

Algebrai görbék a diofantikus számelméletben

Tengely Szabolcs

Habilitációs értekezés tézisei

Debreceni Egyetem

Debrecen, 2010

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	3
1 Bevezetés	5
2 Exponenciális diofantikus egyenletek vizsgálata	9
3 Számtani sorozat elemeinek szorzatával kapcsolatos diofantikus problémák	15
4 Számtani sorozatot alkotó teljes hatványok	21
5 Algebrai görbék pontjaival kapcsolatos eredmények	27
Irodalomjegyzék	31
6 Tengely Szabolcs publikációi és idézettsége	41
7 Konferenciaelőadások	47
8 Oktatói tevékenység adatai	49
9 Jelentősebb hazai és nemzetközi együttműködések	51
10 Tudományos közéleti tevékenység	53
11 Tudományos pályázatokban való részvétel	55
12 Tudományos önéletrajz	57

Bevezetés

E tézisekben Tengely Szabolcs habilitációs értekezésének legfontosabb eredményei vannak összefoglalva. A habilitációs értekezésben tíz publikáció szerepel, amelyek közül nyolc Tengely Szabolcs PhD disszertációjának megvédése után született. Ezek a publikációk a következők: [1],[22],[48],[49],[57],[62], [105] és [106]. Az eredmények tartalmuk szerint négy fejezetben kerülnek bemutatásra. A témakörökről, a kutatott problémák háttéréről, irodalmi beágyazásukról részletesebben a kapcsolódó fejezetekben olvashatunk. Ezen felül a tézisek végén megtalálható Tengely Szabolcs publikációs és hivatkozási jegyzéke, konferencia-előadásainak listája, oktatói tevékenységének rövid leírása, jelentősebb hazai és nemzetközi együttműködéseinek felsorolása, tudományos közéleti tevékenysége, tudományos pályázatokban való részvételei és szakmai önéletrajza.

Az első részben bizonyos exponenciális egyenletek vizsgálatával kapcsolatos tételek szerepelnek. Az $Ax^2 + B = Cy^n$ alakú diofantikus egyenletek irodalma meglehetősen gazdag. Különböző végességi állítások igazolása mellett sok esetben lehetővé vált az egyenlet összes megoldásainak meghatározására is. Az alkalmazott módszerek között megtaláljuk az algebrai számelmélet mély eredményeit, a Baker-módszer megfelelő változatainak az alkalmazását és ezen egyenletek esetében igen eredményesen alkalmazhatónak bizonyult Bilu, Hanrot és Voutier egy eredménye Lucas és Lehmer sorozatok primitív osztóival kapcsolatban. Abu Muriefahval, Lucaval és Siksekkel közösen Tengely vizsgálta az $x^2 + C = 2y^p$ egyenletet, ahol C egy $4k + 1$ alakú egész. Tételükben p -re gyakorlatban jól használható korlátot igazoltak, amit több példán keresztül illusztráltak is. Például meghatározták az $x^2 + 17^a = 2y^p$ egyenlet összes (x, y, a, p) megoldását. Lucaval és Togbéval közösen az $x^2 + C = 4y^p$ egyenlet esetében értek el eredményeket. A publikációkban Tengely társszerzői Abu Muriefah, Luca, Siksek és Togbé voltak.

A második részben számtani sorozatok elemeinek szorzatával összefüggésben végzett kutatások kapnak helyet. Az $n(n + d) \dots (n + (k - 1)d) = by^l$ diofantikus egyenlet speciális eseteivel már Euler is foglalkozott, igazolta, hogy

nem létezik megoldás, ha $k = 4, l = 2$ és $b = 1$. Később is sokan vizsgálták a különböző eseteket, csak néhány nevet említve, Erdős, Győry, Hajdu, Obláth, Rigge, Saradha, Shorey, Tijdeman ért el több fontos eredményt. A fejezetben bemutatásra kerül Tengely egy eredménye, amelyben kiterjeszti Mukhopadhyay és Shorey egy tételét az $n(n + d)(n + 2d)(n + 3d)(n + 4d) = by^2$ egyenletre vonatkozóan. Ugyanebben a dolgozatában Tengely megoldotta Hirata-Kohno, Laishram, Shorey és Tijdeman egy tételében szereplő kimaradó eseteket. Az előző probléma egy változatát vizsgálta Laishram, Shorey és Tengely a közös dolgozatukban. A számtani sorozat egymást követő tagjai közül néhányat törölünk a szorzatból és továbbra is olyan sorozatokat keresünk, amelyeknél ez a szorzat közel teljes négyzetszámot eredményez. A publikációkban Tengely társszerzői Hajdu, Laishram, Shorey és Tijdeman voltak.

A harmadik fejezetben a csupa teljes hatványból felépülő számtani sorozatokkal kapcsolatos eredmények találhatók. A témakör kutatásában számos jól ismert matematikus vett részt. Már Fermat megfogalmazta a sejtést, hogy négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot, ezt később Euler be is bizonyította. Azonos hatványok esetében Mordell, Dirichlet és Lebesgue igazoltak eredményeket kis kitevőkre, később Dénes kiterjesztette a megoldást magasabb kitevőkre. Végül Darmon és Merel adott általános választ tetszőleges kitevőkre, felhasználva a Fermat-egyenlet esetében sikert jelentő moduláris technikát. Különböző hatványokból álló sorozatokat vizsgált Bruin, Győry, Hajdu és Tengely. Többek között bebizonyították, hogy négyzetszámokból és köbszámokból csak triviálisan lehet számtani sorozatot felépíteni. Később Hajdu és Tengely megmutatta, hogy négyzetszámokból és azonos kitevős teljes hatványokból legfeljebb hat hosszú nem triviális sorozat állítható elő, köbszámokból és azonos kitevős teljes hatványokból pedig legfeljebb négy. A publikációkban Tengely társszerzői Bruin, Győry és Hajdu voltak.

Végül a negyedik rész algebrai görbék egész- és racionális pontjainak meghatározásáról szól. Először Tengely egy háromszögekkel kapcsolat cikkét mutatjuk be, amelyben olyan egész x, y értékeket határozott meg, amelyekre teljesül, hogy ha egy óra kismutatójának hossza x , nagymutatójáé pedig y , akkor a két mutató távolabbi végpontjainak távolsága (i) 2 órákor és 3 órákor (ii) 2 órákor és 4 órákor) is egész érték legyen. A második publikáció a fejezetben hiperelliptikus görbék egész pontjainak meghatározásával foglalkozik. A klasszikus témakörben Baker adott felső korlátot a megoldások méretére, ezt az eredményt később többen élesítették, általánosították. A Bugeaudval, Mignotteval, Siksekkel és Stoll-lal közös dolgozatban a Baker-módszer egy változatát felhasználva felső korlátot nyertek a megoldásokra, ez a korlát azonban túl nagy, hogy segítségével leszámolható legyen az összes megoldás. Viszont a Mordell-

Weil szitát felhasználva megmutatható, hogy ha van nem ismert megoldás, akkor annak mérete az előző korlát felé esik. Így több esetben az összes megoldás meghatározható, illusztrációként az $y^2 - y = x^5 - x$ egyenletet és az $\binom{y}{2} = \binom{x}{5}$ egyenletet oldották meg a cikkben. A publikációkban Tengely társszerzői Bugeaud, Mignotte, Siksek és Stoll voltak.

Exponenciális diofantikus egyenletek vizsgálata

Ebben a fejezetben a [104] dolgozatban szereplő, a [1] cikkben szereplő, Abu Muriefahval, Lucaval és Siksekkel közösen nyert és a [62] publikációban megjelent, Lucaval és Togbével közösen igazolt eredmények kerülnek bemutatásra.

Az irodalomban jelentős számú eredmény található az

$$Ax^2 + B = Cy^n$$

diofantikus egyenlettel kapcsolatban, ahol $A, B, C \in \mathbb{Z}$, $ABC \neq 0$ és $n > 2$, x, y ismeretlen egészek. Lebesgue [58] 1850-ben igazolta, hogy a fenti egyenletnek $B = 1$ esetében csak az $x = 0$ választással kaphatunk megoldást. Chao Ko [54] 1965-ben meghatározta a fenti egyenlet összes megoldását a $B = -1$ esetben. J.H.E. Cohn [26] megoldotta az egyenletet a $1 \leq B \leq 100, C = 1$ feltétel mellett, kivéve néhány B értéket. A kimaradó esetek közül Mignotte és De Weger [65] oldott meg néhányat. Bugeaud, Mignotte és Siksek [21] a Baker-módszer és a moduláris-módszer kombinálásával meghatározta a kimaradó esetekben a megoldásokat.

Bilu, Hanrot és Voutier [12] a Lucas és Lehmer számok primitív osztóival kapcsolatos elegáns eredménye egy jól alkalmazható eszköz lett a fenti egyenlet kezeléséhez, azokban az esetekben, amikor $B = p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s}$ és $C = 1, 2, 4$. Néhány eredmény a témakörből: [2], [3], [72], [73], [74], [4], [5], [20], [25], [27], [60], [61], [64], [70], [71], [77].

Tengely a [104] cikkében az

$$x^2 + q^{2m} = 2y^p, \tag{2.1}$$

egyenletet vizsgálta, ahol $x, y \in \mathbb{N}$, $(x, y) = 1$, $m \in \mathbb{N}$ és p, q páratlan prímek. A következő végességi állítás igaz az egyenlettel kapcsolatban.

2.1. Tétel. Az (2.1) egyenletnek csak véges sok (x, y, m, q, p) megoldása létezik, ahol $(x, y) = 1$, $x, y \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $p > 3$, q páratlan prímek és y nem áll elő, mint két egymást követő négyzetszám összege.

Amikor y előáll két egymást követő négyzetszám összegeként, akkor léteznek nagy megoldások, ahogyan az alábbi példák is mutatják.

y	p	q
5	5	79
5	7	307
5	13	42641
5	29	1811852719
5	97	2299357537036323025594528471766399
13	7	11003
13	13	13394159
13	101	224803637342655330236336909331037067112119583602184017999
25	11	69049993
25	47	378293055860522027254001604922967
41	31	4010333845016060415260441

A tétel bizonyításában felhasználjuk, hogy a Gauss-egészek körében faktORIZÁLVA a megoldásokra paraméteres egyenleteket tudunk nyerni:

$$\begin{aligned} x &= \Re((1+i)(u+iv)^p) =: F_p(u, v), \\ q^m &= \Im((1+i)(u+iv)^p) =: G_p(u, v). \end{aligned}$$

Ahol F_p és G_p kétváltozós egész együtthatós homogén polinomok. Valamint igaz a következő oszthatósági tulajdonság:

$$\begin{aligned} (u - \delta_4 v) &\mid F_p(u, v), \\ (u + \delta_4 v) &\mid G_p(u, v), \end{aligned}$$

ahol

$$\delta_4 = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{if } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Az oszthatósági tulajdonságból a következő egyenletrendszereket kapjuk:

$$\begin{aligned} u + \delta_4 v &= q^k, \\ H_p(u, v) &= q^{m-k}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

vagy

$$\begin{aligned} u + \delta_4 v &= -q^k, \\ H_p(u, v) &= -q^{m-k}, \end{aligned}$$

ahol $H_p(u, v) = \frac{G_p(u, v)}{u + \delta_4 v}$. A végeességi állítás igazolásához szükség van egy felső korlátra a p kitevő esetében, ezt a Baker-módszer segítségével kapjuk meg. Itt

Mignotte [12, Theorem A.1.3] eredményét alkalmazzuk és a $p \leq 3803$ korlátot nyerjük. Végül a problémát visszavezetjük véges sok Thue-egyenletre:

$$H_p(u, v) = \pm p,$$

és

$$H_p(u, v) = \pm 1$$

alakban. Az ilyen egyenletek esetében Thue [108] igazolta, hogy csak véges sok megoldás létezhet. A cikkben még találhatóak eredmények a rögzített y és a rögzített q esetekkel kapcsolatban is. Így például igazolást nyer a következő tétel.

2.2. Tétel. *Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ diofantikus egyenlet összes relatív prím (x, y) megoldása az $m > 0$ és p prím feltételek mellett $(x, y, m, p) = (13, 5, 2, 3), (79, 5, 1, 5)$, vagy $(545, 53, 3, 3)$.*

Az Abu Muriefahval, Lucaval és Siksekkal [1] közösen írt cikkben az $x^2 + C = 2y^n$ vizsgálatával kapcsolatos eredmények találhatóak. Bizonyítást nyer a következő eredmény.

2.3. Tétel. *Legyen C pozitív egész, amelyre $C \equiv 1 \pmod{4}$, és $C = cd^2$, ahol c négyzetmentes. Tegyük fel, hogy (x, y) megoldása az*

$$x^2 + C = 2y^p, \quad x, y \in \mathbb{Z}^+, \quad (x, y) = 1, \quad (2.3)$$

egyenletnek, ahol $p \geq 5$ prím. Ekkor a következő lehetőségek vannak

(i) $x = y = C = 1$, vagy

(ii) p osztja a $\mathbb{Q}(\sqrt{-c})$ számtest ideálosztály számát, vagy

(iii) $p = 5$ és $(C, x, y) = (9, 79, 5), (125, 19, 3), (125, 183, 7), (2125, 21417, 47)$,
vagy

(iv) $p \mid (q - (-c|q))$, ahol q páratlan prím és $q \mid d$ de $q \nmid c$. Itt $(c|q)$ jelöli a Legendre-szimbólumot.

A fenti tétel segítségével a szerzős meghatározták az $x^2 + C = 2y^n$ egyenlet összes megoldását $C \equiv 1 \pmod{4}$, $1 \leq C < 100$ feltételek mellett.

