Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

Szakdolgozat

Pi formulák

készítette:

Szabó Mariann

témavezető: Dr. Tengely Szabolcs

Debrecen, 2008.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni Dr. Tengely Szabolcsnak, hogy lehetőséget nyújtott szakdolgozatom elkészítéséhez, valamint hogy szakmai tanácsaival mind elméleti, mind gyakorlati téren segítette előrehaladásomat.

Továbbá köszönetet mondok családomnak, akik a kezdetektől fogva családi és anyagi hátteret biztosítottak számomra tanulmányaim sikeres befejezéséhez.

1. Bevezető

A mindennapi életünk során nem telik el úgy nap, hogy ne találkoznánk körrel, kör alakú tárggyal. Nem feltétlenül a matematika rejtelmeiben kell kutatnunk. Elég csak egy egyszerű gyűrűre gondolnunk, vagy egy tányérra, a háromszög alakú kis sajtokat rejtő dobozra, egy tortára, vagy említhetjük az órát is. Bizonyára nagyon sokan bámulták már nagyra nyílt szemekkel, csodálattal a pörgettyűt, amit a gyerekek ma is nagyon szeretnek. Szélesebb körben pedig gondoljunk a gömbre, életünk első pöttyös labdájára, vagy a szerencsejáték sorsolásánál az urnára és a számokat rejtő kis labdákra. Egyszerű kis tárgyak ezek, mégis mindegyikben ott rejlik valahol a π, ha egy kör kerületét, területét keressük. Az ezekhez szükséges ismeretekkel az iskolában találkozunk először. Akkor csodálkozunk rá először a π-re.
Bizonyára elgondolkodott már rajta élete során legalább egyszer minden ember, hogy vajon honnan jöhetett ez a szám, ez a jelölés.
Van valami különös varázsa ennek a különleges számnak. A titok talán éppen abban rejlik, hogy különleges, egyedi, és az ilyen tulajdonsággal felruházott dolgok nagyon sok ember érdeklődését felkeltik. Éppen emiatt esett a választásom erre a témára.
Ismerkedjünk meg tehát ezzel a számmal közelebbről!

A pi egy konstans, egy természeti állandó, amely a bennünket körülvevő világ fontos jellemzője; π-vel jelöljük. Nagyon sok matematikai és fizikai egyenlet elmaradhatatlan együtthatója. Egy valós szám, melyet egy $d = 2r$ átmérőjű kör K kerületének arányaként értelmezünk:

$$\pi = \frac{K}{d} = \frac{K}{2r}.$$

A görög név, $\pi\epsilon\rho\iota\varphi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$, (periféria=kerület) is erre utal. A Pi-t Arkhimédészi-, vagy Ludolph-konstansnak (egy holland π - kutató, Ludolph von Ceulen után) is nevezik.

A π értéke ötven tizedesszámjegyig:

$$3,14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$$

Ez a pontosság elegendő a tudományos munkák során, de a tizedesjegyek száma végtelen. A mai modern számítástechnikai eszközökkel, módszerekkel már több mint egybillió tizedesjegyig kiszámították az értékét.

1.1. A Pi története

A Pi a kör kerületének kiszámításakor jelent meg, mint probléma. A Biblia két hivatkozást is tartalmaz, mely π -nek *három* értéket ad. Meg kell említeni, hogy mindkét eset majdnem biztosan fizikai mérések eredményei.

Királyok I. könyve, 7.23: ”És csinála egy öntött tengert, melyek egyik szélétől fogva a másik széléig tíz sing volt, köröskörül kerek, és öt sing magas, és a kerületit harmincz sing zsinór érte vala körül.”
Ugyanez megtalálható a II. Krónikákban (4.2). Ezek szerint: $\pi = \frac{K}{d} = \frac{30}{10} = 3$.
A babyloniak egy becslése: $3 + \frac{1}{8} = 3,125$.
Az egyiptomi Rhind papiruszon található egy képlet, ami ennek a problémának a megoldásával foglalkozik. Mindez i.e. 1650 körüli időkben. A képletet alkalmazva kapjuk a $\frac{2^8}{3^4} = 3,1605\ldots$ értéket, ami abban az időben rendkívüli pontosságnak számított.
Nem kevesebb, mint 1500 év elteltével Arkhimédész (i.e. 287-212), akit az ókor legnagyobb és a világ egyik legnagyobb matematikusaként tartanak számon, a kör területének kiszámításakor a következő határértékeket állapította meg a kör kerülete és átmérője közötti arányra:

