzetbe, végezzük el a szokásos vizsgálatot, így láthatjuk, hogy az egyetlen kimaradt szám a 7. A **H4** cellába tehát beírjuk a 7-et.

12. lépés

Következzen most a **H6** cella. Innen két lehetséges szám hiányzik: a 2 és a 3. Nem tudjuk megmondani, hogy pontosan melyik, ezért erre a cellára majd visszatérünk.

Ha ezek után megviszgáljuk a **H9** cellát, láthatjuk, hogy innen is a 2 és a 3 hiányzik. Így majd erre is később térünk vissza.

Haladjunk tovább a **H8** cellába. Ott egyetlen szám jöhet szóba, mégpedig a 9. Ez pedig azt jelenti, hogy a **H7** cellába már csak a 8 kerülhet.

		9	1	7	8	5		
	1	3	2	5	4	6	8	
	4		9	3	6		1	
	2		4	8	9		5	
			6	2	7			
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8	7	4		9		
			8	9				

13. lépés

Ahogy már korábban említettem, bármely blokkot, s azon belül bármely cellát választhatjuk. Nincs különösebb jelentősége, melyik mellett döntünk.

Most vegyük az **A** blokkot, azon belül az 1-es cellát. Ha alkalmazzuk a szokásos eljárást, észrevehetjük, hogy az A1 cella esetében két szám jöhet szóba: a 2 és a 6. Egyenlőre így még nem írunk be semmit.

Ha most megvizsgáljuk az **A2** cellát, és szintén elvégezzük a szokásos eljárást, arra az eredményre jutunk, hogy az egyetlen szám egy és kilenc között, amely nem szerepel **A2**-nek sem a sorában, sem az oszlopában, sem pedig az A cellában, a 6. Így viszont, mivel az A2-be a 6 kerül, az A1 négyzetbe már csak a 2-t írhatjuk.

2	6	9	1	7	8	5		
	1	3	2	5	4	6	8	
	4		9	3	6		1	
	2		4	8	9		5	
			6	2	7			
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8	7	4		9		
			8	9				

14. lépés

Lépjünk most az **A4** cellára. Itt már kizárólag a hetes szám hiányzik egy és kilenc között.

Ezek után nézzük meg az **A7** cellát. Két szám jöhet szóba: az 5 és a 8. Egyenlőre tehát nem írunk be semmit, hanem továbbhaladunk az **A9** négyzethez. Ott egyetlen szám jöhet számításba, mégpedig az 5. Ebből viszont az következik, hogy az A7 cellában a 8 szerepel. Ezzel az **A** blokk minden celláját kitöltöttük.

2	6	9	1	7	8	5		
7	1	3	2	5	4	6	8	
8	4	5	9	3	6		1	
	2		4	8	9		5	
			6	2	7			
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8	7	4		9		
			8	9				

15. lépés

Foglalkozzunk most a **C** blokkal és próbáljuk meg kiegészíteni a legfelső sort. Vegyük most a **C2** négyzetet. Vizsgáljuk meg a hozzá tartozó sort, oszlopot, és blokkot. Láthatjuk, hogy a **C2** cellába egyetlen szám kerülhet, méghozzá a 3.

Ezek után a **C3** cellát megnézve, mivel ebben a sorban már az összes többi szám be van írva, nem szükséges megvizsgálnunk sem az oszlopot, sem a blokkot, mert biztosan az a szám kerül oda, amelyik ebből a sorból hiányzik, ez pedig a 4.

Most ellenőrzés céljából érdemes megvizsgálni a C3-hoz tartozó oszlopot, és a C blokkot. Ha valamelyikben esetleg még egyszer előfordul a 4, akkor bizonyos, hogy megoldás közben valamilyen hibát követtünk el.

16. lépés

Ezután vizsgáljuk meg a C blokk többi számait is. Vegyük először a **C6** cellát, és használjuk a szokásos módszert. Ennek alapján kideríthetjük, hogy a hiányzó szám a 9.

Az eredményünket úgy is ellenőrizhetjük, ha megnézzük a már teljesen kitöltött sort, és meggyőződünk róla, hogy nincs több 9 benne.

Ha ezután megnézzük a **C7** cellát, láthatjuk, hogy ott két szám jöhet szóba: a 2 és a 7. **C9** cellára szintén ez teljesül, ezért még ezt a két négyzetet szabadon hagyjuk.

2	6	9	1	7	8	5	3	4
7	1	3	2	5	4	6	8	9
8	4	5	9	3	6		1	
	2		4	8	9		5	
			6	2	7			
	9		3	1	5		4	
			5	6	1			
		8	7	4		9		
			8	9				

17. lépés

Nézzük meg most a **D** blokkot. A szokásos módszer használata révén kiderül, hogy a **D1** cellába három szám is szóba jöhet: az 1, a 3 és a 6. Tehát egyenlőre nem írunk be semmit.
Megnézve a **D3** cellát, látható, hogy elméletileg ott is három szám szerepelhet: az 1, a 6 és a 7.
Következzen a **D6** cella, amelyben két szám jöhet szóba: az 1 és a 4.
Ezek után nézzük a **D5** cellát, amelybe három számot írhatnánk: ezek a 3, az 5 és a 8.
Most nézzük meg a **D4** négyzetet, amelyben elvileg négy szám is szerepelhet: az 1, a 3, a 4 és az 5.

Viszont a **D7**-et vizsgálva láthatjuk, hogy ott egyetlen szám jöhet szóba, a **6**.

18. lépés

Most pedig lássuk a **D9** cellát. Az egyetlen szám, amely ebbe a cellába kerülhet, a 7. Újra megvizsgálva a sorát, oszlopát, blokkját, észrevesszük, hogy a **D3** cellába már csak az 1-et írhatjuk.
Mivel most már bizonyos, hogy a **D3** cellába az 1 kerül, így a **D1**-ben már csak egy szám, a 3 marad.
Így már az 1-nek a helyét is megtaláltuk, tehát a **D6** cellába egyedül a 4 kerülhet, de akkor már azt is meg tudjuk állapítani, hogy a **D4**-be az 5 kerül.
Ebben a blokkban már csak egy üres cella maradt, amibe már csak a 8-at tudjuk beírni.

