

Általános alak

$$Q(x, y, z) = A_1x^2 + A_2xy + A_3xz + A_4y^2 + A_5yz + A_6z^2,$$

ahol $A_i \in \mathbb{Q}$ és $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Általános alak

$$Q(x, y, z) = A_1x^2 + A_2xy + A_3xz + A_4y^2 + A_5yz + A_6z^2,$$

ahol $A_i \in \mathbb{Q}$ és $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Megjegyzés: kvadratikus forma.

Általános alak

$$Q(x, y, z) = A_1x^2 + A_2xy + A_3xz + A_4y^2 + A_5yz + A_6z^2,$$

ahol $A_i \in \mathbb{Q}$ és $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Megjegyzés: kvadratikus forma.

$$z = 0 \quad : \quad A_1x^2 + A_2xy + A_4y^2$$

$$z \neq 0 \quad : \quad A_1 \left(\frac{x}{z}\right)^2 + A_2 \left(\frac{x}{z}\right) \left(\frac{y}{z}\right) + A_3 \left(\frac{x}{z}\right) + A_4 \left(\frac{y}{z}\right)^2 + A_5 \left(\frac{y}{z}\right) + A_6$$

Általános alak

$$Q(x, y, z) = A_1x^2 + A_2xy + A_3xz + A_4y^2 + A_5yz + A_6z^2,$$

ahol $A_i \in \mathbb{Q}$ és $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Megjegyzés: kvadratikus forma.

$$z = 0 \quad : \quad A_1x^2 + A_2xy + A_4y^2$$

$$z \neq 0 \quad : \quad A_1 \left(\frac{x}{z}\right)^2 + A_2 \left(\frac{x}{z}\right) \left(\frac{y}{z}\right) + A_3 \left(\frac{x}{z}\right) + A_4 \left(\frac{y}{z}\right)^2 + A_5 \left(\frac{y}{z}\right) + A_6$$

Megjegyzés: kúpszeletek.

Kanonikus alak

$$R(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2,$$

ahol $A, B, C \in \mathbb{Q}$ és $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Kanonikus alak

$$R(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2,$$

ahol $A, B, C \in \mathbb{Q}$ és $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Példa:

$$\begin{aligned} &2x^2 - 3xy + 4xz - 5y^2 + 6yz - 7z^2, \\ &2 \left(x - \frac{3}{4}y + z \right)^2 - \frac{49}{8} \left(y - \frac{36}{49}z \right)^2 - \frac{279}{49}z^2, \\ &2x_1^2 - \frac{49}{8}y_1^2 - \frac{279}{49}z_1^2, \\ &x_2^2 - y_2^2 - 62z_2^2. \end{aligned}$$

Pitagoraszai számhármak

Derékszögű háromszög esetében
befogók: a , b és átfogó c

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Pitagoraszai számhármaskok

Derékszögű háromszög esetében
befogók: a , b és átfogó c

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ez az $A = B = 1$, $C = -1$ speciális esete az $R(a, b, c) = 0$ egyenletnek. Néhány megoldás:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2, & 5^2 + 12^2 &= 13^2, \\ 8^2 + 15^2 &= 17^2, & 7^2 + 24^2 &= 25^2. \end{aligned}$$

Egész megoldások

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Elegendő vizsgálni az egyenletet a következő feltételekkel:

- x, y és z pozitív egészek,
- $\text{LNKO}(x, y, z) = 1$, azaz primitív megoldást keresünk,
- x páratlan, y páros.