2.4. Tétel. Az $x^2 + C = 2y^n$ egyenlet relatív prím x, y megoldásai az $n \geq 3$, és $C \equiv 1 \pmod{4}$, $1 \leq C < 100$ feltételek mellett a következők

$$\begin{aligned} 1^2 + 1 &= 2 \cdot 1^n, & 79^2 + 9 &= 2 \cdot 5^5, & 5^2 + 29 &= 2 \cdot 3^3, \\ 117^2 + 29 &= 2 \cdot 19^3, & 993^2 + 29 &= 2 \cdot 79^3, & 11^2 + 41 &= 2 \cdot 3^4, \\ 69^2 + 41 &= 2 \cdot 7^4, & 171^2 + 41 &= 2 \cdot 11^4, & 1^2 + 53 &= 2 \cdot 3^3, \\ 25^2 + 61 &= 2 \cdot 7^3, & 51^2 + 61 &= 2 \cdot 11^3, & 37^2 + 89 &= 2 \cdot 9^3. \end{aligned}$$

A tétel alkalmazható olyan esetekben is, amikor C prímosztói rögzítettek, ennek illusztrálására a cikkben meghatározták az

$$\begin{aligned} x^2 + 17^{a_1} &= 2y^n, \\ x^2 + 5^{a_1} 13^{a_2} &= 2y^n, \\ x^2 + 3^{a_1} 11^{a_2} &= 2y^n, \end{aligned}$$

egyenletek összes megoldását is.

2.5. Tétel. Az

$$x^2 + 17^{a_1} = 2y^n, \quad a_1 \geq 0, \quad \gcd(x, y) = 1, \quad n \geq 3,$$

egyenlet megoldásai a következők

$$1^2 + 17^0 = 2 \cdot 1^n, \quad 239^2 + 17^0 = 2 \cdot 13^4, \quad 31^2 + 17^2 = 2 \cdot 5^4.$$

Az

$$x^2 + 5^{a_1} 13^{a_2} = 2y^n, \quad a_1, a_2 \geq 0, \quad \gcd(x, y) = 1, \quad n \geq 3,$$

egyenlet összes megoldása:

$$\begin{aligned} 1^2 + 5^0 \cdot 13^0 &= 2 \cdot 1^n, & 9^2 + 5^0 \cdot 13^2 &= 2 \cdot 5^3, \\ 7^2 + 5^1 \cdot 13^0 &= 2 \cdot 3^3, & 99^2 + 5^2 \cdot 13^0 &= 2 \cdot 17^3, \\ 19^2 + 5^2 \cdot 13^1 &= 2 \cdot 7^3, & 79137^2 + 5^2 \cdot 13^3 &= 2 \cdot 1463^3, \\ 253^2 + 5^2 \cdot 13^4 &= 2 \cdot 73^3, & 188000497^2 + 5^8 \cdot 13^4 &= 2 \cdot 260473^3, \\ 239^2 + 5^0 \cdot 13^0 &= 2 \cdot 13^4. \end{aligned}$$

Az

$$x^2 + 3^{a_1} 11^{a_2} = 2y^n, \quad a_1, a_2 \geq 0, \quad \gcd(x, y) = 1, \quad n \geq 3,$$

diofantikus egyenlet megoldásai:

$$\begin{aligned}
 1^2 + 3^0 \cdot 11^0 &= 2 \cdot 1^n, & 351^2 + 3^0 \cdot 11^4 &= 2 \cdot 41^3, \\
 13^2 + 3^4 \cdot 11^0 &= 2 \cdot 5^3, & 5^2 + 3^4 \cdot 11^2 &= 2 \cdot 17^3, \\
 27607^2 + 3^4 \cdot 11^2 &= 2 \cdot 725^3, & 545^2 + 3^6 \cdot 11^0 &= 2 \cdot 53^3, \\
 679^2 + 3^6 \cdot 11^2 &= 2 \cdot 65^3, & 1093^2 + 3^8 \cdot 11^4 &= 2 \cdot 365^3, \\
 410639^2 + 3^{10} \cdot 11^2 &= 2 \cdot 4385^3, & 239^2 + 3^0 \cdot 11^0 &= 2 \cdot 13^4, \\
 79^2 + 3^2 \cdot 11^0 &= 2 \cdot 5^5.
 \end{aligned}$$

A Lucaval és Togbével közös [62] publikációban az $x^2 + C = 4y^n$ diofantikus egyenlettel kapcsolatos eredmények kaptak helyet.

2.6. Tétel. Az

$$x^2 + C = 4y^n, \quad x, y \geq 1, \quad (x, y) = 1, \quad n \geq 3, \quad C \equiv 3 \pmod{4}, \quad 1 \leq C \leq 100 \quad (2.4)$$

diofantikus egyenlet (C, n, x, y) megoldásait a következő táblázat tartalmazza

$(3, n, 1, 1)$	$(3, 3, 37, 7)$	$(7, 3, 5, 2)$	$(7, 5, 11, 2)$
$(7, 13, 181, 2)$	$(11, 5, 31, 3)$	$(15, 4, 7, 2)$	$(19, 7, 559, 5)$
$(23, 3, 3, 2)$	$(23, 3, 29, 6)$	$(23, 3, 45, 8)$	$(23, 3, 83, 12)$
$(23, 3, 7251, 236)$	$(23, 9, 45, 2)$	$(31, 3, 1, 2)$	$(31, 3, 15, 4)$
$(31, 3, 63, 10)$	$(31, 3, 3313, 140)$	$(31, 6, 15, 2)$	$(35, 4, 17, 3)$
$(39, 4, 5, 2)$	$(47, 5, 9, 2)$	$(55, 4, 3, 2)$	$(59, 3, 7, 3)$
$(59, 3, 21, 5)$	$(59, 3, 525, 41)$	$(59, 3, 28735, 591)$	$(63, 4, 1, 2)$
$(63, 4, 31, 4)$	$(63, 8, 31, 2)$	$(71, 3, 235, 24)$	$(71, 7, 21, 2)$
$(79, 3, 265, 26)$	$(79, 5, 7, 2)$	$(83, 3, 5, 3)$	$(83, 3, 3785, 153)$
$(87, 3, 13, 4)$	$(87, 3, 1651, 88)$	$(87, 6, 13, 2)$	$(99, 4, 49, 5)$

2.1. táblázat. Az $x^2 + C = 4y^n$ egyenlet megoldásai, ahol $1 \leq C \leq 100$

Továbbá megoldották a $C = 7^a \cdot 11^b, 7^a \cdot 13^b$, esetekben is az adódó diofantikus egyenleteket.

2.7. Tétel. • Az

$$x^2 + 7^a \cdot 11^b = 4y^n, \quad x, y \geq 1, \quad (x, y) = 1, \quad n \geq 3, \quad a, b \geq 0 \quad (2.5)$$

egyenlet megoldásai:

$$\begin{aligned} 5^2 + 7^1 \cdot 11^0 &= 4 \cdot 2^3, & 11^2 + 7^1 \cdot 11^0 &= 4 \cdot 2^5, & 31^2 + 7^0 \cdot 11^1 &= 4 \cdot 3^5, \\ 57^2 + 7^1 \cdot 11^2 &= 4 \cdot 4^5, & 13^2 + 7^3 \cdot 11^0 &= 4 \cdot 2^7, & 57^2 + 7^1 \cdot 11^2 &= 4 \cdot 2^{10} \\ 181^2 + 7^1 \cdot 11^0 &= 4 \cdot 2^{13}. \end{aligned}$$

• Az

$$x^2 + 7^a \cdot 13^b = 4y^n, \quad x, y \geq 1, \quad \gcd(x, y) = 1, \quad n \geq 3, \quad a, b \geq 0 \quad (2.6)$$

diofantikus egyenlet megoldásai:

$$\begin{aligned} 5^2 + 7^1 \cdot 13^0 &= 4 \cdot 2^3, & 5371655^2 + 7^3 \cdot 13^2 &= 4 \cdot 19322^3, & 11^2 + 7^1 \cdot 13^0 &= 4 \cdot 2^5, \\ 13^2 + 7^3 \cdot 13^0 &= 4 \cdot 2^7, & 87^2 + 7^3 \cdot 13^2 &= 4 \cdot 4^7, \\ 181^2 + 7^1 \cdot 13^0 &= 4 \cdot 2^{13}, & 87^2 + 7^3 \cdot 13^2 &= 4 \cdot 2^{14}. \end{aligned}$$

Számtani sorozat elemeinek szorzatával kapcsolatos diofantikus problémák

Ebben a fejezetben a [106] dolgozatban szereplő, a [57] cikkben szereplő, Laishrammal és Shoreyval közösen igazolt és a [49] publikációban Hajduval és Tijdemannal közösen nyert eredmények kerülnek bemutatásra.

Az irodalomban rengeteg eredmény található számtani sorozatokkal kapcsolatos diofantikus problémákról. Ebben a fejezetben a

$$n(n+d)\dots(n+(k-1)d) = by^l \quad (3.1)$$

egyenlettel foglalkozunk, ahol n, d, k, b, y, l pozitív egészek, $l \geq 2$, $k \geq 3$, $(n, d) = 1$, $P(b) \leq k$, itt $u \in \mathbb{Z}$ és $|u| > 1$ esetén $P(u)$ jelöli u legnagyobb prímosztóját és $P(\pm 1) = 1$.

Néhány publikációt emelnénk ki a témakörben: [15], [38], [41], [44], [50], [55], [56], [63], [81], [83], [84], [85], [87], [90], [91], [92], [93], [95], [96], [97], [98], [109], [110]. Továbbá néhány eredményről az alábbiakban részletesen is említést teszünk.

Tekintsük először az $l = 2$ esetet. Már Euler igazolta ([33] 440 és 635 oldalak), hogy a (3.1) egyenletnek nincs megoldása, ha $k = 4$ és $b = 1$. Később Obláth [75] kiterjesztette az eredményt a $k = 5$ esetre. Erdős [34] és Rigge [80] egymástól függetlenül belátták, hogy a (3.1) egyenletnek nincs megoldása, ha $b = d = 1$. Hirata-Kohno, Laishram, Shorey és Tijdeman [52] teljesen megoldották a (3.1) egyenletet, amikor $3 \leq k < 110$ és $b = 1$. Tengely [107] eredményével kombinálva a fenti probléma összes megoldását megkapjuk, ha $3 \leq k \leq 100$, $P(b) < k$.

Tekintsük most az $l \geq 3$ esettel kapcsolatos eredményeket. Erdős és Selfridge [35] igazolta, hogy a (3.1) egyenletnek nincs megoldása, ha $b = d = 1$. Általánosabb esetben, amikor $P(b) \leq k$ és $d = 1$ Saradha [82] bizonyította, hogy $k \geq 4$ feltétel mellett az egyenletnek nincs olyan megoldása, amelyre $P(y) > k$.

Felhasználva Darmon és Merel [29] eredményét, Győry [42] hasonló tételt igazolt a $k = 2, 3$ esetekben. Abban az esetben, amikor elhagyjuk a d -re vonatkozó megszorítást is, Győry [43] belátta, hogy $k = 3, P(b) \leq 2$ mellett nem létezik megoldása az egyenletnek. További általános eredményeket találunk a [8], [45] és a [46] dolgozatokban. Többek között igazolást nyert, hogy a (3.1) egyenletnek nincs megoldása, ha $b = 1$ és $k < 35$.

A [106] cikkben Tengely két korábbi tétellel kapcsolatban igazolt állításokat, először ezeket ismertetjük.

Tétel (Mukhopadhyay, Shorey). *Tegyük fel, hogy n és d relatív prím egészek úgy, hogy $nd \neq 0$. Ekkor az*

$$n(n+d)(n+2d)(n+3d)(n+4d) = by^2$$

diofantikus egyenletnek nem létezik $b, y, by \neq 0$ és $P(b) \leq 3$ feltételek mellett egész megoldása.

Az eredményt Tengely kiterjesztette a $P(b) = 5$ esetre és igazolta a következő tételt.

3.1. Tétel. *Az*

$$n(n+d)(n+2d)(n+3d)(n+4d) = by^2$$

egyenletnek $d > 1, k = 5$ és $P(b) = 5$ feltételekkel a következő (n, d) párokkal létezik megoldása $(n, d) \in \{(-12, 7), (-4, 3)\}$.

A fenti (3.1) egyenletet $l = 2$ esetén vizsgálva azt kapjuk, hogy a számítási sorozat tagjai is "közel" teljes négyzetszámok, azaz

$$n + id = a_i x_i^2 \text{ minden } 0 \leq i < k \quad (3.2)$$

adódik, ahol az a_i egészek már négyzetmentesek és $P(a_i) \leq \max(P(b), k-1)$. Az egyenlet minden megoldásához tartozik egy ilyen $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ együttható lista. Egy ilyen együttható lista inverzén az $(a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0)$ listát értjük.

Tétel (Hirata-Kohno, Laishram, Shorey, Tijdeman). *Tekintsük a (3.1) egyenletet $l = 2, d > 1, P(b) = k$ és $7 \leq k \leq 100$ feltételekkel. Ekkor a következő együttható listák vagy azok inverzei esetében létezhetnek megoldások.*

$$k = 7 : \quad (2, 3, 1, 5, 6, 7, 2), (3, 1, 5, 6, 7, 2, 1), (1, 5, 6, 7, 2, 1, 10),$$

$$k = 13 : \quad (3, 1, 5, 6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15), \\ (1, 5, 6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15, 1),$$

$$k = 19 : \quad (1, 5, 6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15, 1, 17, 2, 19, 5, 21, 22),$$

$$k = 23 : \quad (5, 6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15, 1, 17, 2, 19, 5, 21, 22, 23, 6, 1, 26, 3), \\ (6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15, 1, 17, 2, 19, 5, 21, 22, 23, 6, 1, 26, 3, 7).$$

Tengely megoldotta a kimaradó eseteket, igazolva a következő állítást.