Így kitöltöttük a **D** blokkot.

2	6	9	1	7	8	5	3	4
7	1	3	2	5	4	6	8	9
8	4	5	9	3	6		1	
3	2	1	4	8	9		5	
5	8	4	6	2	7			
6	9	7	3	1	5		4	
			5	6	1			
		8	7	4		9		
			8	9				

19. lépés

Következhet az **F** blokk.
Az **F1** cellába már csak a 7, az **F3**-ba pedig egyedül a 6 kerülhet.

Az **F4** cellába két szám szerepelhetne: az 1 és a 3. Nem tudjuk pontosan melyik kerül majd bele. Menjünk tovább.
Az **F5** négyzetbe csak egy számot írhatunk: a 9-et.
Az **F6** cella az F4-hez hasonlóan az 1-et és a 3-at tartalmazhatja, de még nem tudjuk pontosan melyiket.

Ellenőrzésképpen vizsgáljuk meg az F blokk, valamint a feladvány 4., és 5. sorainak számait. Nézzük meg, nem követtünk-e el valamilyen hibát.

Most nézzük meg az F blokk utolsó sorát. Az **F7** cellába csak a 8 kerülhet, az **F9**-be pedig kizárólag a 2.

2	6	9	1	7	8	5	3	4
7	1	3	2	5	4	6	8	9
8	4	5	9	3	6		1	
3	2	1	4	8	9	7	5	6
5	8	4	6	2	7		9	
6	9	7	3	1	5	8	4	2
			5	6	1			
		8	7	4		9		
			8	9				

20. lépés

Nézzük meg a **G** blokkot! A **G1** cellába két szám lehetséges: a 4 és a 9. A **G2**-re szintén két lehetőség van: a 3 és a 7. A **G3**-ban ugyanakkor egyetlen szám lehetséges: a 2.

Haladjunk lejjebb az oszlopban. A **G4** cellában egyetlen szám szerepelhet, az 1, a **G5**-ben viszont két lehetséges szám jöhet szóba: a 3 és az 5.

Az utolsó sorban a **G7** négyzetben a 4 az egyetlen szóba jöhető szám, a **G8** cellába viszont három: a 3, az 5 és a 7. A **G9**-be kizárólag a 6 kerülhet.

2	6	9	1	7	8	5	3	4
7	1	3	2	5	4	6	8	9
8	4	5	9	3	6		1	
3	2	1	4	8	9	7	5	6
5	8	4	6	2	7		9	
6	9	7	3	1	5	8	4	2
		2	5	6	1			
1		8	7	4		9		
4		6	8	9				

21. lépés

Végezetül nézzük az utolsó, **I** blokkot.

Az **I1**-be jelenleg két szám jöhet szóba: a 3 és a 4.
Az **I2** cellába csak a 7 kerülhet.
Az **I** blokk többi cellájába nem tudjuk még pontosan mely számok kerülnek. Vizsgáljuk meg az **I2** sorát. Üres hely még a **G2**, ahová mostmár csak a 3 írható be.
Ezután az **I1** cellába kizárólag a 4 marad, a **G1**-be tehát a 9-et írjuk, ekkor viszont már egyértelműen beírható az **I3** négyzetbe a 8.
A **G** blokkban így még két üres hely maradt. A **G5**-be mostmár egyértelműen

csak az 5 kerülhet, s emiatt a **G8**-ba is beírhatjuk a kimaradt 7-es számot.

Amikor kiderítettük, hogy az **I2** cellába a 7 kerül, működésbe lépett a számos négyzetre kiható dominóelv. Ez gyakran történik így, amikor egy Sudoku rejtvény végére érünk.

2	6	9	1	7	8	5	3	4
7	1	3	2	5	4	6	8	9
8	4	5	9	3	6		1	
3	2	1	4	8	9	7	5	6
5	8	4	6	2	7		9	
6	9	7	3	1	5	8	4	2
9	3	2	5	6	1	4	7	8
1	5	8	7	4		9		
4	7	6	8	9				

22. lépés

Az **I5** cellában potenciálisan két szám szerepelhet: a 2 és a 6. Ugyanebben a sorban, az **I6** négyzetben csakis a 3 szerepelhet.
Ha végignézünk ezen az oszlopon, láthatjuk, hogy az **F6** cellában az 1 szerepel. Ekkor viszont már azt is meg tudjuk állapítani, hogy az **F4**-be a 3 kerül.
Ha az **I6** cella sorát megnézzük, látható, hogy a **H6** cellába a 2 kerül, s így a **H9** cellában a 3-as szám a megoldás.

Most nézzük meg a Sudoku utolsó sorát. Az **I7** cellába az 1, az **I8**-ba a 2, az **I9**-be pedig az 5 kerül.

2	6	9	1	7	8	5	3	4
7	1	3	2	5	4	6	8	9
8	4	5	9	3	6	2	1	7
3	2	1	4	8	9	7	5	6
5	8	4	6	2	7	3	9	1
6	9	7	3	1	5	8	4	2
9	3	2	5	6	1	4	7	8
1	5	8	7	4	2	9	6	3
4	7	6	8	9	3	1	2	5

Elkészültünk a rejtvény megfejtésével. Most ellenőriznünk kell, hogy valamennyi sor, oszlop és blokk tartalmazza-e az összes számot egytől kilencig. Bizony előfordulhat, hogy valamelyik sorban, oszlopban, vagy blokkban egy szám kétszer is előfordul. Ekkor kezdhetjük előlről.

2. Eredmények

A továbbiakban 4×4 - es rácsokkal fogok dolgozni, mert azokat könnyebb követni, áttekinteni. Először is azzal a kérdéssel foglalkozom, hogy hány különböző 4×4 -es Sudoku rács létezik.

2.1. Lehetséges kitöltések

Sokakat foglalkoztatott az a kérdés, hogy a 4×4 - es Sudoku rácsnak hány különböző lehetséges kitöltése van. A következő gondolatmenettel szeretném bemutatni, hogy összesen 288 féle kitöltése létezik.
A feladat elhelyezni 4 adott számot 16 lehetséges cellába, a Sudoku szabályainak figyelembevételével.