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7} \text{ vagy } 3,140 < \pi < 3,142.$$

Az antik világ utolsó nagy matematika tudósának Apollóniosz Pergiosznak (i. e. 262-205) állítólag sikerült megállapítania a π első négy pontos tizedesét. Erről azonban semmi biztosat nem tudunk, mivel sok műve elveszett.
Mezopotámiában ugyanekkor lényegesen pontatlanabb közelítő értéket használtak, de szinte minden tudós különböző közelítést talált, és alkalmazott.
Kínában a mértékegységek egységesítését rendelték el a Han-dinasztia idején. Ekkor, a matematika történetében egyedülálló esetként, törvény szabta meg a Pi értékét, ami $3,1547$ volt.
A hinduk, Ariabatha - az egyik legnagyobb indiai gondolkodó és csillagász - révén a $3,1416$ közelítő értékkel számoltak 500 körül. Az értékét a perzsák 16 tizedesjegyig számították ki.

Az V. században Tsu Csung Chih, a híres csillagász, Ariabatha kortársa, megállapítja a π első hat pontos tizedesét, és kimutatja, hogy ez a szám a 3,1415926 és a

3,1415927 között van. Ugyancsak neki tulajdonítanak egy másik egész számokból álló arányt is, amely hat tizedesig közelíti meg: $\pi = \frac{355}{113}$.
E nagyszerű felfedezések után azonban a kínai és az indiai matematika hanyatlásnak indul. Ez a korszak egybeesik a rabszolgatartó-rendszer összeomlásával és a feudalizmus megjelenésével.

Egészen az V. századig nem írtak egyetlen olyan könyvet sem Európában, amelyben megemlítenék Arkhimédésznek a π-vel kapcsolatos valamelyik fölfedezését.
Az ókori görögök ismerték az egyiptomiak és a babiloniak eredményeit. Azokban az időkben azonban minden tudományos eredményt nagy titokban tartottak. Ennek abban is látjuk kárát, hogy nem maradt meg az utókor számára Apollóniosz eredményeinek teljes egésze.

Nagyon sok év telt el, míg a probléma elérkezett Európába. A középkor átalakulásainak századai megviselték a görög geometriát, már csak arab kéziratok őrizték. Amelyek aztán fokozatosan tűntek fel latin nyelvre fordítva Európában.
Az egyik ilyen arab kéziratban, melyet a három Banu Musa testvér, Muhhamed, Ahmed és al Hasszan fordított, a kör kerületének és területének megállapításával kapcsolatban a π-nek a következő értékeket tulajdonították: $\pi = \sqrt{10}$ vagy $\pi = \frac{22}{7}$.

Leonardo Fibonacci (1170–1250) 1220-ban írt *Practica geometriae* című művében megemlít egy régóta elfeledett igazságot, nevezetesen, hogy a π értéke nem *egészen pontosan* $3\frac{1}{7}$, hanem csak megközelítőleg annyi. Továbbá arra is rámutat, hogy a π értéke ugyancsak megközelítőleg a $\frac{377}{120}$ aránnyal is kifejezhető. Ez az érték indiai eredetű és Ariakhatától származik; hogy Fibonacci megemlíti a könyvében, arra utal, hogy ismerte az indiai matematikusok műveit is.
Leonardo azonban megnevez egy harmadik közelítő értéket is:

$$\pi = \frac{864}{275} = 3,1418$$

melyet minden valószínűség szerint maga Leonardo állapított meg. A könyv tartalmából egyértelműen látszik, hogy jól ismerte Arkhimédész azon eljárását, amellyel a körbe és a kör köré 96 oldalú sokszöget szerkesztett.
Számításai szerint a π értéke a következő arányok közé esik:

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1448}{458\frac{1}{5}}$$

melyeknek 3,1418 a megközelítő értéke. Tehát Fibonacci pontosan állapította meg a π első három tizedesét.
Nagyszerű logikájával és matematikai ismereteivel Fibonacci messze felülmúlta kortársait.