3.2. Tétel. *A (3.1) egyenletnek az $l = 2, d > 1, P(b) = k$ és $7 \leq k \leq 100$ feltételek mellett nincs megoldása.*

Az eredmények igazolásához algebrai számelméleti eszközökre és az elliptikus Chabauty-módszer [18],[19] alkalmazására volt szükség. Például az $(a_0, a_1, \dots, a_6) = (1, 5, 6, 7, 2, 1, 10)$ együttható lista esetében a következő egyenletrendszerre jutunk

$$\begin{aligned}x_5^2 + 4x_0^2 &= 25x_1^2, \\4x_5^2 + x_0^2 &= 10x_4^2, \\6x_5^2 - x_0^2 &= 50x_6^2.\end{aligned}$$

A Gauss egészek körében történő faktorizáció segítségével számtest feletti elliptikus görbe speciális pontjainak a meghatározására redukálódik a probléma. Ebben az esetben a görbék:

$$C_\delta: \quad \delta(X + i)(X + 4i)(3X^2 - 2) = Y^2, \quad (3.3)$$

ahol $\delta \in \{-3 \pm i, -1 \pm 3i, 1 \pm 3i, 3 \pm i\}$. Megjegyezzük, hogy ha (X, Y) egy megfelelő pont $(X \in \mathbb{Q}$ és $Y \in \mathbb{Q}(i))$ a C_δ görbén, akkor (X, iY) egy megfelelő pont a $C_{-\delta}$ görbén. Így elegendő a $\delta \in \{1 - 3i, 1 + 3i, 3 - i, 3 + i\}$ eseteket vizsgálni.

1. $\delta = 1 - 3i$. Ekkor C_{1-3i} izomorf az

$$E_{1-3i}: \quad y^2 = x^3 + ix^2 + (-17i - 23)x + (2291i + 1597)$$

elliptikus görbével, amelynek a rangja nulla és nincs olyan pont, amelyre $X \in \mathbb{Q}$.

2. $\delta = 1 + 3i$. Szintén nulla rangú elliptikus görbét kapunk és itt sem adódik megoldáshoz vezető pont.
3. $\delta = 3 - i$. Az elliptikus görbe ekkor $E_{3-i}: y^2 = x^3 + x^2 + (-17i + 23)x + (-1597i - 2291)$, és a Mordell-Weil csoportra $E_{3-i}(\mathbb{Q}(i)) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ adódik. Az elliptikus Chabauty-módszert alkalmazva a $p = 13$ választással kapjuk, hogy $x_5/z = -3$. Így tehát $n = 2$ és $d = 1$.
4. $\delta = 3 + i$. Ekkor ismét egy rangú elliptikus görbét kapunk és az elliptikus Chabauty-módszerrel $x_5/z = 3$.

Az előző probléma egy változatát vizsgálta Laishram, Shorey és Tengely a [57] dolgozatban. A számítási sorozat egymást követő tagjai közül néhányat törölünk a szorzatból és továbbra is olyan sorozatokat keresünk, amelyeknél ez a szorzat közel teljes négyzetszámot eredményez. Nézzük a probléma pontosabb megfogalmazását.

Legyen $k \geq 4$, $t \geq k - 2$ és $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_t$ egészek, amelyekre $0 \leq \gamma_i < k$ minden $1 \leq i \leq t$ esetén. Jelölje ψ a $k - t$ különbséget, b legyen egy négyzetmentes egész, amelyre $P(b) \leq k$. A probléma ekkor a következő egyenletre vezet

$$\Delta = \Delta(n, d, k) = (n + \gamma_1 d) \cdots (n + \gamma_t d) = by^2. \quad (3.4)$$

Az egyenlettel foglalkozó korábbi eredményekkel kapcsolatban itt a [86], [69] és a [94] publikációkat említenénk.

A [57] cikkben a következő két állítás lett igazolva.

3.3. Tétel. *Legyen $\psi = 1$, $k \geq 7$ és $d \nmid n$. Ekkor a (3.4) egyenletnek nincs megoldása, ha $\omega(d) = 1$, ahol $\omega(d)$ jelöli d különböző prímosztóinak a számát.*

A tétel alapján könnyen adódik, hogy a fenti egyenletnek nincs megoldása, ha $\psi = 0$, $k \geq 7$, $d \nmid n$, $P(b) \leq p_{\pi(k)+1}$ és $\omega(d) = 1$. Amennyiben $k \geq 11$ a $P(b) \leq p_{\pi(k)+1}$ feltétel javítható, ami a következő eredményre vezet.

3.4. Tétel. *Legyen $\psi = 0$, $k \geq 11$ és $d \nmid n$. Tegyük fel, hogy $P(b) \leq p_{\pi(k)+2}$. Ekkor a (3.4) egyenletnek nincs megoldása, ha $\omega(d) = 1$.*

A fejezet hátralévő részében a (3.1) egyenlettel foglalkozunk az $l = 3$ esetben és bemutatjuk Hajdu, Tengely és Tijdeman [49] publikációban bizonyított eredményeit.

A vizsgált diofantikus egyenlet a következő

$$n(n + d) \cdots (n + (k - 1)d) = by^3, \quad (3.5)$$

ahol $n, d, k, b, y \in \mathbb{Z}$ és $k \geq 3$, $d > 0$, $(n, d) = 1$, $P(b) \leq k$, $n \neq 0$, $y \neq 0$. A dolgozat egyik tétele az alábbi.

3.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy (n, d, k, b, y) megoldása a (3.5) egyenletnek, amelyre $k < 32$ és $P(b) < k$ ha $k = 3$ vagy $k \geq 13$. Ekkor (n, d, k) a következő listában*

szereplő elemek közül kerülhet ki:

$$\begin{aligned} (n, 1, k) \text{ ahol } -30 \leq n \leq -4 \text{ vagy } 1 \leq n \leq 5, \\ (n, 2, k) \text{ ahol } -29 \leq n \leq -3, \\ (-10, 3, 7), (-8, 3, 7), (-8, 3, 5), (-4, 3, 5), (-4, 3, 3), (-2, 3, 3), \\ (-9, 5, 4), (-6, 5, 4), (-16, 7, 5), (-12, 7, 5). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a tétel állítása $k < 12$ és $P(b) \leq P_k$ ahol $P_3 = 2$, $P_4 = P_5 = 3$, $P_6 = P_7 = P_8 = P_9 = P_{10} = P_{11} = 5$ esetekben következik Bennett, Bruin, Győry és Hajdu [8] publikációban közölt eredményéből.

A $b = 1$ speciális esetben Hajdu, Tengely és Tijdeman belátták a következő állítást.

3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy (n, d, k, y) megoldása a (3.5) egyenletnek, amelyre $b = 1$ és $k < 39$. Ekkor*

$$(n, d, k, y) = (-4, 3, 3, 2), (-2, 3, 3, -2), (-9, 5, 4, 6) \text{ vagy } (-6, 5, 4, 6).$$

A fenti eredmények igazolásánál kihasználjuk, hogy a sorozat tagjaira teljesül, hogy

$$n + id = a_i x_i^3 \quad (i = 0, 1, \dots, k-1) \quad (3.6)$$

ahol $P(a_i) \leq k$ és a_i nem osztható prímszám teljes köbével. A bizonyításban fel lettek használva Selmer [89] eredményei bizonyos diofantikus egyenletekkel kapcsolatban.

3.1. Lemma. *A következő diofantikus egyenleteknek nem létezik $x, y, z, xyz \neq 0$ egész megoldása*

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= cz^3, \quad c \in \{1, 2, 4, 5, 10, 25, 45, 60, 100, 150, 225, 300\}, \\ ax^3 + by^3 &= z^3, \quad (a, b) \in \{(2, 9), (4, 9), (4, 25), (4, 45), (12, 25)\}. \end{aligned}$$

Ezen felül különféle kongruencia tesztek kombinatorikus alkalmazása tette lehetővé nagy számú együtttható listák eliminálását, amelyeknél nem létezhet megfelelő számítási sorozat. A kimaradó együtttható listákat külön meg kellett vizsgálni és Selmer eredményeit vagy pedig az elliptikus Chabauty-módszert alkalmazva ki lehetett zárni vagy pedig a megoldásokat megadni. A nagyobb k értékeknél a kongruencia tesztek segítségével sikerült indukciót is alkalmazni és a korábban igazolt eredmények segítségével együtttható listákat kezelni. Így a kombinatorikus robbanás kezelése elérhetővé vált nagyobb k értékek esetében is. Tekintsünk néhány példát a fentiekre.

Legyen $k = 5$. Ekkor könnyen igazolható, hogy az

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 1, 10, 1)$$

együtthető lista nem vezethet megoldáshoz modulo 7. Szintén egyszerűen adódik, hogy az

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 15, 1, 1)$$

együtthető lista kizárható modulo 9. Viszont az

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 3, 4, 5, 6)$$

együtthető lista esetében sem modulo 7 sem modulo 9 nem kapunk ellentmondást. Selmer eredményei itt segítenek, felhasználva a $4(n + d) - 3n = n + 4d$ azonosságot kapjuk, hogy $n = 2$ és $d = 1$. Az előző gondolatmenettel minden együtthető lista kezelhető kivéve az

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 9, 2, 5, 12).$$

Ebben az esetben

$$x_0^3 + x_2^3 = 9x_1^3 \text{ és } x_0^3 - 2x_2^3 = -6x_4^3.$$

A $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ számtestben dolgozva kapjuk, hogy

$$(x_0 - \alpha x_2)(x_0^2 - x_0 x_2 + x_2^2) = (-3\alpha + 6)z^3.$$

Ez számtest feletti elliptikus görbére vezet. Ezen görbén kell meghatározni azon pontokat, ahol az első koordináta racionális értéket vesz fel, ezt az elliptikus Chabauty-módszer segítségével tehetjük meg.

3.2. Lemma. *Legyen $\alpha = \sqrt[3]{2}$ és $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Ekkor a*

$$C_1 : X^3 - (\alpha + 1)X^2 + (\alpha + 1)X - \alpha = (-3\alpha + 6)Y^3$$

görbén csak az $(X, Y) = (2, 1)$ pont tesz eleget annak a feltételnek, hogy $X \in \mathbb{Q}$ és $Y \in K$.

Számtani sorozatot alkotó teljes hatványok

Ebben a fejezetben a [17] dolgozatban szereplő, Bruinnal, Győryvel és Hajduval közösen nyert és a [48] cikkben igazolt, Hajduval közös eredmények kerülnek bemutatásra.

Már Fermat megfogalmazta a sejtést, hogy négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot, ezt később Euler be is bizonyította ([33] 440. és 635. oldal). Legyen $n \geq 3$ és X^n, Z^n, Y^n egy számtani sorozat három egymást követő tagja. Ekkor a következő diofantikus egyenlethez jutunk:

$$X^n + Y^n = 2Z^n.$$

Az egyenlet megoldása $n = 3$ esetben már Mordell könyvében [68] megtalálható. Az $n = 5$ eset vizsgálata pedig Dirichlet és Lebesgue (lásd [33] 735. és 738. oldal) eredményei alapján kezelhető. Dénes [32] ért el később jelentős eredményt megoldva az egyenletet az $n \leq 31$ esetekben. Végül Darmon és Merel [29], felhasználva a Fermat-egyenlet megoldásánál is alkalmazott moduláris módszert, megmutatta, hogy a triviális esetektől eltekintve nem létezik három elemű számtani sorozat teljes hatványokból.

A homogén hatványokról most térjünk át egy még általánosabb esetre, tekintsük az

$$a_0x_0^{n_0}, a_1x_1^{n_1}, \dots, a_{k-1}x_{k-1}^{n_{k-1}} \quad (4.1)$$

alakú számtani sorozatokat, ahol $a_i, x_i \in \mathbb{Z}, n_i \geq 2$ és a_i prímosztói korlátosak, azaz $P(a_i) \leq P$ valamilyen P -re. Plusz feltételek nélkül k értéke nem korlátozható, ahogyan azt Hajdu [47] konstrukciója is mutatja. Az n_i kitevők és (a_0x_0, a_1x_1) korlátozásával már kezelhetőbbé válik a probléma. Vegyes hatványok esetében az egyik alkalmazható mély eszközt Darmon és Granville [28] eredménye jelenti, amelyben az általánosított Fermat-egyenlettel foglalkoznak. Ineffektív formában végeességet biztosítanak az

$$AX^p + BY^q = CZ^r, \quad ABC \neq 0$$

egyenlettel kapcsolatban, ha

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

A (4.1) alakú számtani sorozatokkal kapcsolatban először tekintsük Hajdu [47] egy eredményét.

4.1. Tétel (Hajdu). *Legyen $L \geq 2$ egy rögzített egész. Ekkor bármely (4.1) alakú számtani sorozat esetében, ahol $n_i \leq L, (i = 0, 1, \dots, k-1)$, létezik csak L és P értékétől függő $C(L, P)$ konstans úgy, hogy $k \leq C(L, P)$.*

A [17] dolgozatban Bruin, Győry, Hajdu és Tengely a következő tételt igazolták.

4.2. Tétel. *Legyen $k \geq 4$ és $L \geq 2$ egy rögzített egész. Ekkor csak véges sok (4.1) alakú számtani sorozat létezik, melyre $n_i \leq L, a_i = 1, (i = 0, 1, \dots, k-1)$ és $(x_0, x_1) = 1$.*

A tétel bizonyításában olyan mély eszközök alkalmazása volt szükséges, mint a korábban már említett eredménye Darmonnak és Granvillenek és Faltings [36] dolgozata a Mordell-sejtés bizonyításáról.