Az adott négy szám: $1, 2, 3, 4$ elhelyezése az első blokkba ismétlés nélküli permutáció.

2.1.1. Definíció. Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy *ismétlés nélküli permutációján* az n különböző elem egy sorbarendezését értjük.

2.1.1. Tétel. *Egy adott* n *elemű halmaz permutációinak száma* $n!$.

Így az első blokknak $4! = 24$ féle kitöltése lehet. Tegyük fel, hogy most a következőképpen vannak elhelyezve a számok:

1	2		
3	4		

Akkor a rácsot így kell kitölteni:

1	2	[3	4]
3	4	[1	2]
[2]	[1]		
[4]	[3]		

Ahol [1 2] - vel jelölöm azt, hogy 1 és 2 valamilyen sorrendben szerepelhet. 16 - féleképpen helyezhetjük el a [3 4] - et és [1 2] - t, valamint a függőleges [2 4] - et és [1 3] - t, viszont amikor a jobb felső blokk oszlopaiban és a bal alsó blokk soraiban ugyanaz a két szám szerepel, akkor a Sudokunak nincs megoldása.
Például:

1	2	3	4
3	4	2	1
2	3		
4	1		

Így a 16 esetből 4 esetben nincs megoldás, vagyis az esetek egynegyedében, 12 esetben pedig van. Ezért összesen $24 \cdot 16 - (\frac{1}{4} \cdot (24 \cdot 16)) = 288$ kitöltése létezik a 4×4 - es Sudoku rácsnak.

Vannak akik úgy gondolják, hogy valójában, csak a következő két egyedi kitöltése van a rácsnak:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

és

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	2	1

Az egyedi azt jelenti, hogy nem lehet egyikből a másikat előállítani egyszerű műveletekkel. A többi ezekből a következő műveletekkel előállítható:

1. A négy számjegy permutációja
2. A sorok és oszlopok permutálása egy blokkon belül
3. A blokkok két sorának vagy oszlopának permutálása
4. A mátrix transzponálása

Nézzük meg, hogy valóban csak ez a kettő létezik:
Az 1. miatt feltételezhetjük, hogy az A blokk fix, és a következőképpen van kitöltve:

1	2		
3	4		

A B blokk első sora lehet a 3 4 vagy a 4 3 egyike. Viszont 2. miatt feltételezhetjük, hogy az első sor elemei sorrendben: 3 és 4.
A C blokk első oszlopának kitöltése a 2 4 vagy a 4 2 egyike, de szintén 2. miatt feltételezhetjük, hogy a 2 van felül.

1	2	3	4
3	4		
2			
4			

Ekkor azonnal beírhatjuk a hiányzó 4-est.

1	2	3	4
3	4		
2		4	
4			

Nézzük meg most a $D4$-es cellát: Itt szerepelhet az 1, a 2 és a 3 is. Viszont, ha a 3-at írjuk be, akkor az 1. - t alkalmazhatjuk, és megcserélhetjük a 2-t a 3-mal, kapva ezt a rácsot:

1	3	2	4
2	4		
3		4	
4			2

De a 4. - et alkalmazva kapjuk a következőt:

1	2	3	4
3	4		
2		4	
4			2

Ezért feltételezhetjük a *D4* celláról, hogy ott az 1 vagy a 2 szerepel. Ha az 1-et írjuk be, akkor a rács így tölthető ki:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Ha pedig a 2-t, akkor így:

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

Tehát lényegében tényleg csak ez a két kitöltés létezik, de ez tulajdonképpen csak matematikailag érdekes, mert egy rejtvényfejtő szempontjából a számok permutációjával kapott Sudoku ugyanolyan kihívás.

2.2. Minimumprobléma

A minimumprobléma azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy minimum hány számot kell előre beírni a rácsba, hogy az egyértelműen megoldható legyen. Megoldás:

- 2 kitöltött mezős rejtvény nincs, mert a másik két szám cserélhetősége miatt páros sok megoldása van.
- 3 kitöltött mező esetén a három számnak különbözőnek kell lennie ugyanilyen okból. Ez viszont (a szimmetriákkal sem törődve), az 1, 2, 3 számoknak $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ különböző elhelyezése, mely programmal gyorsan

generálható, és ellenőrizhető. Egyik sem rejtvény, vannak köztük olyanok, amelyeknek nincs is megoldása. Ilyen például a következő:

1	2		
		3	

Ennek a rácsnak nincs megoldása, mert az 1 2 alá a 3 4 - et kellene írni valamilyen sorrendben, de a 3 már szerepel a sorban.

- 4 kitöltött mezős rejtvény sok van, közülük néhány itt látható:

1	3		
		1	4

3			
1			
			3
			2

1		2	
	4		1

2.3. Megoldási módszerek

Ebben a részben olyan megoldási módszereket mutatok be, amelyekkel egyértelműen megfejthető minden olyan Sudoku rejtvény, melynek egyértelmű megoldása van.

2.3.1. DLX

A számítógépes tudományokban a *Dancing Links*[3], közismertebb nevén a *DLX* a *Donald E. Knuth* által javasolt technika arra, hogy hatékonyan implementáljuk az Ő *X algoritmusát*. Az X algoritmus egy rekurzív, nemdeterminisztikus algoritmus, mely megtalálja a 'precíz elhelyezés' problémák összes megoldását. Ilyen probléma például az N-királynő, és a Sudoku.
A Dancing Links név abból adódik, hogy az algoritmus a működése folyamán felépített gráfot úgy járja be, hogy az egy "kitűnően koreografált táncra" emlékeztet.

Néhány szó Donald E. Knuth -ról

1938. január 10 -én született Milwaukee -ban, Wisconsin államban. Egyetemi tanulmányait a Case Institute of Technology -n végezte 1956 és 1960 között. Matematikából szerezte Ph.D. fokozatát 1963 -ban a California Institute of Technology -n. Doktori disszertációjának címe: "Véges ferde testek és projektív síkok".