Azt a tudásszintet, amelyet Arkhimédész felfedezésével megteremtett, csak a XVII. század matematikusainak sikerült felűlmúlniuk.
A XVII. - XVIII. században aztán óriási érdeklődésnek örvendett a matematikusok körében a π természetének megfejtése.

A XVII. század vége fel Adrian Anthonisz (1527–1607) pontosan meghatározta a π értékének első hat tizedesét, $\pi = 3,1415929\ldots$, amelyet a $\frac{355}{113}$ aránnyal fejez ki. Ezt az arányt a kínaiak már az V. században megállapították, az európaiak azonban ez idáig nem ismerték. Elképzelhető, hogy egy misszionárius hozta magával Kínából, de éppúgy lehetséges az is, hogy Európában újra felfedezték. Azonban alig, hogy megállapították ezt az új értéket, a matematikusok szerint ez a hat tizedesjegy túl kevés a π szám azonosításához.

1579-ben Francois Viéte (1540–1604) a π első kilenc tizedesjegyét határozza meg. Egy 393216 oldalú sokszögre alkalmazta Arkhimédész eljárását.
Nem telt el sok idő Viéte felfedezése után, Adrien van Roomen (1561-1615) egy $2^30 = 1073741824$ oldalú sokszöget használva 15 pontos tizedesét állapította meg a π-nek.

1562-ben Ludolph van Ceulen (1540–1610), aki nem volt hivatásos matematikus, Arkhimédész módszerét egy 32 milliárd 512 millió oldalú sokszögre alkalmazva, π első 20 pontos tizedesjegyét állapította meg. Azonban csak 1596-ban hozta nyilvánosságra eredményét, holland nyelven írt *De circulo* című könyvében. Halála után további 15 tizedesszámjegyet találtak kézirataiban.
Ludolph halálos ágyán meghagyta, hogy véssék sírkövére ezeket a számokat, ahogy annak idején Arkhimédész síremlékére a hengerbe szerkesztett gömböt vésték. Emlékét azzal tisztelték meg, hogy hosszú időn keresztül *Ludolph-féle számnak* nevezték a π-t.

1654-ben Huygens a *De circuli magnitudine inventa* című munkájában megmutatta, hogyan szerkeszthetők olyan egyenes szakaszok, melyek elég jól megközelítik a körívet. Egy hatszögre alkalmazva formuláit, π 9 tizedesjegyét állapította meg. Viéte-nek ehhez a közelítéshez egy majdnem 400 ezer oldalú sokszögre volt szüksége.
John Wallis, Euler, James Gregory, Leibniz, T. F. Lagny, Newton végtelen szorzatok segítségével közlítették π értékét. A Newton által megállapított sor segítségével könnyen ki lehet számolni az első 14 tizedesjegyet.
A XVIII. század elején felélénkült a π tizedesszámjegyei utáni hajsza.
Abraham Sharp (1651–1742) a