Amennyiben $n_i \in \{2, 3\}$ még több bizonyítható, ebben az esetben a [17] dolgozatban az összes megoldást megadta Bruin, Győry, Hajdu és Tengely.

4.3. Tétel. *Legyen $k \geq 4, (x_0, x_1) = 1, a_i = 1, n_i \in \{2, 3\}$ minden $i = 0, 1, \dots, k-1$ esetén. Ekkor a (4.1) számtani sorozat csak a triviális $1, 1, \dots, 1$ és $-1, -1, \dots, -1$ sorozatok egyike lehet.*

Megjegyezzük, hogy a $(x_0, x_1) = 1$ feltétel szükséges, ahogyan azt a következő példák is igazolják.

- Legyen $(n_0, n_1, n_2, n_3) = (2, 2, 2, 3)$. Ekkor

$$((u^2 - 2uv - v^2)f(u, v))^2, ((u^2 + v^2)f(u, v))^2, ((u^2 + 2uv - v^2)f(u, v))^2, (f(u, v))^3$$

egy számtani sorozat négy egymást követő tagja, ahol $u, v \in \mathbb{Z}$ és $f(u, v) = u^4 + 8u^3v + 2u^2v^2 - 8uv^3 + v^4$.

- Legyen $(n_0, n_1, n_2, n_3) = (2, 2, 3, 2)$. Ekkor

$$((u^2 - 2uv - 2v^2)g(u, v))^2, ((u^2 + 2v^2)g(u, v))^2, (g(u, v))^3, ((u^2 + 4uv - 2v^2)g(u, v))^2$$

számtani sorozatot alkot, ahol $u, v \in \mathbb{Z}$ és $g(u, v) = u^4 + 4u^3v + 8u^2v^2 - 8uv^3 + 4v^4$.

A tétel állításának igazolásához a már ismert eredményeken felül a klasszikus Chabauty-módszer és az elliptikus Chabauty-módszer került alkalmazásra. Ezt az egyik eset bemutatásával illusztráljuk. Tekintsük az $x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^3$ alakú sorozatot. Ekkor

$$2x_2^2 - x_2^2 = x_3^3.$$

Az egyenlet parametrikus megoldása

$$x_1 = \pm(x^3 + 6xy^2), \quad x_2 = \pm(3x^2y + 2y^3)$$

vagy

$$x_1 = \pm(x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 4y^3), \quad x_2 = \pm(x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + 2y^3),$$

ahol x, y relatív prím egészek. Felhasználva, hogy $x_0^2 = 2x_1^2 - x_2^2$ adódik a következő egyenlet:

$$x_0^2 = 2x^6 + 15x^4y^2 + 60x^2y^4 - 4y^6.$$

Ez az egyenlet elliptikus görbére vezet, amelynek nincs affin racionális pontja. A második parametrizációból az

$$x_0^2 = x^6 + 18x^5y + 75x^4y^2 + 120x^3y^3 + 120x^2y^4 + 72xy^5 + 28y^6$$

egyenlet adódik. Itt az $y = 0$ eset könnyen látható módon a triviális $1, 1, 1, 1$ sorozatra vezet. Az $y \neq 0$ esetben legyen $Y = x_0/y^3$, $X = x/y$. Így az előző egyenlet a

$$C_1 : Y^2 = X^6 + 18X^5 + 75X^4 + 120X^3 + 120X^2 + 72X + 28$$

génusz kettes görbét eredményezi. Itt a klasszikus Chabauty-módszert [24] alkalmazzuk és az ezzel kapcsolatos algoritmusokat, amelyek Stolltól [102] származnak és a MAGMA programcsomagban megtalálhatóak. Először is szükségünk van a $\mathcal{J}(\mathbb{Q})$ Mordell-Weil csoportjával kapcsolatos információkra. A torziós részcsoport triviális, ami egyszerűen adódik abból, hogy a rendje osztja a $(\#\mathcal{J}(\mathbb{F}_5), \#\mathcal{J}(\mathbb{F}_7)) = (21, 52) = 1$ értéket. A Mordell-Weil csoport rangjáról megmutatható, hogy eggyel egyenlő és $D = [\infty^+ - \infty^-]$ egy végtelen rendű elem. A klasszikus Chabauty-módszert alkalmazva a $p = 29$ választással kapjuk, hogy legfeljebb két darab racionális pont lehet a görbén, ennyit pedig ismerünk is, így több racionális pont nem lehet a görbén, azaz $C_1(\mathbb{Q}) = \{\infty^+, \infty^-\}$.

Most rátérünk a Hajdu és Tengely által [48] publikációban igazolt állítások bemutatására. A cikkben olyan $x_0^{n_0}, x_1^{n_1}, \dots, x_{k-1}^{n_{k-1}}$ alakú számítási sorozatok vizsgálatával találkozunk, ahol $(x_0, x_1) = 1$ és $n_i \in \{2, n\}, \{2, 5\}$ vagy $\{3, n\}$. A különböző esetekre bizonyított tételeket az alábbiakban ismertetjük.

4.4. Tétel. Legyen n egy prím és $x_0^{n_0}, x_1^{n_1}, \dots, x_{k-1}^{n_{k-1}}$ egy nem konstans számtani sorozat, amelyre $(x_0, x_1) = 1, x_i \in \mathbb{Z}, n_i \in \{2, n\}$ minden $i = 0, 1, \dots, k-1$ értékre. Ekkor $k \leq 5$, továbbá, ha $k = 5$, akkor

$$(n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (2, n, n, 2, 2, 2), (2, 2, 2, n, n, 2).$$

Az $n = 5$ speciális esetben élesebb állítás is igaz.

4.5. Tétel. Legyen $x_0^{n_0}, x_1^{n_1}, \dots, x_{k-1}^{n_{k-1}}$ egy nem konstans számtani sorozat, amelyre $(x_0, x_1) = 1, x_i \in \mathbb{Z}, n_i \in \{2, 5\}$ minden $i = 0, 1, \dots, k-1$ értékre. Ekkor $k \leq 3$, továbbá, ha $k = 3$, akkor

$$(n_0, n_1, n_2, n_3) = (2, 2, 2, 5), (5, 2, 2, 2).$$

Megjegyezzük, hogy a tételben szereplő két kivételes esetben Siksek és Stoll [99] a közelmúltban megmutatták, hogy csak a triviális $1, 1, 1, 1$ sorozat létezik. Visszavezették a problémát génusz 4 görbék racionális pontjainak vizsgálatára. Tekintsük most az $n_i \in \{3, n\}$ esetre vonatkozó állítást.

4.6. Tétel. Legyen n egy prím és $x_0^{n_0}, x_1^{n_1}, \dots, x_{k-1}^{n_{k-1}}$ egy nem konstans számtani sorozat, amelyre $(x_0, x_1) = 1, x_i \in \mathbb{Z}, n_i \in \{3, n\}$ minden $i = 0, 1, \dots, k-1$ értékre. Ekkor $k \leq 3$, továbbá, ha $k = 3$, akkor

$$(n_0, n_1, n_2, n_3) = (3, 3, n, n), (n, n, 3, 3), (3, n, n, 3), (n, 3, 3, n).$$

A bizonyításban felhasználjuk az alábbi, moduláris módszer segítségével igazolt tételeket.

Tétel. Legyen n egy prím. Ekkor az

$$X^n + Y^n = 2Z^2 \quad (n \geq 5),$$

$$X^n + Y^n = 3Z^2 \quad (n \geq 5),$$

$$X^n + 4Y^n = 3Z^2 \quad (n \geq 7)$$

diófantikus egyenleteknek nem létezik páronként relatív prím (X, Y, Z) megoldása, amelyre $XY \neq \pm 1$.

A tételben szereplő állítások Bennett és Skinner [9], illetve Bruin [16] eredményeiből következnek. Az X^n, Z^3, Y^n alakú számtani sorozatok esetében a következő, Bennett, Vatsal és Yazdani [10] által bizonyított tétel igaz.

Tétel. Legyen $n \geq 5$ egy prím. Ekkor az

$$X^n + Y^n = 2Z^3$$

diófantikus egyenletnek nem létezik relatív prím X, Y, Z megoldása, amelyre $XYZ \neq 0, \pm 1$.

Az X^n, Z^n, Y^n alakú sorozatok esetében pedig a korábban már említett, Darmon és Merel [29] dolgozatában található eredményt használhatjuk.

Tétel. *Legyen $n \geq 3$ egy prím. Ekkor az*

$$X^n + Y^n = 2Z^n$$

diofantikus egyenletnek nem létezik relatív prím X, Y, Z megoldása, amelyre $XYZ \neq 0, \pm 1$.

Az X^3, Z^n, Y^3 alakú számtani sorozatokkal kapcsolatban Hajdu és Tengely belátta a következő állítást.

4.7. Tétel. *Legyen $n \geq 3$ egy prím. Ekkor az*

$$X^3 + Y^3 = 2Z^n$$

diofantikus egyenletnek nem létezik relatív prím X, Y, Z megoldása, amelyre $XYZ \neq 0, \pm 1$ és $3 \nmid Z$.

Az előző eredmények hasznos segítséget jelentenek az $n_i \in \{2, n\}, \{3, n\}$ esetek vizsgálatakor. Az $n_i \in \{2, 5\}$ esetre vonatkozó tétel bizonyításához a problémát bizonyos számtest feletti elliptikus görbe speciális alakú pontjainak meghatározására vezetjük vissza algebrai számelméleti módszerekkel. Az elliptikus Chabauty-módszer segítségével pedig meghatározzuk a racionális első koordinátával rendelkező pontokat, amelyekből vissza tudjuk fejteni az eredeti probléma lehetséges megoldásait. Az itt felhasznált és bizonyított állítások a következők.

4.1. Lemma. *Legyen $\alpha = \sqrt[5]{2}$ és $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Ekkor a*

$$C_1: \quad \alpha^4 X^4 + \alpha^3 X^3 + \alpha^2 X^2 + \alpha X + 1 = (\alpha - 1)Y^2 \quad (4.2)$$

és

$$C_2: \quad \alpha^4 X^4 - \alpha^3 X^3 + \alpha^2 X^2 - \alpha X + 1 = (\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + 1)Y^2 \quad (4.3)$$

algebrai görbéken azon pontok, amelyekre $X \in \mathbb{Q}, Y \in K$ a következők

$$(X, Y) = (1, \pm(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)), \left(-\frac{1}{3}, \pm \frac{3\alpha^4 + 5\alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 5}{9} \right)$$

a C_1 görbe esetében és $(X, Y) = (1, \pm 1)$ a C_2 görbe esetében.

4.2. Lemma. *Legyen $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$ és $L = \mathbb{Q}(\beta)$. Ekkor a*

$$C_3: \quad X^4 + (8\beta - 12)X^3 + (16\beta - 30)X^2 + (8\beta - 12)X + 1 = Y^2 \quad (4.4)$$

algebrai görbén egyedül az $(X, Y) = (0, \pm 1)$ pontokra teljesül, hogy $X \in \mathbb{Q}$ és $Y \in L$.

Algebrai görbék pontjaival kapcsolatos eredmények

Ebben a fejezetben a [105] dolgozatban szereplő és a [22] cikkben megjelent, Bugeaudval, Mignotteval, Siksekkal és Stoll-lal közös eredmények kerülnek bemutatásra.

A fejezet első részében bemutatjuk a [105] publikációban található eredményeket, amelyek geometriai problémával összefüggő diofantikus egyenletekkel kapcsolatosak. Az irodalomban jelentős számú geometriai háttérű diofantikus probléma található. Az egyik jól ismert a derékszögű háromszögek oldalaival kapcsolatos Pitagorasz-tétel, azaz a derékszögű háromszög oldalaira teljesül, hogy $a^2 + b^2 = c^2$.

Már egy régi arab kézirat is foglalkozott az úgynevezett kongruens számok problémájával, azaz olyan derékszögű háromszögek megadásával, amelyeknek az oldalaiknak hossza racionális szám, a területük pedig egész. Például 6 kongruens szám, mert a $(3, 4, 5)$ hosszú oldalakkal rendelkező derékszögű háromszög területe 6. Fibonacci fogalmazta meg azt az állítást, hogy 1 nem kongruens szám. Az állítást később Fermat igazolta, a végtelen leszállás módszerének segítségével. A jelenleg ismert legpontosabb általános eredményt Tunnell bizonyította [111] a moduláris módszert felhasználva.

Az egész oldalhosszúságú háromszögek közül azokat, amelyeknek a területe is egész szám, Hérón-féle háromszögeknek nevezzük. Az ilyen típusú háromszögekkel kapcsolatban is több eredmény található az irodalomban, például a [51] és a [39] cikkekben, további információk és megoldatlan problémák a [40] könyvben szerepelnek.

Petulante és Kaja [76] megadták azon egész oldalú háromszögeknek a parametrizációját, amelyekben egy adott szög koszinusza racionális, azaz meghatározták az $u^2 - 2\alpha uv + v^2 = 1$ görbe racionális parametrizációját, ahol α jelöli a racionális koszinusz értékét.