Ekkor $y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$. Mivel y páros és $z - x$ és $z + x$ is páros, így

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{z - x}{2}\right) \left(\frac{z + x}{2}\right).$$

Az előző megoldások esetében ez azt jelenti, hogy

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(\frac{5-3}{2}\right) \left(\frac{5+3}{2}\right) = 1 \cdot 4,$$

$$\left(\frac{12}{2}\right)^2 = \left(\frac{13-5}{2}\right) \left(\frac{13+5}{2}\right) = 4 \cdot 9,$$

$$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = \left(\frac{17-15}{2}\right) \left(\frac{17+15}{2}\right) = 1 \cdot 16,$$

$$\left(\frac{24}{2}\right)^2 = \left(\frac{25-7}{2}\right) \left(\frac{25+7}{2}\right) = 9 \cdot 16.$$

Az előző megoldások esetében ez azt jelenti, hogy

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(\frac{5-3}{2}\right) \left(\frac{5+3}{2}\right) = 1 \cdot 4,$$

$$\left(\frac{12}{2}\right)^2 = \left(\frac{13-5}{2}\right) \left(\frac{13+5}{2}\right) = 4 \cdot 9,$$

$$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = \left(\frac{17-15}{2}\right) \left(\frac{17+15}{2}\right) = 1 \cdot 16,$$

$$\left(\frac{24}{2}\right)^2 = \left(\frac{25-7}{2}\right) \left(\frac{25+7}{2}\right) = 9 \cdot 16.$$

A példákban $\left(\frac{z-x}{2}\right)$ teljes négyzet és $\left(\frac{z+x}{2}\right)$ is teljes négyzet.

Legyen $d = \text{LNKO}\left(\left(\frac{z-x}{2}\right), \left(\frac{z+x}{2}\right)\right)$. Ekkor

$$d \mid \left(\frac{z+x}{2}\right) - \left(\frac{z-x}{2}\right) = x,$$

$$d \mid \left(\frac{z+x}{2}\right) + \left(\frac{z-x}{2}\right) = z,$$

de x és z relatív prímek, így $d = 1$.

$$\left(\frac{z-x}{2}\right) = s^2,$$

$$\left(\frac{z+x}{2}\right) = t^2,$$

valamilyen $s, t \in \mathbb{N}$, $\text{LNKO}(s, t) = 1$ értékekre.

Igazoltuk a következő tételt.

Pitagoraszai számhármassok

Az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet pozitív, primitív egész megoldásai előállnak a következő alakban

$$x = t^2 - s^2,$$

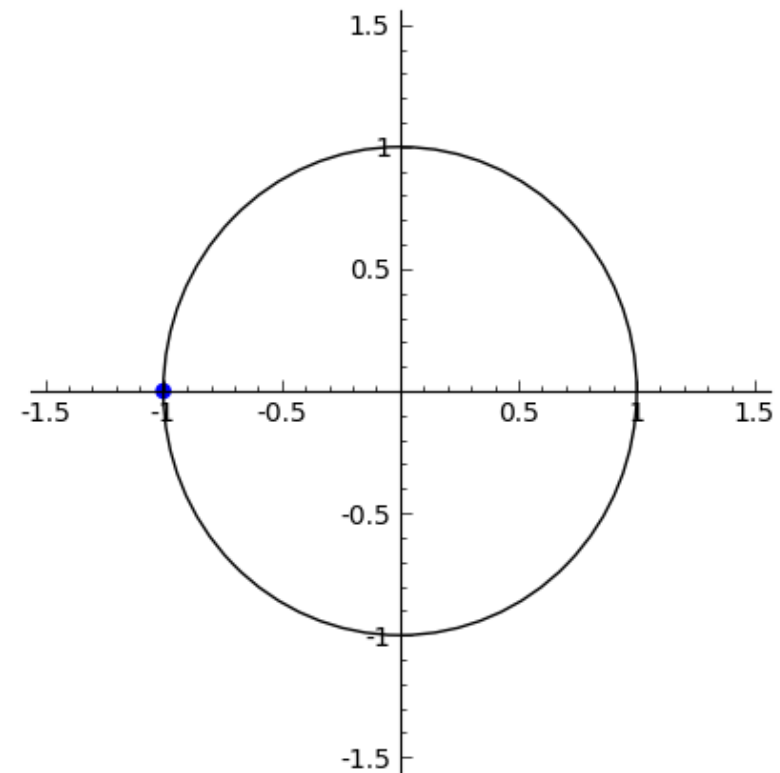
$$y = 2st,$$

$$z = t^2 + s^2,$$

ahol s és t relatív prím természetes számok, amelyekre $t > s$ és $t \not\equiv s \pmod{2}$.