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \cdots\right)$$

sor tagjainak összegzésével a π 72 tizedesjegyét határozta meg. Nem sokkal később John Machin csillagász 100 tizedesjegyig jutott. Utána Lagny már 148 tizedesig számította ki π értékét. Ezután Euler talált egy újabb sort, amivel a Lagny által megtalált tizedesszámjegyeket 80 óra alatt kiszámolta, és eközben felfedezte, hogy Lagny tévedett a 113. számjegynél egy egységet.
A XIX. században is folytatódott az érdeklődés a π tizedesjegyei után. Persze hibák is akadtak bőven a számításokban, de mindig akadt valaki, aki rátalált a helyes irányra.
Vega 136 pontos tizedesjegyig jutott, William Rutherford 151, Z. Dase, a tehetséges hamburgi számoló, 200 tizedesjegyét mutatta ki. 1847-ben Thomas Clausen 248, míg 1853-ban Z. Dase 440 pontos tizedesjegyet számolt ki, de ebben az évben a rekord mégis William Shanks (1812–1888) nevéhez fűződik, aki 607 tizdesjegyig jutott. 1853-ban már 707 tizedesszámjegyet határozott meg, de 1944-ben a szintén angol Ferguson rájött, hogy az 528. tizedestől hibás a számítás.
1958-ban elektronikus számológépek segítségével a π-nek 10000 tizedesszámjegyét állípították meg. Az első 3000 tizedesjegyet mindössze 10 perc alatt számították ki.

Egy japán számítástechnikai tudós 2002-ben számítógéppel 1,24 billió (!) jegy pontossággal számolta ki a π értékét.

Már a XVIII. századtól tudjuk, hogy a Pi irracionális szám. Elsőként 1767-ben Johannes Heinrich Lambert (1728–1777) mutatta ki. Adrien Marie Legendre (1752–1833) 1794-ben megjelent *Elements de géomtrie* című munkájában egy új és pontosabb bizonyítást adott a π és π^2 irracionális voltára. Charles Hermite (1822–1901) 1873-ban közölt egy újabb bizonyítást. A XX. századi matematikusokat is foglalkoztatta ez a kérdés, íme néhány név: Nagell 1951; Niven 1956; Struik 1969; Königsberger 1990; Schröder 1993; Stevens 1999; Borwein és Bailey 2003.
Ferdinand Lindemann (1852–1939) fedezte föl a π transzcendens voltát 1882-ben. Lindemann bizonyításának Klein 1955-ben egy egyszerűsített, de mégis bonyolult verzióját mutatta meg.

Ha a π szám egy irracionális algebrai szám, akkor fel lehetne tételezni, hogy létezhet olyan algebrai egyenletsorozat, amely lépésről lépésre való megoldás útján vezessen el egy irracionális együtthatójú egyenlethez, és így adja meg egy körzővel és vonalzóval való szerkesztés lehetőségét is. Csak 1844-ben mutatta ki Liouville, hogy léteznek olyan irracionális számok is, amelyek egyetlen racionális együtthatójú algebrai egyenletnek sem gyökei. Ő adta meg az első példákat is egyes ilyenfajta *nem algebrai* számok szerkesztésére, amelyeket *transzcendens* számoknak nevezett el. Ennek a felfedezésnek az alapján a matematikusoknak lehetőségük nyílt arra, hogy pontosabban fogalmazzák meg a π szám természetére vonatkozó kérdést: algebrai vagy transzcendens szám-e a π? Az ókori görög probléma, a kör négyszögesítésének a lehetetlensége csak akkor bizonyított tény, ha ki lehetne mutatni, hogy a π transzcendens szám, vagyis hogy a π nem lehet gyöke egyetlen racionális együtthatójú algebrai egyenletnek sem.

Azt is tudjuk, hogy π nem Liouville-szám, melyet Mahler bizonyított be 1953-ben.
Joseph Liouville (1809–1882) megmutatta, hogy több transzcendens szám az $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} +$ alakban írható, ahol $n > 1$ valós szám.

A π szimbólumot először egy Welsh-i matematikus, William Jones használta 1706-ban a *Synopsis palmariorun matheseos* című munkájában. A π betű állandó használatáig különböző jelöléseket alkalmaztak, például: $\frac{\pi}{\sigma}$, $\frac{c}{r}$. Aztán 1734-től kezdve alkalmazta Euler, igaz nem következetesen. 1736-tól ezt a jelölést használta a Goldbach és Bernoulli testvérekhez írott leveleiben, majd 1784-ben, az *Introductiv in analysis infinitorum* című könyvében. Azóta ezt a jelölést véglegesnek tekintették, és így használja az összes matematikus.