Bertalan Zoltán olyan egész x, y értékeket keresett, amelyekre teljesül, hogy ha egy óra kismutatójának hossza x , nagymutatójáé pedig y , akkor a két mutató távolabbi végpontjainak távolsága (i) 2 órákor és 3 órákor ((ii) 2 órákor és 4 órákor) is egész érték legyen. Legyenek $\varphi_1 = \cos(\alpha)$ és $\varphi_2 = \cos(\beta)$, ahol α, β a két mutató által bezárt szögek a vizsgált időpontokban. Ekkor a koszinusz-tétel alapján

$$\begin{aligned}x^2 - 2\varphi_1 xy + y^2 &= z_\alpha^2, \\x^2 - 2\varphi_2 xy + y^2 &= z_\beta^2,\end{aligned}$$

itt z_α és z_β jelöli az adott szöggel szemközti oldal hosszát. A két egyenlet összeszorozása után a következő algebrai görbét kapjuk:

$$C_{\alpha,\beta} : X^4 - 2(\varphi_1 + \varphi_2)X^3 + (4\varphi_1\varphi_2 + 2)X^2 - 2(\varphi_1 + \varphi_2)X + 1 = Y^2,$$

ahol $X = x/y$ és $Y = z_\alpha z_\beta / y^2$. Tengely a [105] dolgozatában megoldotta a Bertalan Zoltán által felvetett problémákat. Például igazolta, hogy az (i) esetben végtelen sok megoldás létezik, mivel a kapcsolódó algebrai görbe 1 rangú elliptikus görbére vezet. Néhány megoldás:

x	y	$z_{\pi/3}$	$z_{\pi/2}$
8	15	13	17
1768	2415	2993	3637
10130640	8109409	9286489	12976609
498993199440	136318711969	517278459169	579309170089

A fejezet hátralévő részében a [22] publikáció eredményeit tárgyaljuk. Legyen $C : Y^2 = a_n X^n + \dots + a_0 := f(X)$ egy hiperelliptikus görbe, ahol $a_i \in \mathbb{Z}, n \geq 5$ és az f polinom irreducibilis. Ilyen görbék esetében Baker [7] igazolta, hogy a görbén található (X, Y) egész pontokra

$$\max(|X|, |Y|) \leq \exp \exp \exp \{(n^{10n} H)^{n^2}\},$$

ahol $H = \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\}$. A korlátot később többen élesítették, így például Sprindžuk [101], Brindza [13], Schmidt [88], Poulakis [79], Bilu [11], Bugeaud [23] és Voutier [112]. A Baker-módszer segítségével tehát az egész pontok méretére korlát adható, ezt kombinálva a Mordell-Weil szitával adott görbe esetében igazolható, hogy az ismert egész pontokon felül nincs más. Ez a módszer került tárgyalásra a dolgozatban, illusztrációként pedig két konkrét problémára alkalmazták sikerrel.

5.1. Tétel. Az

$$Y^2 - Y = X^5 - X \quad (5.1)$$

diofantikus egyenlet egész megoldásai:

$$(X, Y) = (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, -5), \\ (2, 6), (3, -15), (3, 16), (30, -4929), (30, 4930).$$

5.2. Tétel. Az

$$\begin{pmatrix} Y \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 5 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

diofantikus egyenlet egész megoldásai:

$$(X, Y) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1), \\ (5, -1), (5, 2), (6, -3), (6, 4), (7, -6), (7, 7), (15, -77), \\ (15, 78), (19, -152), (19, 153).$$

Az

$$Y^p - Y = X^q - X, \quad 2 \leq p < q. \quad (5.3)$$

egyenlettel kapcsolatban Mordell [67] igazolta, hogy ha $p = 2$, $q = 3$, akkor

$$(X, Y) = (0, 0), (0, 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, 1), (2, 3), (2, -2), (6, 15), (6, -14).$$

Fielder és Alford [37] a következő $X, Y > 1$ megoldásokat adták meg:

$$(p, q, X, Y) = (2, 3, 2, 3), (2, 3, 6, 15), (2, 5, 2, 6), (2, 5, 3, 16), \\ (2, 5, 30, 4930), (2, 7, 5, 280), (2, 13, 2, 91), (3, 7, 3, 13).$$

Mignotte és Pethő [66] igazolta, hogy adott p és q esetén, ahol $2 \leq p < q$, csak véges sok egész megoldás létezik. Továbbá, ha feltesszük az *abc*-sejtést, akkor az (5.3) egyenletnek csak véges sok egész $X, Y > 1$ megoldása létezik.

Az (5.2) egyenlet speciális esete az

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

diofantikus egyenletnek. A $2 \leq k \leq n/2$ és $2 \leq l \leq m/2$ kikötések mellett az ismert megoldások a következők:

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 56 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 120 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 21 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 153 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 78 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 221 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_{2i+2}F_{2i+3} \\ F_{2i}F_{2i+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{2i+2}F_{2i+3} - 1 \\ F_{2i}F_{2i+3} + 1 \end{pmatrix} \text{ for } i = 1, 2, \dots,$$

ahol F_n Fibonacci számok sorozata. Ismert a [31] dolgozatból, hogy nincs több megoldás, ha $\binom{n}{k} \leq 10^{30}$ vagy $n \leq 1000$. A végtelen megoldás család Lind [59] és Singmaster [100] publikációiban lett közölve. Az (5.4) diofantikus egyenlet összes megoldása meghatározásra került, ha

$$(k, l) = (2, 3), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 4), (3, 6), (4, 6), (4, 8).$$

Ezen esetekben a probléma visszavezethető elliptikus görbékre vagy Thue egyenletekre. Avanesov 1966-ban [6] megoldotta az (5.4) egyenletet, amikor $(k, l) = (2, 3)$. De Weger [30] és tőle függetlenül Pintér [78] megoldotta a $(k, l) = (2, 4)$ esetet. A $(k, l) = (3, 4)$ párnál az egyenlet az $Y(Y + 1) = X(X + 1)(X + 2)$ görbére vezet, amely megoldásait Mordell [67] határozta meg. A fennmaradó $(2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 6), (4, 8)$ esetekben a megoldásokat Stroeker és de Weger [103] adta meg. A (5.4) egyenlettel kapcsolatban általános végességi tételt nyert 1988-ban Kiss [53]. Igazolta, hogy ha $k = 2$ és l adott páratlan prím, akkor csak véges sok pozitív megoldás létezik. Felhasználva a Baker-módszert, Brindza [14] megmutatta, hogy az (5.4) egyenletnek $k = 2$ és $l \geq 3$ mellett csak véges sok pozitív megoldása van.

Irodalomjegyzék

- [1] F. S. Abu Muriefah, F. Luca, S. Siksek, and Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2 + C = 2y^n$. *Int. J. Number Theory*, 5(6):1117–1128, 2009.
- [2] S. A. Arif and F. S. A. Muriefah. On the Diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 20(2):299–304, 1997.
- [3] S. A. Arif and F. S. A. Muriefah. The Diophantine equation $x^2 + 3^m = y^n$. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 21(3):619–620, 1998.
- [4] S. A. Arif and F. S. A. Muriefah. On the Diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$. II. *Arab J. Math. Sci.*, 7(2):67–71, 2001.
- [5] S. A. Arif and F. S. A. Muriefah. On the Diophantine equation $x^2 + q^{2k+1} = y^n$. *J. Number Theory*, 95(1):95–100, 2002.
- [6] È. T. Avanesov. Solution of a problem on figurate numbers. *Acta Arith.*, 12:409–420, 1966/1967.
- [7] A. Baker. Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 65:439–444, 1969.
- [8] M. A. Bennett, N. Bruin, K. Győry, and L. Hajdu. Powers from products of consecutive terms in arithmetic progression. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 92(2):273–306, 2006.
- [9] M.A. Bennett and C.M. Skinner. Ternary Diophantine equations via Galois representations and modular forms. *Canad. J. Math.*, 56(1):23–54, 2004.
- [10] M.A. Bennett, V. Vatsal, and S. Yazdani. Ternary Diophantine equations of signature $(p, p, 3)$. *Compos. Math.*, 140(6):1399–1416, 2004.

- [11] Yu. Bilu. Effective analysis of integral points on algebraic curves. *Israel J. Math.*, 90(1-3):235–252, 1995.
- [12] Yu. Bilu, G. Hanrot, and P. M. Voutier. Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers. *J. Reine Angew. Math.*, 539:75–122, 2001. With an appendix by M. Mignotte.
- [13] B. Brindza. On S -integral solutions of the equation $y^m = f(x)$. *Acta Math. Hungar.*, 44(1-2):133–139, 1984.
- [14] B. Brindza. On a special superelliptic equation. *Publ. Math. Debrecen*, 39(1-2):159–162, 1991.
- [15] B. Brindza, L. Hajdu, and I. Z. Ruzsa. On the equation $x(x + d) \cdots (x + (k - 1)d) = by^2$. *Glasg. Math. J.*, 42(2):255–261, 2000.
- [16] N. Bruin. Some ternary Diophantine equations of signature $(n, n, 2)$. In *Discovering mathematics with Magma*, volume 19 of *Algorithms Comput. Math.*, pages 63–91. Springer, Berlin, 2006.
- [17] N. Bruin, K. Győry, L. Hajdu, and Sz. Tengely. Arithmetic progressions consisting of unlike powers. *Indag. Math. (N.S.)*, 17(4):539–555, 2006.
- [18] N. R. Bruin. *Chabauty methods and covering techniques applied to generalized Fermat equations*, volume 133 of *CWI Tract*. Stichting Mathematisch Centrum Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 2002. Dissertation, University of Leiden, Leiden, 1999.
- [19] Nils Bruin. Chabauty methods using elliptic curves. *J. Reine Angew. Math.*, 562:27–49, 2003.
- [20] Y. Bugeaud. On the Diophantine equation $x^2 - p^m = \pm y^n$. *Acta Arith.*, 80(3):213–223, 1997.
- [21] Y. Bugeaud, M. Mignotte, and S. Siksek. Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations. II. The Lebesgue–Nagell equation. *Compos. Math.*, 142(1):31–62, 2006.
- [22] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, M. Stoll, and Sz. Tengely. Integral points on hyperelliptic curves. *Algebra Number Theory*, 2(8):859–885, 2008.
- [23] Yann Bugeaud. Bounds for the solutions of superelliptic equations. *Compositio Math.*, 107(2):187–219, 1997.

- [24] C. Chabauty. Sur les points rationnels des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 212:882–885, 1941.
- [25] J. H. E. Cohn. The Diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$. *Arch. Math. (Basel)*, 59(4):341–344, 1992.
- [26] J. H. E. Cohn. The Diophantine equation $x^2 + C = y^n$. *Acta Arith.*, 65(4):367–381, 1993.
- [27] J. H. E. Cohn. The Diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$. II. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 22(3):459–462, 1999.
- [28] H. Darmon and A. Granville. On the equations $z^m = F(x, y)$ and $Ax^p + By^q = Cz^r$. *Bull. London Math. Soc.*, 27(6):513–543, 1995.
- [29] H. Darmon and L. Merel. Winding quotients and some variants of Fermat's last theorem. *J. Reine Angew. Math.*, 490:81–100, 1997.
- [30] B. M. M. de Weger. A binomial Diophantine equation. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 47(186):221–231, 1996.
- [31] Benjamin M. M. de Weger. Equal binomial coefficients: some elementary considerations. *J. Number Theory*, 63(2):373–386, 1997.
- [32] P. Dénes. Über die Diophantische Gleichung $x^l + y^l = cz^l$. *Acta Math.*, 88:241–251, 1952.
- [33] L.E. Dickson. *History of the theory of numbers. Vol II: Diophantine analysis*. Chelsea Publishing Co., New York, 1966.
- [34] P. Erdős. Note on the product of consecutive integers (II). *J. London Math. Soc.*, 14:245–249, 1939.
- [35] P. Erdős and J. L. Selfridge. The product of consecutive integers is never a power. *Illinois J. Math.*, 19:292–301, 1975.
- [36] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.*, 73(3):349–366, 1983.
- [37] Daniel C. Fielder and Cecil O. Alford. Observations from computer experiments on an integer equation. In *Applications of Fibonacci numbers, Vol. 7 (Graz, 1996)*, pages 93–103. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

- [38] P. Filakovszky and L. Hajdu. The resolution of the Diophantine equation $x(x + d) \cdots (x + (k - 1)d) = by^2$ for fixed d . *Acta Arith.*, 98(2):151–154, 2001.
- [39] I. Gaál, I. Járási, and F. Luca. A remark on prime divisors of lengths of sides of Heron triangles. *Experiment. Math.*, 12(3):303–310, 2003.
- [40] Richard K. Guy. *Unsolved problems in number theory*. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1994. Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, I.
- [41] K. Győry. On the Diophantine equation $\binom{n}{k} = x^l$. *Acta Arith.*, 80(3):289–295, 1997.
- [42] K. Győry. On the Diophantine equation $n(n + 1) \cdots (n + k - 1) = bx^l$. *Acta Arith.*, 83(1):87–92, 1998.
- [43] K. Győry. Power values of products of consecutive integers and binomial coefficients. In *Number theory and its applications (Kyoto, 1997)*, volume 2 of *Dev. Math.*, pages 145–156. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [44] K. Győry. Perfect powers in products with consecutive terms from arithmetic progressions. In *More sets, graphs and numbers*, volume 15 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 143–155. Springer, Berlin, 2006.
- [45] K. Győry, L. Hajdu, and Á. Pintér. Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression. *Compos. Math.*, 145(4):845–864, 2009.
- [46] K. Győry, L. Hajdu, and N. Saradha. On the Diophantine equation $n(n + d) \cdots (n + (k - 1)d) = by^l$. *Canad. Math. Bull.*, 47(3):373–388, 2004.
- [47] L. Hajdu. Perfect powers in arithmetic progression. A note on the inhomogeneous case. *Acta Arith.*, 113(4):343–349, 2004. Dedicated to Robert Tijdeman on the occasion of his 60th birthday.
- [48] L. Hajdu and Sz. Tengely. Arithmetic progressions of squares, cubes and n -th powers. *Funct. Approx. Comment. Math.*, 41(, part 2):129–138, 2009.
- [49] Lajos Hajdu, Szabolcs Tengely, and Robert Tijdeman. Cubes in products of terms in arithmetic progression. *Publ. Math. Debrecen*, 74(1-2):215–232, 2009.