Racionális pontok az egységgörön

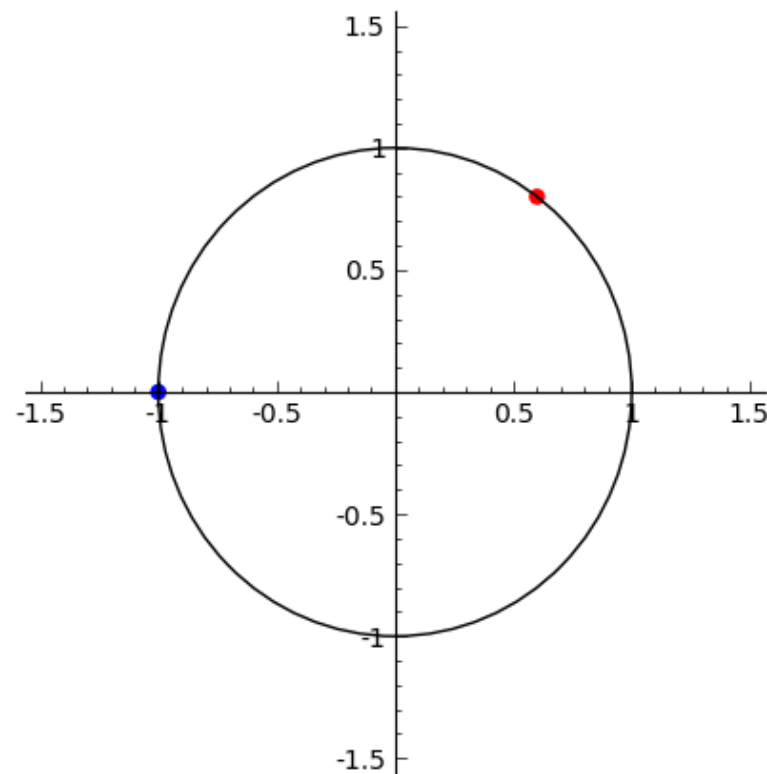
✓ $(-1, 0)$



Racionális pontok az egységgörön

✓ $(-1, 0)$

✓ $(3/5, 4/5)$

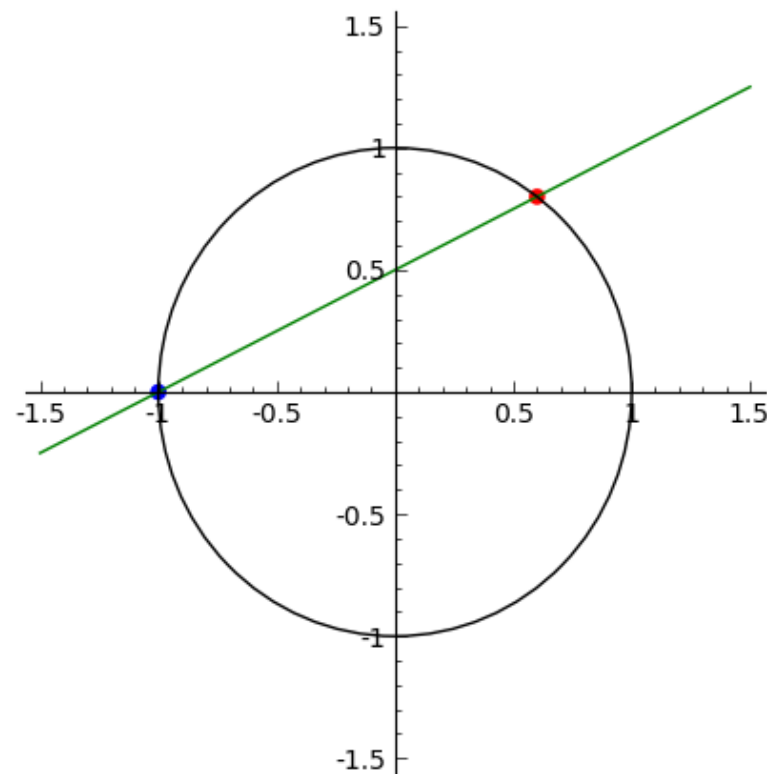


Racionális pontok az egységgörön

✓ $(-1, 0)$

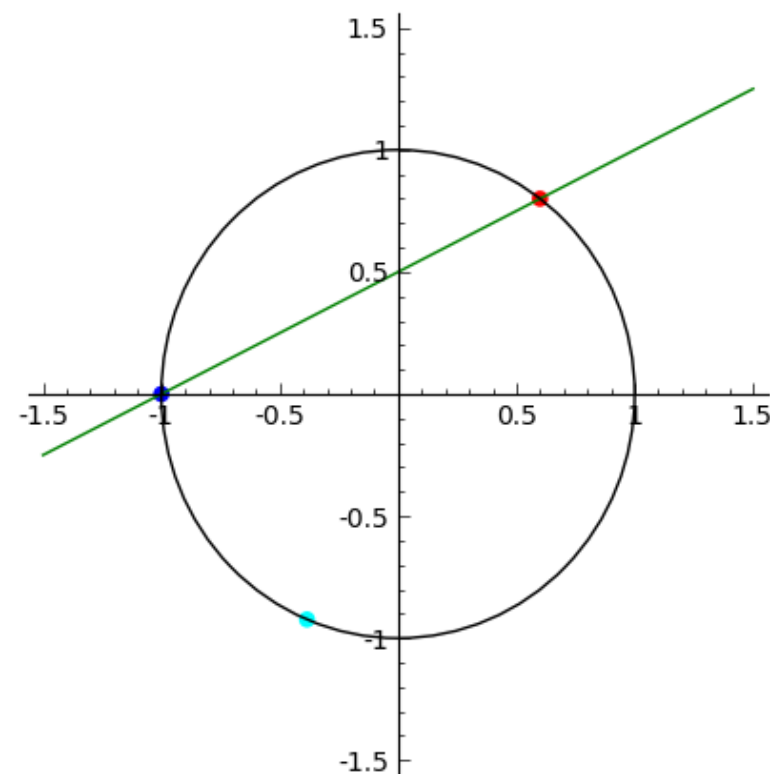