1.2. Érdekessségek

Az 1988-ban Darren Aronofsky filmet forgatott a híres számról. A Pi című film egy sötét, különös és hiperkinetikus alkotás, mely egy matematikusról szól, aki lassan elmebeteggé válik egy, az Értéktőzsdéhez való képlet keresése során. Egy Hasidic nevű titkos szekta és egy Wall Street-i cég is elsajátítja az ő kutatását, és megpróbálják magukhoz csábítani őt. Sajnos, a film alapjában véve a valódi matematikával egyáltalán nem foglalkozik.

314159, π első 6 számjegye. Ez a kombinációja *Carl Sagan: Kapcsolat* című regényében Ellie irodai széfjének. A regény végén olvashatunk egy kitalált példát a π értékének nagyon-nagyon pontos kiszámítására. Itt az okos rádiócsillagász lány keresi létezésünk, sőt világunk létezésének okait. A π kutatásával próbálkozik, és igen meglepő eredményre jut, ami a regényből készült látványos filmből sajnos kimaradt.

A π eddig kiszámított egymás után következő számjegyei között nem találtak semmilyen ismétlődési mintát, előfordul azonban egy érdekes részlet: egyszer szerepel a 271828182845, ami az **e** természeti állandó.

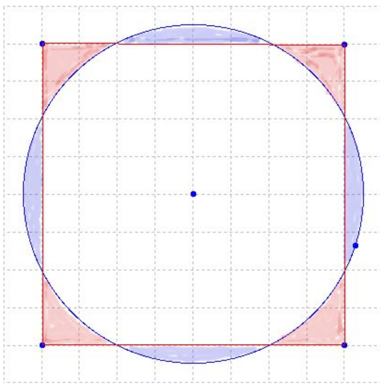
A Willim Shanks által talált 707 tizedesszámjegyet megörökítették a párizsi Fel-

fedezések Palotája egyik frízén.
Ugyancsak a párizsi Felfedezések Palotájában, a matematika osztályának egyik ajtaja fölé van vésve Euler egyik híres relációja:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

A képletben, ha x felveszi a π értékét, az $e^{i\pi} = -1$ összefüggést kapjuk. Ami azért is különös, mert az e valós számot az $i\pi$ imaginárius hatványra emelve, a -1 valós számot kapjuk eredményül.

Leonardo da Vincit (1452–1519) is érdekelte a kör négyszögesítésének problémája. Azonban műveltsége, vagy talán intiúciói arra késztették, hogy kételkedjen a körzővel és vonalzóval való megoldásban. A művész ismerte Arkhimédésznek a kör mérésére vonatkozó munkáit is. Hátramaradt írásaiban a következő megjegyzéssel találkozhatunk: *"A kör négyszögesítése – jó az elnevezés, de rossz a megfogalmazása. Az elnevezés azért jó, mert Arkhimédész szerint a kör területe egy, a kör kerületéből és félátmérőjéből alkotott derékszögű háromszög területével egyenlő; a megfogalmazás azonban helytelen, mert tulajdonképpen egy 96 oldalú sokszög négyszögesítését állapítja meg, olyanét, amelyből hiányzik a 96 oldal által levágott 96 szelet. Ez semmiképp sem nevezhető a kör négyszögesítésének; nem kevésbé igaz azonban, hogy lehetetlen ezt másképp csinálni."*
D. E. Smith a következőket írta: *"Leonardo da Vincit jeles matematikusként emlegetnék, ha másirányú kiválóságai nem homályosítanák el matematikusi hírnevét."*