- [50] G. Hanrot, N. Saradha, and T. N. Shorey. Almost perfect powers in consecutive integers. *Acta Arith.*, 99(1):13–25, 2001.
- [51] H. Harborth, A. Kemnitz, and N. Robbins. Non-existence of Fibonacci triangles. *Congr. Numer.*, 114:29–31, 1996. Twenty-fifth Manitoba Conference on Combinatorial Mathematics and Computing (Winnipeg, MB, 1995).
- [52] N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey, and R. Tijdeman. An extension of a theorem of Euler. *Acta Arith.*, 129(1):71–102, 2007.
- [53] Péter Kiss. On the number of solutions of the Diophantine equation $\binom{x}{p} = \binom{y}{2}$. *Fibonacci Quart.*, 26(2):127–130, 1988.
- [54] Chao Ko. On the Diophantine equation $x^2 = y^n + 1$, $xy \neq 0$. *Sci. Sinica*, 14:457–460, 1965.
- [55] Shanta Laishram. An estimate for the length of an arithmetic progression the product of whose terms is almost square. *Publ. Math. Debrecen*, 68(3–4):451–475, 2006.
- [56] Shanta Laishram and T. N. Shorey. The equation $n(n+d) \cdots (n+(k-1)d) = by^2$ with $\omega(d) \leq 6$ or $d \leq 10^{10}$. *Acta Arith.*, 129(3):249–305, 2007.
- [57] Shanta Laishram, T. N. Shorey, and Szabolcs Tengely. Squares in products in arithmetic progression with at most one term omitted and common difference a prime power. *Acta Arith.*, 135(2):143–158, 2008.
- [58] V.A. Lebesgue. Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation $x^m = y^2 + 1$. *Nouv. Annal. des Math.*, 9:178–181, 1850.
- [59] D. A. Lind. The quadratic field $Q(\sqrt{5})$ and a certain Diophantine equation. *Fibonacci Quart.*, 6(3):86–93, 1968.
- [60] F. Luca. On a Diophantine equation. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 61(2):241–246, 2000.
- [61] F. Luca. On the equation $x^2 + 2^a \cdot 3^b = y^n$. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 29(4):239–244, 2002.
- [62] F. Luca, Sz. Tengely, and A. Togbé. On the diophantine equation $x^2 + c = 4y^n$. *Ann. Sci. Math. Québec*, 33(2):171–184, 2009.
- [63] R. Marszałek. On the product of consecutive elements of an arithmetic progression. *Monatsh. Math.*, 100(3):215–222, 1985.

- [64] M. Mignotte. On the Diophantine equation $D_1x^2 + D_2^m = 4y^n$. *Portugal. Math.*, 54(4):457–460, 1997.
- [65] M. Mignotte and B.M.M. De Weger. On the Diophantine equations $x^2 + 74 = y^5$ and $x^2 + 86 = y^5$. *Glasgow Math. J.*, 38:77–85, 1996.
- [66] M. Mignotte and A. Pethő. On the Diophantine equation $x^p - x = y^q - y$. *Publ. Mat.*, 43(1):207–216, 1999.
- [67] L. J. Mordell. On the integer solutions of $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$. *Pacific J. Math.*, 13:1347–1351, 1963.
- [68] L. J. Mordell. *Diophantine equations*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 30. Academic Press, London, 1969.
- [69] Anirban Mukhopadhyay and T. N. Shorey. Almost squares in arithmetic progression. III. *Indag. Math. (N.S.)*, 15(4):523–533, 2004.
- [70] F. S. A. Muriefah. On the Diophantine equation $px^2 + 3^n = y^p$. *Tamkang J. Math.*, 31(1):79–84, 2000.
- [71] F. S. A. Muriefah. On the Diophantine equation $Ax^2 + 2^{2m} = y^n$. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 25(6):373–381, 2001.
- [72] F. S. A. Muriefah and S. A. Arif. On a Diophantine equation. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 57(2):189–198, 1998.
- [73] F. S. A. Muriefah and S. A. Arif. The Diophantine equation $x^2 + 5^{2k+1} = y^n$. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 30(3):229–231, 1999.
- [74] F. S. A. Muriefah and S. A. Arif. The Diophantine equation $x^2 + q^{2k} = y^n$. *Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci.*, 26(1):53–62, 2001.
- [75] Richard Obláth. Über das Produkt fünf aufeinander folgender Zahlen in einer arithmetischen Reihe. *Publ. Math. Debrecen*, 1:222–226, 1950.
- [76] N. Petulante and I. Kaja. How to generate all integral triangles containing a given angle. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 24(8):569–572, 2000.
- [77] I. Pink. On the Diophantine equation $x^2 + (p_1^{z_1} \dots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$. *Publ. Math. Debrecen*, 65(1-2):205–213, 2004.
- [78] Ákos Pintér. A note on the Diophantine equation $\binom{x}{4} = \binom{y}{2}$. *Publ. Math. Debrecen*, 47(3-4):411–415, 1995.

- [79] Dimitrios Poulakis. Solutions entières de l'équation $Y^m = f(X)$. *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)*, 3(1):187–199, 1991.
- [80] O. Rigge. über ein diophantisches problem. In *9th Congress Math. Scand.*, pages 155–160. Mercator 1939, Helsingfors 1938.
- [81] J. W. Sander. Rational points on a class of superelliptic curves. *J. London Math. Soc. (2)*, 59(2):422–434, 1999.
- [82] N. Saradha. On perfect powers in products with terms from arithmetic progressions. *Acta Arith.*, 82(2):147–172, 1997.
- [83] N. Saradha. Squares in products with terms in an arithmetic progression. *Acta Arith.*, 86(1):27–43, 1998.
- [84] N. Saradha and T. N. Shorey. Almost perfect powers in arithmetic progression. *Acta Arith.*, 99(4):363–388, 2001.
- [85] N. Saradha and T. N. Shorey. Almost squares and factorisations in consecutive integers. *Compositio Math.*, 138(1):113–124, 2003.
- [86] N. Saradha and T. N. Shorey. Almost squares in arithmetic progression. *Compositio Math.*, 138(1):73–111, 2003.
- [87] N. Saradha and T. N. Shorey. Contributions towards a conjecture of Erdős on perfect powers in arithmetic progression. *Compos. Math.*, 141(3):541–560, 2005.
- [88] Wolfgang M. Schmidt. Integer points on curves of genus 1. *Compositio Math.*, 81(1):33–59, 1992.
- [89] Ernst S. Selmer. The Diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$. *Acta Math.*, 85:203–362 (1 plate), 1951.
- [90] T. N. Shorey. Perfect powers in products of arithmetical progressions with fixed initial term. *Indag. Math. (N.S.)*, 7(4):521–525, 1996.
- [91] T. N. Shorey. Powers in arithmetic progression. In *A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999)*, pages 325–336. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [92] T. N. Shorey. Powers in arithmetic progressions. II. *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku*, (1274):202–214, 2002. New aspects of analytic number theory (Japanese) (Kyoto, 2001).

- [93] T. N. Shorey. Diophantine approximations, Diophantine equations, transcendence and applications. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 37(1):9–39, 2006.
- [94] T. N. Shorey. Powers in arithmetic progressions. III. In *The Riemann zeta function and related themes: papers in honour of Professor K. Ramachandra*, volume 2 of *Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser.*, pages 131–140. Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2006.
- [95] T. N. Shorey and R. Tijdeman. Perfect powers in products of terms in an arithmetical progression. *Compositio Math.*, 75(3):307–344, 1990.
- [96] T. N. Shorey and R. Tijdeman. Perfect powers in products of terms in an arithmetical progression. II. *Compositio Math.*, 82(2):119–136, 1992.
- [97] T. N. Shorey and R. Tijdeman. Perfect powers in products of terms in an arithmetical progression. III. *Acta Arith.*, 61(4):391–398, 1992.
- [98] T. N. Shorey and R. Tijdeman. Some methods of Erdős applied to finite arithmetic progressions. In *The mathematics of Paul Erdős, I*, volume 13 of *Algorithms Combin.*, pages 251–267. Springer, Berlin, 1997.
- [99] S. Siksek and M. Stoll. On a problem of Hajdu and Tengely. *ArXiv e-prints*, December 2009.
- [100] David Singmaster. Repeated binomial coefficients and Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.*, 13(4):295–298, 1975.
- [101] V. G. Sprindžuk. The arithmetic structure of integer polynomials and class numbers. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 143:152–174, 210, 1977. Analytic number theory, mathematical analysis and their applications (dedicated to I. M. Vinogradov on his 85th birthday).
- [102] Michael Stoll. Implementing 2-descent for Jacobians of hyperelliptic curves. *Acta Arith.*, 98(3):245–277, 2001.
- [103] Roelof J. Stroeker and Benjamin M. M. de Weger. Elliptic binomial Diophantine equations. *Math. Comp.*, 68(227):1257–1281, 1999.
- [104] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2 + q^{2m} = 2y^p$. *Acta Arith.*, 127(1):71–86, 2007.
- [105] Sz. Tengely. Triangles with two integral sides. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 34:89–95, 2007.

- [106] Sz. Tengely. Note on the paper: „An extension of a theorem of Euler” [Acta Arith. 129 (2007), no. 1, 71–102; mr2326488] by N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey and R. Tijdeman. *Acta Arith.*, 134(4):329–335, 2008.
- [107] Sz. Tengely. Note on the paper: „An extension of a theorem of Euler” [Acta Arith. 129 (2007), no. 1, 71–102; mr2326488] by N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey and R. Tijdeman. *Acta Arith.*, 134(4):329–335, 2008.
- [108] A. Thue. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. *J. Reine Angew Math.*, 135:284–305, 1909.
- [109] R. Tijdeman. Diophantine equations and Diophantine approximations. In *Number theory and applications (Banff, AB, 1988)*, volume 265 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 215–243. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
- [110] R. Tijdeman. Exponential Diophantine equations 1986–1996. In *Number theory (Eger, 1996)*, pages 523–539. de Gruyter, Berlin, 1998.
- [111] J. B. Tunnell. A classical Diophantine problem and modular forms of weight $3/2$. *Invent. Math.*, 72(2):323–334, 1983.
- [112] Paul M. Voutier. An upper bound for the size of integral solutions to $Y^m = f(X)$. *J. Number Theory*, 53(2):247–271, 1995.

Tengely Szabolcs publikációi és idézettsége

Tengely Szabolcs publikációi és azok független (52 db) és függő (15 db) hivatkozásai

- [1] F. S. Abu Muriefah, F. Luca, S. Siksek, and Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2 + C = 2y^n$. *Int. J. Number Theory*, 5(6):1117–1128, 2009.

hivatkozik rá:

- [1.1] I. N. Cangul, M. Demirci, F. Luca, Á. Pintér, and G. Soydan. On the Diophantine equation $x^2 + 2^a \cdot 11^b = y^n$. *Fibonacci Quart.*, 48(1):39–46, 2010.
- [1.2] G. Soydan, M. Demirci, and I. N. Cangul. The Diophantine equation $x^2 + 11^m = y^n$. *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, 19(2):183–188, 2009.

- [2] L. Hajdu and Sz. Tengely. Arithmetic progressions of squares, cubes and n -th powers. *Funct. Approx. Comment. Math.*, 41(part 2):129–138, 2009.

hivatkozik rá:

- [2.1] L. Hajdu. Powerful arithmetic progressions. *Indag. Math. (N.S.)*, 19(4):547–561, 2008.
- [2.2] S. Siksek and M. Stoll. On a problem of hajdu and tengely. In Guillaume (ed.) et al. Hanrot, editor, *Algorithmic number theory. 9th international symposium*, volume 6197 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 316–330. Berlin: Springer, 2010.
- [2.3] T. Kovács, K. Liptai, and P. Olajos. On (a, b) -balancing numbers. *Publ. Math. Debrecen*, 77:485–498, 2010.
- [2.4] P. Olajos. Properties of balancing, cobalancing and generalized balancing numbers. *Ann. Math. Inform.*, 37:&–&, 2010.

- [3] L. Hajdu, Sz. Tengely, and R. Tijdeman. Cubes in products of terms in arithmetic progression. *Publ. Math. Debrecen*, 74(1-2):215–232, 2009.

hivatkozik rá:

- [3.1] L. Hajdu. Powerful arithmetic progressions. *Indag. Math. (N.S.)*, 19(4):547–561, 2008.
- [3.2] K. Győry, L. Hajdu, and Á. Pintér. Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression. *Compos. Math.*, 145(4):845–864, 2009.
- [3.3] T. Kovács, K. Liptai, and P. Olajos. On (a, b) -balancing numbers. *Publ. Math. Debrecen*, 77:485–498, 2010.
- [3.4] P. Olajos. Properties of balancing, cobalancing and generalized balancing numbers. *Ann. Math. Inform.*, 37:&–&, 2010.

- [4] F. Luca, Sz. Tengely, and A. Togbe. On the Diophantine Equation $x^2 + c = 4y^n$. *Ann. Sci. Math. Québec*, 33(2):171–184, 2009.