1960 -tól 1968 -ig a kaliforniai Burroughs Corporation-nél dolgozik, eközben 1963 és 1968 között tanársegéd, majd tudományos munkatárs a California Institute of Technology -n. 1968 óta a Stanford Egyetem professzora. 1968 és 1969 között a Védelmi Analitikai Intézetben (Institute for Defense Analyses) dolgozott matematikusként a Kommunikációs Kutató Részlegen (Communications Research Division). Egy évet vendégprofesszorként töltött el az Osloi Egyetemen 1972-1973-ban. 1977 óta a Stanford Egyetemen az Elektromérnöki Kar tiszteletbeli professzora is. 1977 -től 1989 -ig a Fletcher Jones - díj birtokosa, 1990 óta a "számítógépprogramozás művészetének professzora". Az Amerikai Matematikai Társaság (American Mathematical Society, AMS) 1961 óta élvezi tagságát (1978 és 1981 között Knuth maga is elnökségi tag). Az ACM-nek (Association for Computing Machinery) 1959 óta tagja, 1963 - 64 -ben vezetője is. 1959 óta a Mathematical Association of America, 1965 óta az Ipari és Alkalmazott Matematikai Társaság (Society for Industrial and Applied Mathematics) tagja.
Több, mint 50 díjat, emlékérmet kapott a világ sok országában. Idén a Duke és a skóciai St. Andrews Egyetem "A tudomány doktora" címet adományozta neki.
Legismertebb könyve A számítógép - programozás művészete először 1969-ben jelent meg. Az első három kötet címe: Alapvető algoritmusok, Szeminumerikus algoritmusok, Keresés és rendezés.
1979-ben jelent meg a TEX and METAFONT: New Directions in Typesetting című munkája. Ezzel párhuzamosan készítette el a TEX szövegkészítő programnyelv első verzióját, mellyel eredetileg az volt a célja, hogy A számítógép-programozás művészete c. könyv fárasztó tárgymutató - és tartalomjegyzék-összeállítását lerövidítse. 1984 -ben kibővítette a TEX -ről írt könyvet The TEXbook címmel. A TEX azóta a tudományos élet első számú szövegkészítő programja lett.

Mi is az a DLX algoritmus?

Egy olyan algoritmus, melyet a 'pontos elhelyezés' problémák megoldására használunk. Ezek olyan problémák, melyekről jól tudjuk, hogy NP-teljes. Alapvetően a problémát könnyű megérteni, de nem annyira könnyű megoldani, főleg a nagyobb méretű problémákat.
Tegyük fel például, hogy van egy mátrixunk 0-kal és 1-esekkel, és tudni akarjuk, hogy van-e egy olyan sorokból álló részhalmaza, ahol minden oszlopban csak egy 1-es van. Erre egy kicsi példa:

Sor1:	0	1	0	0
Sor2:	1	0	0	0
Sor3:	1	1	1	0
Sor4:	0	0	1	1

Az X algoritmus az A mátrixon:

1. Ha A üres, akkor a probléma meg van oldva, és vége
2. Különben válassz egy oszlopot, jelöljük ezt c-vel
3. Válassz egy sort, r-et, úgy hogy $A[r, c] = 1$
4. Belevesszük r-et a részleges megoldásba
   Minden olyan j esetén, melyre $A[r, j] = 1$ töröld a j oszlopot az A mátrixból
   Minden olyan i esetén, melyre $A[i, j] = 1$ töröld az i sort az A mátrixból
5. Ismételd az algoritmust rekurzívan a redukált A mátrixra

Más szavakkal leírva:
Kiszemelünk egy oszlopot, választunk egy sort, ahol az oszlopnak megfelelően van egyes, és töröljük azt a sort (de belevesszük a részleges megoldásba), aztán törlünk minden olyan oszlopot, mely egyest tartalmaz abban a sorban, amit törlünk. Majd törlünk minden más sort is, mely egyest tartalmaz a kiválasztott oszlopnak megfelelően. Ezek után marad egy redukált mátrix, melyen újra és újra végrehajtjuk rekurzívan ezt az algoritmust, amíg végül marad egy nullmátrix, vagy kapunk egy megoldást.

Az X algoritmus az előző példára:

Sor1:	0	1	0	0
Sor2:	1	0	0	0
Sor3:	1	1	1	0
Sor4:	0	0	1	1

Ha kiválasztom a 4. oszlopot, (mert ebben csak egy egyes van) ez maga után vonja a 3. oszlop és a 3. sor törlését, így marad a következő redukált mátrix (első két sor, első két oszlop):

Sor1:	0	1
Sor2:	1	0

Ezután kiválasztva az első oszlopot, végrehajtva az algoritmust marad egy 1×1-es mátrix. Ekkor már csak azt tudom választani, és ezzel kapok egy megoldást: a $Sor4$, $Sor2$ és az $Sor1$, vagy rendezve: az $Sor1$, $Sor2$, $Sor4$, mivel a sorrend nem lényeges.

De mit csinálhatnánk abban az esetben, ha a mátrix mérete 1000×1000? Ennek a problémának a számítási ideje és mérete már nem elhanyagolható. (Megjegyzem a mátrix nem feltétlenül négyzetes.) Ilyen esetekben alkalmazhatjuk a *DLX* algoritmust. Alapvetően, a DLX a 'precíz elhelyezés' probléma mátrixának ábrázolása láncolt lista segítségével. Egy olyan kétdimenziós listával, ahol minden elem láncolva van a szomszédaihoz, így a mátrix függőlegesen, és vízszintesen is bejárható. Itt van például a következő mátrix:

$$\begin{array}{llll} A & B & C & D \\ E & F & G & \\ H & I & & \end{array}$$

Vizsgáljuk meg az F elemet! A felső szomszédja a B, az alsó az I, G a jobb, és E a bal. Ez eddig egyértelmű. Viszont nézzük meg a B-t! Mivel az alkalmazott lista körbejárható, így B-nek a felső szomszédja I, továbbá A a bal, C a jobb és F az alsó szomszédok.
Végül vizsgáljuk meg I-t! F a felső szomszédja, B az alsó, H pedig a bal és jobb szomszédja is egyben.
Tehát építünk egy ilyen listát úgy, hogy a mátrixban szereplő minden 1-es számára létrehozunk egy csomópontot. Vagyis létre szeretnénk hozni egy ritka mátrixot csomópontokból felépítve, úgy hogy a nullák ne legyenek reprezentálva. Így csökken a probléma mérete, hiszen kevesebb adatot tartunk meg.
A DLX valójában tehát a mutatókat használó verziója az X algoritmusnak.