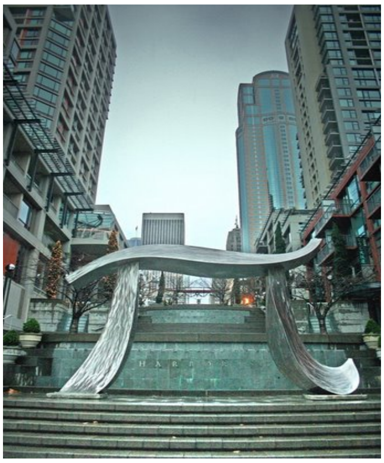
Akadtak szélhámosok is, akik nagy pénzeket akartak keresni a kör négyszögesítésével. Íme egy példa: két léhűtő összeállt, engedélyt váltott ki és »Négyszögesítő Irodát« nyitott. Prospektusukban ezt írták: "Mióta világ a világ, létezik egy összemérhető és állandó arány a kör és egy adott egyenesoldalú sokszög között. Ez a pontos arány $9\frac{179}{200}$-zal egyenlő! Keresse föl rendeléseivel a »Négyszögesítő Irodát«".

A henger térfogatának képlete egy matematikai vicchez vezet: "Mekkora egy pizza térfogata, ha a vastagsága a és sugara $\mathbf{z}$?" A válasz: Pi$\mathbf{zz}a$. Ez az eredmény 2. pizza - tételként is ismert.

Március 14-e a pi napja, 1988 óta ünnepeljük. Tovább is bontható ez a nap, van tehát pi perc, sőt másodperc is. Amit a további tizedesjegyek alapján állapíthatunk meg: 1 óra 59 perc és 26 másodperc. Erre a rendkívüli napra egyre több figyelem összpontosul. Ma már lehet a π szimbólummal ellátott ereklyéket vásárolni, a pólón át a bögréig. Sőt, még sokan tortával köszöntik e jeles napot, méghozzá kör alakú tortával, amin akár egy szimbólum is szerepelhet.

Véletlenül éppen a március 14-i pi napon született a zseniális fizikus, Albert Einstein.

Egy szoborral is megtisztelték ezt a különleges számot. Ez a szobor Seattle-ben, Washington államban található.



A Brüsszelben található Európai Unió szimbólumaként ismert gömbökben is ott rejlik a pi szám. A gömbök egyenlő távolságra vannak egymástól, és mindegyik gömb azonos méretű.

A mnemotechnikai verseknek egyik fajtáját az olyan versek (szövegek) képezik, amelyek számneveket nem is tartalmaznak, hanem a szöveg minden egyes szavának a betűi száma adja a megjegyzésre szánt számsorozatot. Ez utóbbi versek főleg sokjegyű szám, illetőleg hosszú tizedes tört számjegyeinek megjegyzésére alkalmasak, amennyiben a számjegyek között nem szerepel nulla.
Minden idők legjobb – a fenti kritériumoknak eleget tevő – magyar nyelvű piversét Szász Pál matematikus írta 1952-ben:

3 1 4 1 5 9
Nem a régi s durva közelítés,
2 6 5 3 5
Mi szótól szóig így kijön
8 9
Betűiket számlálva.
7 9 3
Ludolph eredménye már,
2 3 8 4 6
Ha itt végezzük húsz jegyen.
2 6 4 3 3 8
De rendre kijő még tíz pontosan,
3 2 7 9
Azt is bízvást ígérhetem.

A matematikában sok végtelen tört van, de a pi mindenkit megbabonáz. Mert elbűvölő, hogy egy rendkívül bonyolult számban egy olyan végtelenül egyszerű fogalom rejlik, mint a kör.

2. Eredmények

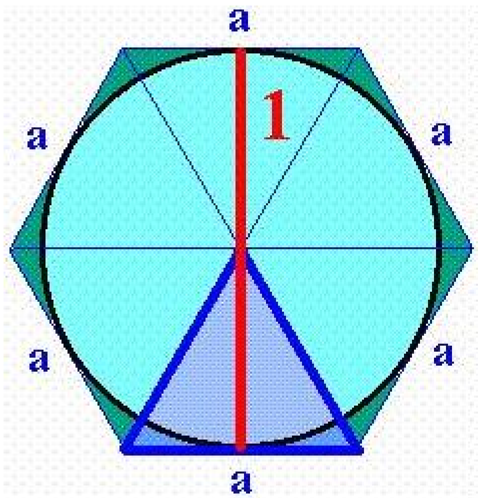
2.1. Az egységnyi átmérőjű kör kerülete

Bevezetésként az egyik legismertebb formula bizonyítása következik.