✓ $(3/5, 4/5)$

✓ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



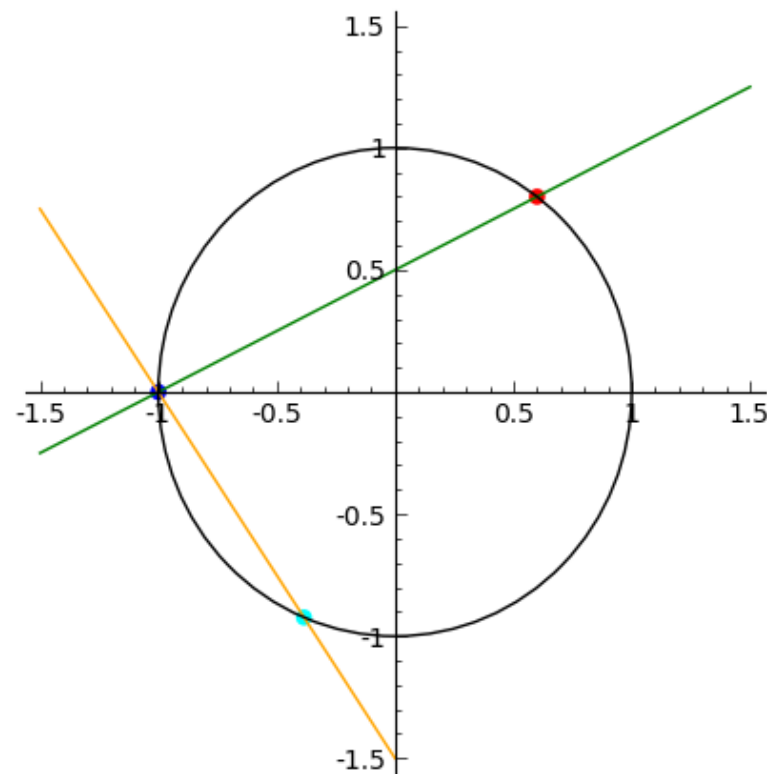
Racionális pontok az egységgörön

- ✓ $(-1, 0)$
- ✓ $(3/5, 4/5)$
- ✓ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
- ✓ $(-5/13, -12/13)$