A DLX és a Sudoku

Ha a Sudoku megoldásához szeretnénk használni a DLX-et, akkor ki kell dolgoznunk a Sudoku problémát 'pontos elhelyezés' problémaként.
Nézzük meg mit jelentenek majd az általunk kidolgozni kívánt mátrix sorai és oszlopai!
Minden sor kifejez egy állást. Például beírva a $(3, 4)$ cellába egy 2-est kapunk egy állást. Ennek a döntésnek van néhány következménye a játék szabályai alapján, hiszen ezután a 3. sorba, a 4. oszlopba és a D blokkba nem írható újabb 2-es, továbbá a $(3, 4)$ cellába nem szerepelhet másik szám.
Ezek azok a dolgok, amiket fontolóra kell venni, így kapunk 4 feltételt:

- Sor - Oszlop feltétel: Egyik cellába sem írható egynél több szám
- Sor - Szám feltétel: Minden sornak tartalmaznia kell minden számot pontosan egyszer
- Oszlop - Szám feltétel: Minden oszlopnak tartalmaznia kell minden számot pontosan egyszer
- Blokk - Szám feltétel: Minden blokknak tartalmaznia kell minden számot pontosan egyszer

A mátrix oszlopai fogják kifejezni ezt a négy feltételt, a sorai pedig minden lehetséges állást, amit készíthetünk a 4×4-es rács esetén.
Mivel $4 \cdot 4 = 16$ cella van a rácsban, és van 4 különböző szám amit elhelyezhetünk a cellákban, az előallítható állások száma: $16 \cdot 4 = 4^3 = 64$.
Ellenőrizzük le az oszlopokra a feltételeket:
Sor - Oszlop feltétel: Van $4 \cdot 4 = 16$ lehetséges cella amibe számot írhatunk, így az első feltétel 16 darab (r, c) típusú (mátrix)oszlopot ad. r lesz a fő indexe ennek a feltételnek. Így $1 - 4$-ig a (mátrix)oszlopai reprezentálják az elhelyezett számokat az 1. sorban az $1-4$ oszlopokban. A (mátrix)oszlopai $5-8$-ig ábrázolják a 2. sor $1 - 4$ oszlopaiban elhelyezett számokat, és így tovább.
Valójában, ha elhelyezünk egy számot az r sor c oszlopában, akkor elhelyezünk egy 1-est az $(r - 1) \cdot 4 + c$ oszlopban.
Sor - Szám feltétel: Van 4 sor, és 4 lehetséges szám, amit minden sorban elhelyezhetünk, így ismét $4 \cdot 4 = 16$ (mátrix)oszlopunk lesz a 2. feltételre. Ezúttal is r lesz a főindex, így ha beírjuk a d számjegyet az r sorba, akkor elhelyezünk egy 1-est az $(r - 1) \cdot 4 + d + 16$ (mátrix)oszlopban, ahol a 16 az első feltételből származó oszlopok miatt szerepel.
Oszlop - Szám feltétel: Ugyanúgy, mint a soroknál, van 4 oszlop 4 különböző lehetséges számjeggyel, amelyek elhelyezhetőek. Ezért egy a c oszlopba elhelyezett d számjegy esetén elhelyezünk egy 1-est a $(c-1) \cdot 4 + d + 16 + 16$ (mátrix)oszlopba, ahol $16 + 16$ az első és második feltétellel függ össze.
Blokk - Szám feltétel: Blokk esetén is ugyanúgy működik, mint a soroknál és oszlopoknál. Van 4 blokk és 4 számjegy, vagyis lesz 16-tal több (mátrix)oszlop. Elhelyezve egy d számjegyet a b blokkba írunk egy 1-est a $(b-1) \cdot 4 + d + 16 + 16 + 16$ (mátrix)oszlopba, és itt is a $16 + 16 + 16$ az első, második és harmadik feltételekből adódnak.

Van tehát összesen $16 \cdot 4 = 64$ feltétel oszlopunk, ezért egy 64×64-es mátrix szükséges ahhoz, hogy egy 4×4-es Sudoku feladványt átvigyünk 'pontos elhelyezés' problémába.

Egy konkrét példán bemutatva:
Legyen a megfejtendő Sudoku rács a következő:

3		2	
	4		1

Az előzőekben leírt feltételeknek megfelelően létrehozott 64×64-es mátrix egy részlete, mely az első feltétel által definiált 16 oszlopot szemlélteti:

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Ez a mátrix építhető fel minden 4×4-es Sudoku feladvány esetén. A mátrix sorai tehát a lehetséges állásokat fejezik ki. Például a mátrix 1. sora a Sudoku első sorának első cellájába írt 1-es állást, a mátrix második sora a Sudoku első sorának első cellájába írt 2-es állást, és így tovább. A mátrix utolsó sora pedig a Sudoku negyedik sorának negyedik cellájába írt 4-est. Így végrehajtva az algoritmust valóban elegendő a sorokat belevenni a részmegoldásba, hiszen az egyértelműen azonosítja az adott állást.
Hajtsuk végre a DLX algoritmust a megfejtendő Sudokura.

Az első lépésben ki kell választani egy oszlopot. Általában érdemes azt az oszlopot választani, amelyikben a legkevesebb 1-es szerepel. Azonban az alap mátrix minden oszlopában 4 darab 1-es szerepel. Így most ez a választási mód nem lenne eredményes. Tudjuk viszont, hogy a második sor első cellájában 3-as szám szerepel, és azt is, hogy ehhez a cellához az 1. feltétel alapján tartozó oszlop az 5., így ezt az oszlopot választom. A továbbiakban mindig a legelső alkalmas oszlopot fogom választani.
A második lépésben választanunk kell egy sort, amely tartalmaz 1-est az oszlopnak megfelelően. Ennek kiválasztása már egyértelmű, a megadott 3-as szám miatt. Választom tehát a 19. sort.