Az r sugarú kör kerülete:

$$K = 2r\pi \tag{2.1.1}$$

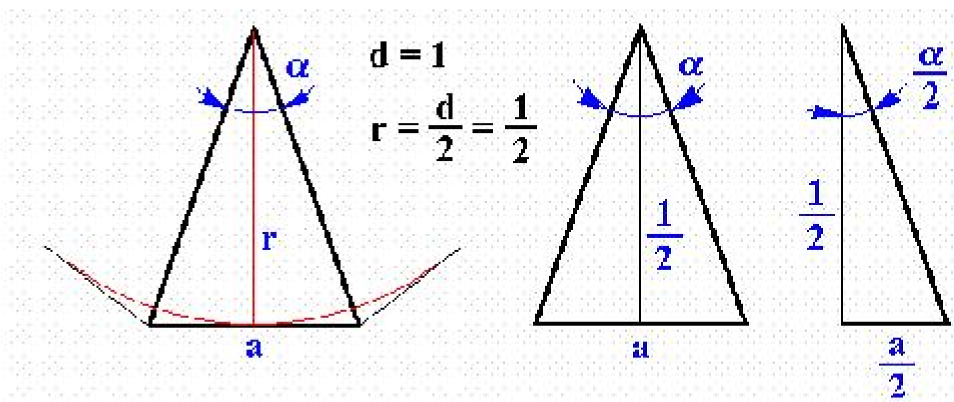
Egy kör köré rajzolt egyenlőoldalú érintősokszög, illetve a körbe rajzolt egyenlőoldalú húrsokszög kerülete a sokszög oldalszámának növelésével egyre közelebb kerül a kör kerületéhez, de nem éri el azt.
A sokszög felbontható egyenlőszárú, egybevágó háromszögekre. Az érintősokszög módszerével fogjuk π-t kiszámítani.



$$K_{\text{kör}} = K_{\text{sokszög}} = n \cdot a \tag{2.1.2}$$

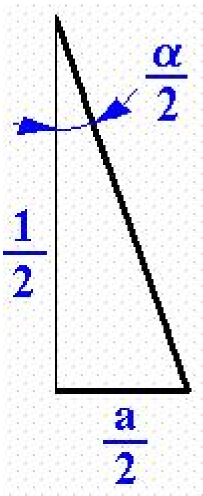
Az ábrán egy egységnyi átmérőjű kört láthatunk, amely köré egy érintősokszöget rajzoltunk.
Bármilyen n oldalszámú sokszöget választunk, az mindig egybevágó egyenlőszárú

háromszögekből áll; pontosan annyiból, ahány oldalú a sokszög.
A sokszög kerülete egyenlő az egyenlőszárú háromszögek a alapjainak összegével, ami látható az ábrából. Minél nagyobb a sokszög oldalainak száma annál jobban megközelíti az összeg a kör kerületét.
Ha tudjuk, hogy a sokszögünk hány oldalú, akkor már csak az a hosszúságot kell kiszámolnunk. Majd a-t az oldalak n számával beszorozva kapjuk a kör kerületének közelítő értékét.
Az a hosszúságot az alábbi ábra alapján határozhatjuk meg:



$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{szemközti oldal}}{\text{melletti oldal}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{1} = a$$

A kör köré rajzolt érintősokszögnek az egyik háromszögéből indulunk ki. Az ábrából kitűnik, hogy az egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó magassága pontosan a kör sugara, azaz $\frac{1}{2}$. Ez a magasságvonal a háromszög szimmetriatengelye is.
Számításainkat a háromszög szimmetriatengelyétől jobbra eső derékszögű háromszögön végezzük el.
Az ábrán a derékszögű háromszög hosszabbik befogója ismert, 1/2. A háromszög α szögét a következőképpen számíthatjuk ki: a kör teljes, 360°-os szöge egyenlő arányban oszlik meg a sokszöget alkotó háromszögek között. Azaz $\alpha = 360°/n$, ahol n a sokszög oldalainak száma.
Az a értékét a derékszögű háromszögekre vonatkozó függvények segítségével kaphatjuk meg:



$$
\begin{aligned}
\tan\frac{\alpha}{2} &= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}} \\
\frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}} &= \frac{a}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{1} = a \\
\tan\frac{\alpha}{2} &= a
\end{aligned}
$$