Racionális pontok az egységgörön

- ✓ $(-1, 0)$
- ✓ $(3/5, 4/5)$
- ✓ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
- ✓ $(-5/13, -12/13)$
- ✓ $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$



Két adott $((x_1, y_1)$ és $(x_2, y_2))$ ponton áthaladó egyenes egyenlete:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Itt $x_1 \neq x_2$ esetén

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x + \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}$$

adódik.

Racionális x_1, x_2, y_1, y_2 esetén a meredekség, $\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$, is racionális.

A $(-1, 0)$ ponton átmenő egyenesek: $y = mx + m$, ahol $m = \frac{y_2}{x_2 + 1}$.

A kör és a $(-1, 0)$ pontokon átmenő m meredekségű egyenes metszéspontjai:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1, \\ y &= mx + m\end{aligned}$$

egyenletrendszerből adódnak. Azaz

$$(m^2 + 1)x^2 + 2m^2x + m^2 = 1.$$

A kör és a $(-1, 0)$ pontokon átmenő m meredekségű egyenes metszéspontjai:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1, \\ y &= mx + m\end{aligned}$$

egyenletrendszerből adódnak. Azaz

$$(m^2 + 1)x^2 + 2m^2x + m^2 = 1.$$

Az egyik megoldás nyilvánvalóan az $x = -1$. A másik megoldás: $x = \frac{1-m^2}{1+m^2}$. A két metszéspont:

$$\begin{aligned}(-1, 0), \\ \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2} \right).\end{aligned}$$

Egységkör racionális pontjai

Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör racionális pontjainak a halmaza

$$\left\{ \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \frac{2m}{1 + m^2} \right) : m \in \mathbb{Q} \right\} \cup \{(-1, 0)\}.$$

Feladat: az $x^2 + y^2 = 2$ egyenletű kör racionális pontjainak parametrikus előállítás a $(-1, 1)$ ponton áthaladó egyenesek segítségével.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

ahol $A, B, C \in \mathbb{Q}$ és $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

ahol $A, B, C \in \mathbb{Q}$ és $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Legyen $A = a_1/a_2, B = b_1/b_2, C = c_1/c_2$, ekkor

$$(a_1 b_2 c_2) x^2 + (a_2 b_1 c_2) y^2 + (a_2 b_2 c_1) z^2 = 0.$$

Elegendő négyzetmentes egész A, B, C értékeket vizsgálni!

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

ahol $A, B, C \in \mathbb{Q}$ és $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Legyen $A = a_1/a_2, B = b_1/b_2, C = c_1/c_2$, ekkor

$$(a_1 b_2 c_2) x^2 + (a_2 b_1 c_2) y^2 + (a_2 b_2 c_1) z^2 = 0.$$

Elegendő négyzetmentes egész A, B, C értékeket vizsgálni!

Legyen $x = x_1/x_2, y = y_1/y_2, z = z_1/z_2$, ekkor

$$A(x_1 y_2 z_2)^2 + B(x_2 y_1 z_2)^2 + C(x_2 y_2 z_1)^2 = 0.$$

Elegendő relatív prím egész x, y, z értékeket vizsgálni!

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

ahol $A, B, C \in \mathbb{Z}$ négyzetmentesek és

$x, y, z \in \mathbb{Z}, \text{LNKO}(x, y, z) = 1$.

Olyan esetet láttunk ($A = B = 1, C = -1$), ahol létezett megoldás, ismertünk egy nem triviális megoldást!

Ez nem mindig van így...

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

ahol $A, B, C \in \mathbb{Z}$ négyzetmentesek és

$x, y, z \in \mathbb{Z}, \text{LNKO}(x, y, z) = 1$.