- [5] Sz. Tengely. Finding g -gonal numbers in recurrence sequences. *Fibonacci Quart.*, 46/47(3):235–240, 2008/09.

hivatkozik rá:

- [5.1] T. Kovács. Combinatorial numbers in binary recurrences. *Period. Math. Hungar.*, 58(1):83–98, 2009.
- [6] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, M. Stoll, and Sz. Tengely. Integral points on hyperelliptic curves. *Algebra Number Theory*, 2(8):859–885, 2008.

hivatkozik rá:

- [6.1] M. Stoll. How to obtain global information from computations over finite fields. In *Higher-dimensional geometry over finite fields*, volume 16 of *NATO Sci. Peace Secur. Ser. D Inf. Commun. Secur.*, pages 189–196. IOS, Amsterdam, 2008.
- [6.2] M. Stoll, P. G. Walsh, and P. Yuan. On the Diophantine equation $X^2 - (2^{2m} + 1)Y^4 = -2^{2m}$. *Acta Arith.*, 139(1):57–63, 2009.
- [6.3] F. Luca, D. Marques, and P. Stănică. On the spacings between C -nomial coefficients. *J. Number Theory*, 130(1):82–100, 2010.
- [7] S. Laishram, T. N. Shorey, and Sz. Tengely. Squares in products in arithmetic progression with at most one term omitted and common difference a prime power. *Acta Arith.*, 135(2):143–158, 2008.

hivatkozik rá:

- [7.1] L. Hajdu. Powerful arithmetic progressions. *Indag. Math. (N.S.)*, 19(4):547–561, 2008.
- [7.2] Aaron Levin. Variations on a theme of Runge: effective determination of integral points on certain varieties. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 20(2):385–417, 2008.
- [7.3] T. Kovács, K. Liptai, and P. Olajos. On (a, b) -balancing numbers. *Publ. Math. Debrecen*, 77:485–498, 2010.
- [7.4] P. Olajos. Properties of balancing, cobalancing and generalized balancing numbers. *Ann. Math. Inform.*, 37:&–&, 2010.
- [8] Sz. Tengely. Note on the paper: “An extension of a theorem of Euler” [Acta Arith. **129** (2007), no. 1, 71–102; mr2326488] by N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey and R. Tijdeman. *Acta Arith.*, 134(4):329–335, 2008.

hivatkozik rá:

- [8.1] L. Hajdu. Powerful arithmetic progressions. *Indag. Math. (N.S.)*, 19(4):547–561, 2008.
- [8.2] Aaron Levin. Variations on a theme of Runge: effective determination of integral points on certain varieties. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 20(2):385–417, 2008.
- [8.3] L. Hajdu, Sz. Tengely, and R. Tijdeman. Cubes in products of terms in arithmetic progression. *Publ. Math. Debrecen*, 74(1-2):215–232, 2009.
- [8.4] K. Győry, L. Hajdu, and Á. Pintér. Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression. *Compos. Math.*, 145(4):845–864, 2009.
- [8.5] T. Kovács, K. Liptai, and P. Olajos. On (a, b) -balancing numbers. *Publ. Math. Debrecen*, 77:485–498, 2010.
- [8.6] P. Olajos. Properties of balancing, cobalancing and generalized balancing numbers. *Ann. Math. Inform.*, 37:&–&, 2010.
- [9] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2 + q^{2m} = 2y^p$. *Acta Arith.*, 127(1):71–86, 2007.

hivatkozik rá:

- [9.1] E. Goins, F. Luca, and A. Togbé. On the Diophantine equation $x^2 + 2^\alpha 5^\beta 13^\gamma = y^n$. In *Algorithmic number theory*, volume 5011 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 430–442. Springer, Berlin, 2008.
- [9.2] F. S. Abu Muriefah, F. Luca, S. Siksek, and Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2 + C = 2y^n$. *Int. J. Number Theory*, 5(6):1117–1128, 2009.
- [10] Sz. Tengely. Triangles with two integral sides. *Ann. Math. Inform.*, 34:89–95, 2007.
- hivatkozik rá:
 - [10.1] A. J. MacLeod. A note on integral clock triangles. *Ann. Math. Inform.*, 36:111–115, 2009.
- [11] N. Bruin, K. Győry, L. Hajdu, and Sz. Tengely. Arithmetic progressions consisting of unlike powers. *Indag. Math. (N.S.)*, 17(4):539–555, 2006.
- hivatkozik rá:
 - [11.1] L. Hajdu. Powerful arithmetic progressions. *Indag. Math. (N.S.)*, 19(4):547–561, 2008.
 - [11.2] S. Siksek and M. Stoll. On a problem of hajdu and tengely. In Guillaume (ed.) et al. Hanrot, editor, *Algorithmic number theory. 9th international symposium*, volume 6197 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 316–330. Berlin: Springer, 2010.
 - [11.3] T. Kovács, K. Liptai, and P. Olajos. On (a, b) -balancing numbers. *Publ. Math. Debrecen*, 77:485–498, 2010.
 - [11.4] P. Olajos. Properties of balancing, cobalancing and generalized balancing numbers. *Ann. Math. Inform.*, 37:&–&, 2010.
- [12] Sz. Tengely. *Effective Methods for Diophantine Equations*. PhD thesis, Leiden University, 2005.
- hivatkozik rá:
 - [12.1] Cs. Rakaczki. *Binomiális együtthatókkal és hatványösszegekkel kapcsolatos diofantikus eredmények*. PhD thesis, University of Debrecen, 2005.
 - [12.2] L. Hajdu and Zs. Turi-Nagy. Power values of sums of binary forms. *Publ. Math. Debrecen*, 69(3):321–331, 2006.
 - [12.3] A. Sankaranarayanan and N. Saradha. Estimates for the solutions of certain Diophantine equations by Runge’s method. *Int. J. Number Theory*, 4(3):475–493, 2008.
 - [12.4] N. Bruin, K. Győry, L. Hajdu, and Sz. Tengely. Arithmetic progressions consisting of unlike powers. *Indag. Math. (N.S.)*, 17(4):539–555, 2006.
- [13] F. Beukers and Sz. Tengely. An implementation of Runge’s method for Diophantine equations, 2005.
- hivatkozik rá:
 - [13.1] A. Levin. Ideal class groups, Hilbert’s irreducibility theorem, and integral points of bounded degree on curves. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 19(2):485–499, 2007.
 - [13.2] S. Akhtari, A. Togbé, and P. G. Walsh. On the equation $aX^4 - bY^2 = 2$. *Acta Arith.*, 131(2):145–169, 2008.
 - [13.3] S. Akhtari. *Thue equations and related topics*. PhD thesis, University of British Columbia, 2008.

- [14] Pierluigi Frisco, Christiaan Henkel, and Szabolcs Tengely. An Algorithm for SAT Without an Extraction Phase. In *DNA Computing, Eleventh International Meeting on DNA Based Computers, LNCS 3892*, pages 67–80, 2005.

hivatkozik rá:

- [14.1] M. Oltean. Solving the Hamiltonian path problem with a light-based computer. *Natural Computing*, 7(1):57–70, 2008.
- [14.2] M. Oltean and O. Muntean. Exact cover with light. *New Generation Computing*, 26:327–344, 2007.

- [15] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2 + a^2 = 2y^p$. *Indag. Math. (N.S.)*, 15(2):291–304, 2004.

hivatkozik rá:

- [15.1] I. Pink. On the Diophantine equation $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$. *Publ. Math. Debrecen*, 65(1-2):205–213, 2004.
- [15.2] R. A. Mollin. On an elementary approach to the Lebesgue-Nagell equation. *Int. J. Number Theory*, 1(4):553–561, 2005.
- [15.3] I. Pink. *Effektív eredmények a szuperelliptikus egyenletek elméletében*. PhD thesis, University of Debrecen, 2006.
- [15.4] F. Luca and A. Togbé. On the Diophantine equation $x^2 + 2^a \cdot 5^b = y^n$. *Int. J. Number Theory*, 4(6):973–979, 2008.
- [15.5] A. Bérczes and I. Pink. On the Diophantine equation $x^2 + p^{2k} = y^n$. *Arch. Math. (Basel)*, 91(6):505–517, 2008.
- [15.6] E. Goins, F. Luca, and A. Togbé. On the Diophantine equation $x^2 + 2^\alpha 5^\beta 13^\gamma = y^n$. In *Algorithmic number theory*, volume 5011 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 430–442. Springer, Berlin, 2008.
- [15.7] F. S. Abu Muriefah, F. Luca, and A. Togbé. On the Diophantine equation $x^2 + 5^a 13^b = y^n$. *Glasg. Math. J.*, 50(1):175–181, 2008.
- [15.8] N. Bruin, K. Győry, L. Hajdu, and Sz. Tengely. Arithmetic progressions consisting of unlike powers. *Indag. Math. (N.S.)*, 17(4):539–555, 2006.
- [15.9] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2 + q^{2m} = 2y^p$. *Acta Arith.*, 127(1):71–86, 2007.
- [15.10] I. N. Cangul, M. Demirci, F. Luca, Á. Pintér, and G. Soydan. On the Diophantine equation $x^2 + 2^a \cdot 11^b = y^n$. *Fibonacci Quart.*, 48(1):39–46, 2010.
- [15.11] G. Soydan, M. Demirci, and I. N. Cangul. The Diophantine equation $x^2 + 11^m = y^n$. *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, 19(2):183–188, 2009.
- [16] Sz. Tengely. Runge-type Diophantine Equations. *Annual Report, Leiden University, The Netherlands*, pages 3–8, 2004.
- [17] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $F(x) = G(y)$. *Acta Arith.*, 110(2):185–200, 2003.

hivatkozik rá:

- [17.1] Cs. Rakaczki. On the Diophantine equation $x(x-1) \cdots (x-(m-1)) = \lambda y(y-1) \cdots (y-(n-1)) + l$. *Acta Arith.*, 110(4):339–360, 2003.
- [17.2] Cs. Rakaczki. On the Diophantine equation $F(\binom{x}{n}) = b(\binom{y}{m})$. *Period. Math. Hungar.*, 49(2):119–132, 2004.
- [17.3] Cs. Rakaczki. *Binomiális együtthatókkal és hatványösszegekkel kapcsolatos diofantikus eredmények*. PhD thesis, University of Debrecen, 2005.
- [17.4] Robert S. Coulter, Marie Henderson, and Felix Lazebnik. On certain combinatorial Diophantine equations and their connection to Pythagorean numbers. *Acta Arith.*, 122(4):395–406, 2006.

- [17.5] L. Hajdu and Zs. Turi-Nagy. Power values of sums of binary forms. *Publ. Math. Debrecen*, 69(3):321–331, 2006.
 - [17.6] H. Cohen. *Number theory. Vol. I. Tools and Diophantine equations*, volume 239 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007.
 - [17.7] H. Cohen. *Number theory. Vol. II. Analytic and modern tools*, volume 240 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007.
 - [17.8] T. Kovács. Combinatorial Diophantine equations—the genus 1 case. *Publ. Math. Debrecen*, 72(1-2):243–255, 2008.
 - [17.9] A. Sankaranarayanan and N. Saradha. Estimates for the solutions of certain Diophantine equations by Runge's method. *Int. J. Number Theory*, 4(3):475–493, 2008.
 - [17.10] T. Kovács. Combinatorial numbers in binary recurrences. *Period. Math. Hungar.*, 58(1):83–98, 2009.
 - [18] I. Pink and Sz. Tengely. Full powers in arithmetic progressions. *Publ. Math. Debrecen*, 57(3-4):535–545, 2000.
- hivatkozik rá:
- [18.1] I. Járási. *Constructive Methods for Diophantine Equations*. PhD thesis, University of Debrecen, 2005.
 - [18.2] L. Hajdu. Powerful arithmetic progressions. *Indag. Math. (N.S.)*, 19(4):547–561, 2008.
 - [18.3] I. Pink. On the Diophantine equation $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$. *Publ. Math. Debrecen*, 65(1-2):205–213, 2004.
 - [18.4] I. Pink. *Effektív eredmények a szuperelliptikus egyenletek elméletében*. PhD thesis, University of Debrecen, 2006.
 - [18.5] N. Bruin, K. Győry, L. Hajdu, and Sz. Tengely. Arithmetic progressions consisting of unlike powers. *Indag. Math. (N.S.)*, 17(4):539–555, 2006.
 - [18.6] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2 + a^2 = 2y^p$. *Indag. Math. (N.S.)*, 15(2):291–304, 2004.
 - [19] P. Kósa and Sz. Tengely. *A MATLAB: matematikai programcsomag*. Debreceni Egyetem, 1997. Ismeretterjesztő publikáció.

Konferenciaelőadások

- [1] Diophantine problems related to recurrence sequences, Number Theory and its Applications, Debrecen, 2010.
- [2] On the Diophantine equation $x^2 + C = 2y^n$, Rational Points - Theory & Experiment, Zürich, Svájc, 2010.
- [3] On the Diophantine Equation $x^2 + C = 2^r y^p$, 19th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Hradec nad Moravicí, Csehország, 2009.
- [4] Egész pontokról racionálisan, Institute Colloquium, Debrecen, 2009.
- [5] Integral Points on Families of Elliptic Curves, Winter School on Explicit Methods in Number Theory, Debrecen, 2009.
- [6] TÖRTÉNET EGÉSZ pontokról, Number Theory Seminar, Debrecen, 2008.
- [7] Magyary Zoltán Posztdoktori beszámoló előadás, Number Theory Seminar, Debrecen, 2007.
- [8] Diophantine Equations Related to Arithmetic Progressions, Solvability of Diophantine Equations, Workshop, Leiden, Hollandia, 2007.
- [9] Az $x^2 + q^{2m} = 2y^p$ diofantikus egyenletről, Number Theory Seminar, Debrecen, 2006.
- [10] Hamilton-körök és DNS molekulák, KöMaL Ifjúsági Ankét 2005, Budapest, 2005.
- [11] Aritmetika - Geometria : 1-1, Number Theory Seminar, Debrecen, 2005.
- [12] A leideni hozomány, Number Theory Seminar, Debrecen, 2005.