A 19. **sor szerepel majd a megoldásban.** Ezután törölni kell minden sort, mely 1 -est tartalmaz a kiválasztott oszlopban, továbbá minden oszlopot, mely 1-est tartalmaz a 19. sorban, és ezen oszlopok azon sorait, melyek egyest tartalmaznak. Így kapjuk a következő redukált mátrixot:

$$
\begin{matrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{matrix}
$$

Ezt az eljárást ismételve a redukált mátrixra a következő sorrendben kerülnek a sorok a megoldásba:

- Elsőként került be a 19. (mátrix)sor, amely a Sudoku második sorának első cellájában elhelyezett 3-as számot jelöli. Hiszen a mátrix első 16 sora a Sudoku első sorának lehetséges állásait tartalmazza, a következő négy a második sor első cellájának lehetséges kitöltéseit, a 19 hárommal nagyobb mint a 16, tehát a 3-as számot képviseli.

- A következő lépésben a második sor harmadik cellájához tartozó oszlopot kiválasztva - hiszen ez szintén adott - a hozzá tartozó sor az eredeti mátrix 26. sora, tehát ez szerepel majd a megoldásban. Töröljük a megfelelő sorokat és oszlopokat.
- Még most sem szerepel olyan oszlop, melyben egyetlen 1-es szerepel, de tudjuk, hogy a harmadik sor második cellájában 4-es szám áll, így ennek megfelelően választjuk ki az oszlopot, és a 40. sort.
- Az utolsó megadott szám a feladványban a harmadik sor negyedik cellájában álló 1-es. Ennek megfelelően választva oszlopot és sort, a következő bekerülő sor az eredeti mátrix 45. sora.
- Mostmár a redukált mátrixnak van olyan oszlopa, amelyben egy 1-es szerepel. Tehát ezek közül választom az elsőt, az ennek megfelelő sor pedig a 21..
- Az előzőhöz hasonlóan a következő oszlopnak megfelelő sor a 32..
- A következő a 15.,
- aztán a 6., a 4., a 9., a 43., a 34., az 55., a 49., a 60., és végül a 62..

Az így kapott sorok adják meg a Sudoku megoldását, már csak annyi a teendő, hogy a megfelelő sorok által azonosított állások alapján kitöltjük a rácsot:

- Az első négy bekerült sor az eredetileg megadott számokat azonosítja, hiszen: $19 = 16+3$, vagyis a második sor első cellájába írt hármas, $26 = 16+4+4+2$, azaz a második sor harmadik cellájába írt kettes, $40 = 16+16+4+4$, tehát a harmadik sor második cellájába írt négyes, $45 = 16+16+4+4+4+1$, a harmadik sor negyedik cellájába írt egyes.
- Az előzőhöz hasonló módon megadva a többi állást:
  - $21 = 16 + 4 + 1$, a második sor második cellájába írt egyes,
  - $32 = 16 + 16$, a második sor negyedik cellájába írt négyes,
  - $15 = 4 + 4 + 4 + 3$, az első sor negyedik cellájába írt hármas,
  - $6 = 4 + 2$, az első sor második cellájába írt kettes,
  - $4 = 4$, az első sor első cellájába írt négyes,
  - $9 = 4 + 4 + 1$, az első sor harmadik cellájába írt egyes,
  - $43 = 16+16+4+4+3$, a harmadik sor harmadik cellájába írt hármas,

- $34 = 16 + 16 + 2$, a harmadik sor első cellájába írt kettes,
- $55 = 16 + 16 + 16 + 4 + 3$, a negyedik sor második cellájába írt hármas,
- $49 = 16 + 16 + 16 + 1$, a negyedik sor első cellájába írt egyes,
- $60 = 16 + 16 + 16 + 4 + 4 + 4$, a negyedik sor harmadik cellájába írt négyes,
- $62 = 16 + 16 + 16 + 4 + 4 + 4 + 2$, a negyedik sor negyedik cellájába írt kettes.

Hátra van még a rács kitöltése, és ellenőrzése. A kapott eredmények alapján előálló rács:

4	2	1	3
3	1	2	4
2	4	3	1
1	3	4	2

Leellenőrizve, valóban minden sorban, oszlopban és blokkban szerepel minden szám egytől négyig, és tényleg csak egyszer.
Látható tehát, hogy követve az algoritmus lépéseit, viszonylag rövid idő alatt megoldható a Sudoku, és logikázni sem kell hozzá.

2.3.2. Megoldás algebrai úton

Minden Sudoku rácsra felírható egy lineáris egyenletrendszer[4], melyet a következőképpen nyerünk a 4×4-es esetben:
Jelöljük a cellákat az $x_1, x_2, \cdots, x_{16}$ ismeretlenekkel az alábbi módon:

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}

Tudjuk, hogy az 1, 2, 3, 4 számokat kell elhelyezni úgy, hogy minden sorban, oszlopban, és blokkban mindegyik szerepeljen, de csak egyszer. Ebből következik, hogy a kitöltött rács minden sorában, oszlopában, és blokkjában elhelyezett számok összege 10. Így felírható a következő egyenletrendszer:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 10$$
$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 10$$
$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 10$$
$$x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} = 10$$
$$x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} = 10$$
$$x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} = 10$$
$$x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} = 10$$
$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 = 10$$
$$x_3 + x_4 + x_7 + x_8 = 10$$
$$x_9 + x_{10} + x_{13} + x_{14} = 10$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{15} + x_{16} = 10.$$

Ez egy 12 egyenletből álló, 16 ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer. Az első négy egyenlet a sorokra vonatkozik, a következő négy az oszlopokra, az utolsó négy pedig a blokkokra.
Egy adott Sudoku esetén azonban vannak rögzített helyek. Tekintsük ismét az előző példát:

3		2	
	4		1

Ekkor az előző egyenletrendszerhez hozzávesszük a rögzített helyek egyenleteit:

$$x_5 = 3$$
$$x_7 = 2$$
$$x_{10} = 4$$
$$x_{12} = 1.$$

A rögzített ismeretleneket behelyettesítve, majd rendezve az egyenleteket a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & & & & & & = & 10 \\
 & & & & x_6 & +x_8 & & & & & & & = & 5 \\
 & & & & & & x_9 & +x_{11} & & & & & = & 5 \\
 & & & & & & & & +x_{13} & +x_{14} & +x_{15} & +x_{16} & = & 10 \\
x_1 & & & & & & +x_9 & & +x_{13} & & & & = & 7 \\
 & x_2 & & & +x_6 & & & & & +x_{14} & & & = & 6 \\
 & & x_3 & & & & & +x_{11} & & & +x_{15} & & = & 8 \\
 & & & x_4 & & +x_8 & & & & & & +x_{16} & = & 9 \\
x_1 & +x_2 & & & +x_6 & & & & & & & & = & 7 \\
 & & x_3 & +x_4 & & +x_8 & & & & & & & = & 8 \\
 & & & & & & x_9 & & +x_{13} & +x_{14} & & & = & 6 \\
 & & & & & & & x_{11} & & & +x_{15} & +x_{16} & = & 9
\end{array}$$

Ezt az egyenletrendszert mátrix alakban felírva kapjuk a következőt:

$$\mathbf{R_1} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_8 & x_9 & x_{11} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 9
\end{array}\right)
\end{array}$$

Alkalmazva a Gauss-eliminációt trapéz alakra hozzuk:

$$\mathbf{R_1} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_8 & x_9 & x_{11} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10
\end{array}\right)
\end{array}$$

Ezzel nem sikerült újabb ismeretlent rögzíteni. Viszont a Sudoku szabályaiból adódóan felírható minden ismeretlenre 7 újabb egyenlet. Minden x_j cellára tekintsük az

$$F(x_j) = \prod_{i=1}^{4}(x_j - i)$$

polinomot. Minden cella 7 másik cellától függ, tekintsük például x_j-t és x_i - t $(0 < i < j < 17)$, melyekre teljesül a következő:

$$F(x_i) - F(x_j) = (x_i - x_j)G(x_i, x_j) = 0.$$

Mivel

$$F(x_i) = (x_i - 1)(x_i - 2)(x_i - 3)(x_i - 4)$$

és

$$F(x_j) = (x_j - 1)(x_j - 2)(x_j - 3)(x_j - 4)$$

így

$$F(x_i) - F(x_j) = x_i^4 - 10x_i^3 + 35x_i^2 - 50x_i - x_j^4 + 10x_j^3 - 35x_j^2 + 50x_j.$$

$F(x_i) - F(x_j)$ reducibilis, azaz

$$F(x_i) - F(x_j) = (x_i - x_j)(x_i + x_j - 5)(x_i^2 - 5x_i + x_j^2 - 5x_j + 10)$$

tehát osztható $(x_i - x_j)$-vel.
Így a $G(x_i, x_j)$ polinom a $(x_i + x_j - 5)(x_i^2 - 5x_i + x_j^2 - 5x_j + 10)$ polinommal egyenlő. Az egyenletrendszer pedig a

$$G(x_i, x_j) = 0, \quad ahol \quad 0 < i < j < 17$$

és az

$$x_5 - 3 = 0$$
$$x_7 - 2 = 0$$
$$x_{10} - 4 = 0$$
$$x_{12} - 1 = 0$$

rendszer.
Például x_1 esetén a felírható egyenletek a következők:

$$G(x_1, x_2) = 0$$
$$G(x_1, x_3) = 0$$
$$G(x_1, x_4) = 0$$
$$G(x_1, x_5) = 0$$
$$G(x_1, x_9) = 0$$
$$G(x_1, x_{13}) = 0$$
$$G(x_1, x_6) = 0.$$

1. *Megjegyzés.* A többi ismeretlenre az egyenletek hasonló módon írhatóak fel.

Használata

Az ismeretlenek meghatározásához az eljárás a következőképpen működik: minden ismeretlen hét másik ismeretlennel áll kapcsolatban, nevezzük ezeket szomszédosaknak. Azok közül az ismeretlenek közül választom a legelsőt, amelyeknek a legtöbb szomszédja ismert. A polinomok segítségével meghatározom ezt az ismeretlent, majd ennek megfelelően módosítom R_1-et, majd újraeliminálom, és amíg R_1-el tudok újabb ismeretlent meghatározni, addig mindig újraeliminálom. Azután ismét a polinomokkal dolgozok, majd újra eliminálok, mindaddig, amíg minden ismeretlent nem rögzítek, vagy amíg ki nem derül, hogy nem jutok megoldáshoz.

Az előbbiekben leírt elv alapján elsőként az x_6-ot határozom meg. Az x_6 esetén felírható egyenletek:

$$G(x_1, x_6) = 0$$

$$G(x_2, x_6) = 0$$

$$G(3, x_6) = 0$$

$$G(2, x_6) = 0$$

$$G(x_8, x_6) = 0$$

$$G(4, x_6) = 0$$

$$G(x_{14}, x_6) = 0.$$

Viszont mivel tudjuk, hogy $G(3, x_6) = 0$, $G(2, x_6) = 0$ és $G(4, x_6) = 0$, ahol

$$G(3, x_6) = x_6^3 - 7x_6^2 + 14x_6 - 8$$

$$G(2, x_6) = x_6^3 - 8x_6^2 + 19x_6 - 12$$

$$G(4, x_6) = x_6^3 - 6x_6^2 + 11x_6 - 6$$

olyan x_6-ot keresünk, amely a három polinomnak közös gyöke. Ha két polinomnak van közös gyöke, akkor az gyöke a legnagyobb közös osztójuknak is. Az Euklideszi-algoritmus alapján

$$LNKO(G(3, x_6), G(2, x_6)) = x_6^2 - 5x_6 + 4.$$

Viszont gyöke a $G(4, x_6)$ polinomnak is, azaz gyöke

$$LNKO(G(4, x_6), (x_6^2 - 5x_6 + 4)) = x_6 - 1$$

polinomnak, amiből

$$x_6 = 1.$$

R_1-et átalakítva:

$$
\mathbf{R_1} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_8 & x_9 & x_{11} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & | & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

R_1-ből azonnal leolvasható, hogy

$$x_8 = 4.$$

Ennek megfelelően ismét átalakítom R_1-et:

$$
\mathbf{R_1} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_9 & x_{11} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & | & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

R_1 alapján több ismeretlent még nem tudunk rögzíteni. A rács most így néz ki:

3	1	2	4
	4		1

Követve a gondolatmenetet az x_9-re felírható egyenletek alapján a $G(3, x_9)$, a $G(1, x_9)$ és a $G(4, x_9)$ polinomok közös gyökeit keressük, ahol

$$G(3, x_9) = x_9^3 - 7x_9^2 + 14x_9 - 8$$

$$G(1, x_9) = x_9^3 - 9x_9^2 + 26x_9 - 24$$

$$G(4, x_9) = x_9^3 - 6x_9^2 + 11x_9 - 6.$$

Az előzőhöz hasonlóan megkeresem a három polinom közös gyökét:

$$LNKO(G(3,x_9),G(1,x_9)) = x_9^2 - 6x_9 + 8$$

és

$$LNKO(G(4,x_9),(x_9^2 - 6x_9 + 8)) = x_9 - 2$$

vagyis

$$x_9 = 2.$$

Ennek megfelelően R_1-et átalakítva:

$$\mathbf{R_1} = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_9 & x_{11} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Ekkor R_1 alapján

$$x_{11} = 3.$$

Ennek megfelelően R_1-et átalakítva:

$$\mathbf{R_1} = \left(\begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Beírva az eddig rögzített ismeretleneket a rácsba:

3	1	2	4
2	4	3	1

x_1 meghatározása következik. A felírható egyenletek alapján a $G(3,x_1)$, a $G(1,x_1)$ és a $G(2,x_1)$ polinomok közös gyökeit keressük, ahol

$$G(3,x_1) = x_1^3 - 7x_1^2 + 14x_1 - 8$$

$$G(1, x_1) = x_1^3 - 9x_1^2 + 26x_1 - 24$$
$$G(2, x_1) = x_1^3 - 8x_1^2 + 19x_1 - 12.$$

A három polinom közös gyökének megkeresése:

$$LNKO(G(3, x_1), G(1, x_1)) = x_1^2 - 6x_1 + 8$$

$$LNKO(G(2, x_1), (x_1^2 - 6x_1 + 8)) = -x_1 + 4$$

tehát

$$x_1 = 4.$$

Átalakítva R_1-et:

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & | & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix}$$

Újraeliminálva:

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & | & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

x_2 meghatározása a $G(1, x_2)$, a $G(3, x_2)$ és a $G(4, x_2)$ polinomok segítségével, ahol

$$G(1, x_2) = x_2^3 - 9x_2^2 + 26x_2 - 24$$

$$G(3, x_2) = x_2^3 - 7x_2^2 + 14x_2 - 8$$

$$G(4, x_2) = x_2^3 - 6x_2^2 + 11x_2 - 6.$$

A közös gyök meghatározása:

$$LNKO(G(1, x_2), G(3, x_2)) = x_2^2 - 6x_2 + 8$$

és

$$LNKO(G(4, x_2), (x_2^2 - 6x_2 + 8)) = x_2 - 2.$$

Így

$$x_2 = 2.$$

R_1-et átalakítva és újraeliminálva:

$$\mathbf{R_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_3 & x_4 & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & | & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \end{array}$$

x_3 meghatározása: A felírható egyenletek alapján a $G(4, x_3)$, a $G(2, x_3)$ és a $G(3, x_3)$ polinomok közös gyökeit keressük, ahol

$$G(4, x_3) = x_3^3 - 6x_3^2 + 11x_3 - 6$$

$$G(2, x_3) = x_3^3 - 8x_3^2 + 19x_3 - 12$$

$$G(3, x_3) = x_3^3 - 7x_3^2 + 14x_3 - 8.$$

A három polinom közös gyökének megkeresése:

$$LNKO(G(4, x_3), G(2, x_3)) = x_3^2 - 4x_3 + 3$$

és

$$LNKO(G(3, x_3), (x_3^2 - 4x_3 + 3)) = x_3 - 1.$$

Ezért

$$x_3 = 1.$$

R_1-et átalakítva:

$$\mathbf{R_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_3 & x_4 & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & | & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \end{array}$$

R_1-ből kiolvasható, hogy

$$x_4 = 3.$$

Ekkor R_1-et ismét átalakítva:

$$\mathbf{R_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_4 & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & | & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

Látható, hogy

$$x_{16} = 2.$$

R_1 átalakítása:

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & | & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Ebből

$$x_{15} = 4.$$

Ismét átalakítva R_1-et:

$$\mathbf{R_1} = \begin{pmatrix} x_{13} & x_{14} & x_{15} & | & \\ 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Akkor

$$x_{14} = 3$$

és

$$x_{13} = 1.$$

Ezzel minden ismeretlent rögzítettünk, melyeket beírva a rács megfelelő celláiba, valóban a Sudoku megfejtését kaptuk, hisz minden sorban, oszlopban, és blokkban szerepelnek a számok 1-től 4-ig, de pontosan egyszer.

4	2	1	3
3	1	2	4
2	4	3	1
1	3	4	2

2.3.3. Összegzés

Bár a Sudoku a világ egyik legkedveltebb logikai játéka, látható, hogy egyszerű eljárással, mechanikusan megoldható, nem feltétlenül szükséges a megfejtéséhez logika, és egyéb trükk. Bár a játék ezen irányból történő megközelítése valószínűleg nem terjed el széles körben, de kedvet adhat azok számára, akik eddig tartózkodtak tőle, mert úgy gondolták kizárólag logikai úton oldható meg.

Irodalomjegyzék

[1] B. Felgenhauer and F. Jarvis. Enumerating possible sudoku grids. 2005.

[2] B. Hayes. Unwed numbers. 2006.

[3] D. Knuth. Dancing links.

[4] J. Gago Vargas, I. Hartillo Hermoso, J. Martín Morales, and J. M. Ucha Enríquez. Sudokus and gröbner bases: not only a divertimento.

[5] http://www.conceptispuzzles.com/products/sudoku/solution_examples.htm.

[6] http://www.setbb.com/phpbb/viewtopic.php?t=27&mforum=sudoku.

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku.

[8] http://www.csse.uwa.edu.au/ gordon/sudokumin.php.

[9] http://www.osix.net/modules/article/?id=792.