Olyan esetet láttunk ($A = B = 1, C = -1$), ahol létezett megoldás, ismertünk egy nem triviális megoldást!

Ez nem mindig van így...

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

csak a triviális $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ megoldás létezik.

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = -1,$$

nincs megoldás a valós számok körében.

$$x^2 + y^2 - 3z^2 = 0,$$

létezik valós megoldás, $(x, y, z) = (\sqrt{3}, 0, 1)$.

$$x^2 + y^2 - 3z^2 = 0,$$

létezik valós megoldás, $(x, y, z) = (\sqrt{3}, 0, 1)$. Nézzük meg mi történik moduló 3 redukálva az egyenletet!

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

$$x^2 + y^2 - 3z^2 = 0,$$

létezik valós megoldás, $(x, y, z) = (\sqrt{3}, 0, 1)$. Nézzük meg mi történik moduló 3 redukálva az egyenletet!

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Ez csak úgy lehet, ha $x \equiv 0 \pmod{3}$ és $y \equiv 0 \pmod{3}$.

Ellentmondás, mert feltettük, hogy $\text{LNKO}(x, y, z) = 1$.

Megjegyzés: Hasse-féle elv, lokális megoldhatóság.

Feltesszük, hogy létezik az $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ triviális megoldástól eltérő megoldás. Legyen (x_0, y_0, z_0) egy ilyen megoldás, azaz

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 = 0.$$

Innen

$$(-AC)x_0^2 + (-BC)y_0^2 = (Cz_0)^2.$$

Elegendő eljárást adnunk az

$$ux^2 + vy^2 = z^2$$

alakú egyenletekre, ahol u, v négyzetmentes egészek.

Feltehetjük, hogy $|u| \leq |v|$. Triviális esetek: $|v| = 1$, ekkor $(1, 0, 1)$ vagy $(0, 1, 1)$ megoldás. Feltesszük, hogy $|v| \geq 2$.

Létezik triviálistól különböző megoldás $\Rightarrow$ létezik megoldás moduló $|v|$.

$$u \equiv r^2 \pmod{|v|},$$

ahol $r^2 \equiv (z/x)^2 \pmod{|v|}$ és r választható úgy, hogy $0 \leq r \leq |v|/2$.

Legyen $r^2 - u = vv'd^2$, ahol v' négyzetmentes egész.

Feltehetjük, hogy $|u| \leq |v|$. Triviális esetek: $|v| = 1$, ekkor $(1, 0, 1)$ vagy $(0, 1, 1)$ megoldás. Feltesszük, hogy $|v| \geq 2$.

Létezik triviálistól különböző megoldás $\Rightarrow$ létezik megoldás moduló $|v|$.

$$u \equiv r^2 \pmod{|v|},$$

ahol $r^2 \equiv (z/x)^2 \pmod{|v|}$ és r választható úgy, hogy $0 \leq r \leq |v|/2$.

Legyen $r^2 - u = vv'd^2$, ahol v' négyzetmentes egész. Ekkor

$$|v'| = \left| \frac{r^2 - u}{vd^2} \right| \leq \left| \frac{r^2 - u}{v} \right| \leq \frac{|v|}{4} + 1 < |v|.$$

Tekintsük a következő helyettesítést:

$$x = \frac{rX - Z}{r^2 - u},$$

$$y = \frac{Y}{vd},$$

$$z = \frac{-uX + rZ}{r^2 - u}.$$

Tekintsük a következő helyettesítést:

$$\begin{aligned}x &= \frac{rX - Z}{r^2 - u}, \\y &= \frac{Y}{vd}, \\z &= \frac{-uX + rZ}{r^2 - u}.\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az $ux^2 + vy^2 = z^2$ egyenletbe:

$$\begin{aligned}u \left(\frac{rX - Z}{r^2 - u} \right)^2 + v \left(\frac{Y}{vd} \right)^2 &= \left(\frac{-uX + rZ}{r^2 - u} \right)^2, \\(ur^2X^2 - 2urXZ + uZ^2) + \frac{v(r^2 - u)^2}{v^2d^2} Y^2 &= (u^2X^2 - 2urXZ + r^2Z^2), \\uX^2 + v'Y^2 &= Z^2.\end{aligned}$$

A leszállás elve

Kiindultunk az

$$ux^2 + vy^2 = z^2$$

egyenletből és eljutottunk az

$$uX^2 + v'Y^2 = Z^2$$

egyenletig.