- [13] On effective methods for Diophantine equations, Number Theory Lectures, Leiden, Hollandia, 2005.
- [14] A cyclotomic proof of Catalan's conjecture (after Mihailescu), Workshop on Computational Number Theory, Debrecen, 2003.
- [15] Az $x^2 + a^2 = 2y^p$ diofantikus egyenletről, Number Theory Seminar, Debrecen, 2003.
- [16] On Cassels' relations, Number Theory Day, Debrecen, 2003.
- [17] On Cassels' relations, Intercity Number Theory Seminar, Nijmegen, Hollandia, 2002.
- [18] The Runge-type diophantine argument in Mihailescu's proof, Intercity Number Theory Seminar, Amsterdam, Hollandia, 2002.
- [19] On the equation $F(x) = G(y)$, Explicit Algebraic Number Theory: NWO-OTKA workshop, Leiden, Hollandia, 2002.
- [20] Full powers in arithmetic progressions, Colloquium on Number Theory, Debrecen, 2000.
- [21] Full powers in arithmetic progressions, 14th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Liptovsky Jan, Szlovákia, 1999.

Oktatói tevékenység adatai

Az 1997-2010 időszakban oktatott tárgyak:

Előadások

- Alkalmazott algebra (több félévben)
- Magma
- Elliptikus görbék (több félévben)
- Az algebra és a számelmélet újabb eredményeiről (levelezős hallgatóknak)
- Számelmélet (levelezős hallgatóknak)
- Gráfelmélet I.
- Gráfelmélet II.
- Discrete mathematics (több félévben, angol nyelven)

Gyakorlatok

- Algebra (több félévben)
- Diszkrét matematika 1-2 (több félévben)
- Lineáris algebra (több félévben)
- Linear Algebra 2 (a Leideni Egyetemen, angol nyelven)

- Calculus 2 (a Leideni Egyetemen, angol nyelven)
- Caleidoscoop (a Leideni Egyetemen, angol nyelven)
- Elemi matematika 1-2 (több félévben)
- Kombinatorika és gráfelmélet (több félévben)
- Biomatematika (több félévben)
- Algebrai algoritmusok (több félévben)
- Számelméleti algoritmusok (több félévben)
- Az informatika alapjai (több félévben)

Diplomamunkák/szakdolgozatok témavezetése

- Varga Valéria: Sudoku, 2007.
- Szabó Mariann: Pi formulák, 2008.
- Zdrobe Marius: Matematika GeoGebrával, 2009.
- Szabó Mariann: Lánctörtek és alkalmazásaik, folyamatban.
- Vasenszki Zoltán: Index kalkulus, folyamatban.
- Bucsay Balázs: Titokmegosztás, folyamatban.

Jelentősebb hazai és nemzetközi együttműködések

Tengely Szabolcs hazai együttműködései

- A debreceni számelméleti iskola tagjaként szoros munkakapcsolatban áll a csoport vezetőjével, Dr. Győry Kálmánnal valamint a csoport többi tagjával.
- *Hazai társszerzői: Győry Kálmán, Hajdu Lajos, Pink István*

Az együttműködések eredményeiből 4 publikáció született.

Tengely Szabolcs külföldi együttműködései

- Robert Tijdeman témavezetésével írta PhD disszertációját a Leideni Egyetemen 2001–2005 között.
- A Magyary Zoltán Posztdoktori Ösztöndíj ideje alatt közös kutatásokat kezdett Samir Siksekkel.
- Több közös témán dolgozott Florian Lucával.
- *Külföldi társszerzői: F. S. Abu Muriefah, F. Beukers, N. Bruin, Y. Bugeaud, P. Frisco, C. Henkel, S. Laishram, F. Luca, M. Mignotte, T. N. Shorey, S. Siksek, M. Stoll, R. Tijdeman, A. Togbé*

Az együttműködések eredményeiből 8 publikáció született.

Tudományos közéleti tevékenység

Testületi tagságok, megbízatások

- A Magyar Zoltán Ösztöndíjasok Társaságának tagja (2006 óta)
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagja (2006 óta)
- Az MTA köztestületének tagja (2007 óta)

Tudományszervezés

- Az absztrakt kötet szerkesztője a XXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models konferencián (2000)
- A Mathematical Reviews referálója (2003 óta)
- Citation Analysis 2004 titkára (2004)
- A Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny szervezőtitkára (2005/6)
- A Diofantikus és Kriptográfiai Napok 2009 szervezője (2009)
- A Matematikai Intézet és az Informatikai Kar közös szemináriumának szervezője (2010 óta)

Tudományos pályázatokban való részvétel

Jelentősebb kutatási pályázatok adatai

- Explicit módszerek a diofantikus számelméletben, OTKA T48791 pályázat, témavezető: Dr. Pintér Ákos, 2005–2008.
- Number Theory NWO-OTKA nemzetközi pályázat, témavezetők: Dr. Robert Tijdeman és Dr. Győry Kálmán, 2001–2003.
- Magyary Zoltán Posztdoktori Ösztöndíj, egyéni pályázat, 2006–2007.
- OTKA Posztdoktori kutatási pályázat, OTKA PD75264, egyéni pályázat, 2009–2012.
- Bolyai János Kutatási Ösztöndíj, MTA, egyéni pályázat, 2009–2012.

Tudományos önéletrajz

Tengely Szabolcs

Tanulmányok, munkahelyek

- 1982–1990 **Általános iskola**, Csépanyi Úti általános Művelődési Központ, Ózd.
- 1990–1994 **Középiskola**, József Attila Gimnázium, Ózd.
- 1994–1999 **Egyetem**, Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen.
- 1999–2001 **Debreceni Egyetem/MTA-DE Számelméleti Kutatócsoport**, tudományos segédmunkatárs, számítástechnikai munkatárs.
- 2001–2005 **Ph.D.**, Leideni Egyetem, Leiden, Hollandia.
- 2004–2008 **Debreceni Egyetem**, egyetemi tanársegéd.
- 2006–2007 **Debreceni Egyetem**, Magyary Zoltán Posztdoktori Ösztöndíjas.
- 2008–2009 **MTA-DE Számelméleti Kutatócsoport**, tudományos segédmunkatárs.
- 2008–2009 **Debreceni Egyetem**, egyetemi adjunktus.
- 2009– **Debreceni Egyetem**, OTKA Posztdoktor.

Ösztöndíjak, tudományos díjak

- 1998 **Kereskedelmi Bank RT Universitas Alapítvány díja.**
- 1998–1999 **Köztársasági Ösztöndíj.**
- 1999 **Rényi Kató-emlékdíj.**
- 1999 **OTDK Különdíj.**
- 1999 **TTK Emlékérem.**
- 2001–2005 **PhD Ösztöndíj**, Leideni Egyetem, Hollandia.
- 2006 **Patai Alapítvány díja.**
- 2006–2007 **Magyary Zoltán Posztdoktori Ösztöndíj.**
- 2009–2012 **OTKA Posztdoktor.**
- 2009–2012 **Bolyai János Kutatási Ösztöndíj.**
- 2009 **Akadémiai Ifjúsági Díj.**

Testületi tagságok, tudományszervezés

- 2003– **A Mathematical Reviews referálója.**
- 2005 **A Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny szervezőtitkára.**

- 2006– **A Magyar Zoltán Ösztöndíjasok Társaságának tagja.**
 2006– **A Bolyai János Matematikai Társulat tagja.**
 2007– **Az MTA köztestületének tagja.**
 2009 **A Diofantikus és Kriptográfiai Napok 2009 szervezője.**
 2010– **A Matematikai Intézet és az Informatikai Kar közös szemináriumának szervezője.**

Nyelvtudás

magyar **anyanyelv**

angol **állami középfok**

Négy évig dolgoztam a Leideni Egyetemen Hollandiában, ahol angol nyelven tartottam órákat, angolul írtam a disszertációm.

orosz **alapfok**

Diplomamunka

cím $A D_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 - D_2(b_0y^2 + b_1y + b_2) = k$ diofantikus egyenlet effektív és numerikus vizsgálata

témavezetők Prof.Dr. Győry Kálmán és Dr. Hajdu Lajos

rövid Diplomamunkámban általános eljárást adtam a
 összefoglaló

$$D_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 - D_2(b_0y^2 + b_1y + b_2) = k$$

diofantikus egyenletcsalád megoldásainak meghatározására. Az algoritmust a KANT matematikai programcsomagban implementáltam. Ezen felül meghatároztam az összes k, x^2, y^4 és k, x^4, y^2 típusú számtani sorozatot, ahol x, y 0-tól különböző egész számok, k pedig adott egész szám a $|k| \leq 10$ tulajdonsággal.

Ph.D. disszertáció

cím *Effective Methods for Diophantine Equations*

témavezető Prof.Dr. Robert Tijdeman

rövid A disszertáció négy fejezetből áll. A bevezető részben a disszertációhoz kötődő irodalomról,
 összefoglaló a szakterület problémáiról írok. Az első fejezetben Runge-típusú egyenletekkel tárgyalok. Sikertől Grytczuk és Schinzel, továbbá Walsh elméleti eredményeit élesíteni, az

$$F(x) = G(y)$$

alakú egyenletek megoldásaira felső korlátot adtam, ahol F és G néhány általános feltételt kielégítő polinomok. Az elméleti eredményen kívül algoritmust adtam, amelyet a MAGMA matematikai programcsomagban implementáltam. A második fejezetben az

$$x^2 + q^{2m} = 2y^p$$

diofantikus egyenlettel foglalkoztam, ahol a paraméterek ismeretlen egészek. Bebizonyítottam, hogy néhány természetes kivételektől eltekintve a megoldásszám véges. A harmadik fejezetben Euler egy klasszikus eredményét általánosítottam. Euler megmutatta, hogy négy négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot a triviális esetektől eltekintve. A disszertációban a négyzetszámokból és köbszámokból álló számtani sorozatokat határoztam meg.

Munkatapasztalat

- 1997 **Nyári gyakorlat**, *Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen*.
A MATLAB programcsomag segítségével interaktív programot készítettünk Kósa Péterrel közösen a valószínűségszámítás fontos alaptételeinek szemléltetéséhez.
- 1997–1999 **Demonstrátor**, *Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen*.
Gyakorlatokat tartottam algebrából, diszkrét matematikából, lineáris algebrából és számelméletből.
- 1999–2001 **Tudományos segédmunkatárs, számítástechnikai munkatárs**, *Debreceni Egyetem/MTA-DE Számelméleti Kutatócsoport*.
Hajdu Lajos és Robert Tijdeman diszkrét tomográfiai algoritmusát programoztam le a MATLAB matematikai programcsomagban, amit a cikkükben fel is használtak. Az absztrakt kötet szerkesztője voltam a XXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models konferencián.
- 2001–2005 **Ph.D. ösztöndíjas**, *Leideni Egyetem, Leiden, Hollandia*.
Diofantikus egyenletek effektív elméletének kutatásával foglalkoztam. Olyan $F(x) = G(y)$ típusú egyenletekkel, amelyek eleget tesznek az úgynevezett Runge feltételeknek. Exponenciális diofantikus egyenletekkel, például az $x^2 + q^{2m} = 2y^p$ egyenlettel. Racionális pontok meghatározásával foglalkoztam, a Chabauty- és a Demjanenko-módszerrel. Gyakorlatokat tartottam analízisből és lineáris algebrából.
- 2004–2008 **Egyetemi tanársegéd**, *Debreceni Egyetem, Debrecen*.
Kutatásokat folytattam elliptikus és hiperelliptikus görbék racionális pontjainak meghatározásával kapcsolatban Chabauty módszerrel és változataival. Előadásokat tartottam alkalmazott algebrából, elliptikus görbékről és a MAGMA matematikai programcsomagról. Gyakorlatokat vezettem diszkrét matematikából, elemi matematikából és kombinatorikából.
- 2005 **Titkár**, *Bolyai János Matematikai Társulat*.
Az egyik titkára voltam a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenynek.
- 2006–2007 **Magyary Zoltán Posztdoktori Ösztöndíjas**, *Debreceni Egyetem, Debrecen*.
Kutatási témám címe: Racionális és egész pontok algebrai görbéken. Az ösztöndíj ideje alatt több diofantikus problémát vizsgáltam. I. Exponenciális diofantikus egyenletek vizsgálata. Például $x^2 + q_1^{m_1} q_2^{m_2} \cdots q_r^{m_r} = by^p$ alakú egyenletek teljes megoldása a paraméterek bizonyos értékeire. II. Az $n(n+d)(n+2d) \cdots (n+(k-1)d) = bx^l$ egyenlet vizsgálata. Klasszikus problémakör, $l = 2, 3$ esetében teljes megoldás meghatározása nem túl nagy k értékekre. III. Az $F(x, y) = 0$ Runge-típusú egyenletekre effektív algoritmus implementálása Puiseux-sorozatok felhasználása nélkül. Záró szakmai és pénzügyi beszámolómat a Magyary Zoltán Felsőoktatási Alapítvány Kuratóriuma, a szakértői vélemény alapján, egyhangúlag kiválóan megfelelt minősítéssel fogadta el.
- 2008–2009 **Tudományos segédmunkatárs**, *MTA-DE Számelméleti Kutatócsoport*.
Kutatásokat folytattam exponenciális diofantikus egyenletekkel kapcsolatban, bizonyos egyenlet családok esetében teljes megoldáshoz vezető módszereket dolgoztam ki algebrai számelméleti eszközök, multi-Frey görbés technikák és elliptikus görbék segítségével.
- 2008–2009 **Egyetemi adjunktus**, *Debreceni Egyetem, Debrecen*.
Kutatásokat folytattam magasabb génuszú görbék racionális és egész pontjainak meghatározásával kapcsolatban Chabauty módszerrel, Mordell-Weil szita alkalmazásával. Előadásokat tartottam alkalmazott algebrából, elliptikus görbékről és a MAGMA matematikai programcsomagról. Gyakorlatokat vezettem algebrai algoritmusokból, biomatematikából, számelméleti algoritmusokból.