A leszállás elve

Kiindultunk az

$$ux^2 + vy^2 = z^2$$

egyenletből és eljutottunk az

$$uX^2 + v'Y^2 = Z^2$$

egyenletig. Fontos:

$$|u| + |v| > |u| + |v'|.$$

Az eljárást addig folytatjuk, amíg triviálisan megoldható egyenletet nem kapunk.

Példa

$$7x_1^2 - 19y_1^2 = z_1^2$$

$$7 \equiv r_1^2 \pmod{19} \Rightarrow r_1 = 8$$

$$8^2 - 7 = r_1^2 - u_1 = v_1 v_1' d_1^2 = (-19) \cdot (-3) \cdot 1 \Rightarrow v_1' = -3$$

Példa

$$7x_1^2 - 19y_1^2 = z_1^2$$

$$7 \equiv r_1^2 \pmod{19} \Rightarrow r_1 = 8$$

$$8^2 - 7 = r_1^2 - u_1 = v_1 v_1' d_1^2 = (-19) \cdot (-3) \cdot 1 \Rightarrow v_1' = -3$$

$$x_1 = \frac{8x_2 - z_2}{57}$$

$$y_1 = \frac{y_2}{(-19)}$$

$$z_1 = \frac{-7x_2 + 8z_2}{57}.$$

Az új egyenlet:

$$7x_2^2 - 3y_2^2 = z_2^2.$$

$$7x_2^2 - 3y_2^2 = z_2^2$$

$$-3 \equiv r^2 \pmod{7} \Rightarrow r_2 = 2$$

$$2^2 - (-3) = r_2^2 - u_2 = v_2 v_2' d_2^2 = 7 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow v_2' = 1$$

$$7x_2^2 - 3y_2^2 = z_2^2$$

$$-3 \equiv r^2 \pmod{7} \Rightarrow r_2 = 2$$

$$2^2 - (-3) = r_2^2 - u_2 = v_2 v_2' d_2^2 = 7 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow v_2' = 1$$

$$x_2 = \frac{x_3}{7}$$

$$y_2 = \frac{2y_3 - z_3}{7}$$

$$z_2 = \frac{3y_3 + 2z_3}{7}.$$

Az új egyenlet:

$$x_3^2 - 3y_3^2 = z_3^2 \Rightarrow (x_3, y_3, z_3) = (1, 0, 1).$$

$$(x_3, y_3, z_3) = (1, 0, 1)$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{x_3}{7} = \frac{1}{7} \\y_2 &= \frac{2y_3 - z_3}{7} = \frac{-1}{7} \\z_2 &= \frac{3y_3 + 2z_3}{7} = \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy

$$7 \left(\frac{1}{7} \right)^2 - 3 \left(\frac{-1}{7} \right)^2 = \left(\frac{2}{7} \right)^2 \Rightarrow 7 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 = 2^2.$$

Azaz

$$(x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 2).$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 2)$$

$$x_1 = \frac{8x_2 - z_2}{57} = \frac{6}{57} = \frac{2}{19}$$

$$y_1 = \frac{y_2}{(-19)} = \frac{-1}{19}$$

$$z_1 = \frac{-7x_2 + 8z_2}{57} = \frac{9}{57} = \frac{3}{19}.$$

Adódik a következő megoldás:

$$7 \left(\frac{2}{19} \right)^2 - 19 \left(\frac{-1}{19} \right)^2 = \left(\frac{3}{19} \right)^2 \Rightarrow 7 \cdot 2^2 - 19 \cdot 1^2 = 3^2.$$

Azaz

$$(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, 3).$$