α értékét behelyettesítve:

$$a = \tan\frac{360°/n}{2}.$$

Egyszerűsítés után:

$$a = \tan\frac{180°}{n}.$$

Ez alapján számíthatjuk ki az érintősokszög egyik oldalának hosszát, aminek felhasználásával a kör kerülete:

$$
\begin{aligned}
K_{\text{kör}} &= n \cdot a \\
K_{\text{kör}} &= n \cdot \tan\frac{180°}{n} \\
K_{\text{kör}} &= n \cdot \tan\frac{\pi}{n}
\end{aligned}
$$

Bármilyen nagy oldalszámot is választunk, az érintősökszög kerülete mindig valamivel nagyobb, mint a köré.

$\otimes$

2.2. Pi irracionális

Ezt már az ókor legnagyobb gondolkodója, Arisztotelész (i.e. 384–322) is sejtette, amikor a kör sugaráról és kerületéről azt állította, hogy nem összemérhetők. Bár nem volt matematikus, nagyon érdekelte ez a tudományág, amelyre számos utalás esik műveiben.
Az első bizonyítást erre az alapvető tulajdonságra Johannes Heinrich Lambert adta 1766-ban.

Az alábbi bizonyítás 1947-ből, Ivan Niventől származik. Rendkívül elegáns egyoldalalas bizonyítás, mely csak elemi analízist használ.

Iwamoto és Koksma is megmutatta, hogy:

- π^2 irracionális (ez erősebb állítás)
- e^r irracinonális minden $r \neq 0$ racionális számra.

Niven módszerének gyökerei és előzményei egészen 1873-ig, Charles Hermite klasszikus cikkéig nyúlnak vissza, melyben először mutatta meg, hogy e transzcendens, vagyis hogy e semmilyen racionális együtthatós polinomnak nem gyöke.

$$e := 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots = 2,718281828\ldots \tag{2.2.1}$$

Mivel π^2 irracionális volta erősebb állítás, ezért az alábbiakban ezt az állítást bizonyítjuk.

2.2.1. Tétel. π^2 *irracionális.*

2.2.1. Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $\pi^2 = \frac{a}{b}\quad a, b > 0$ egészekre. Most az

$$F(x) := b^n(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(n)}(x) I \ldots) \tag{2.2.2}$$

polinomot fogjuk használni, mely kielégíti az

$$F''(x) := -\pi^2 F(x) + bn\pi^{2n+2} f(x) \tag{2.2.3}$$

azonosságot.

2.2.1. Lemma. *Valamely rögzített* $n \geq 1$*-re legyen*
$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$

(i) *Az $f(x)$ függvény $f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$ alakú polinom, ahol a c_i együtthatók egészek.*

(ii) *$0 < x < 1$-re és $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ teljesül.*

(iii) *Az $f^{(k)}(0)$ és az $f^{(k)}(1)$ minden $k \geq 0$-ra egészek.*

Bizonyítás:
Az (i) és (ii) nyilvánvaló. Az (iii)-hez vegyük észre, hogy az $f^{(k)}$ k-adik derivált $x = 0$-ban eltűnik, hacsaknem $n \leq k \leq 2n$, ebben a tartományban viszont $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}c_k$ egész. Másrészt $f(x) = f(1-x)$-ből $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$ minden x-re, ezért $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(0)$, tehát szintén egész.

$\oslash$

A lemma (iii) állítása miatt $F(0)$ és $F(1)$ egészek. Elemi deriválási szabályok alapján

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left[F'(x)\sin\pi x - \pi F(x)\cos\pi x\right] = && (2.2.4)\\ = \ & \left(F''(x) + \pi^2 F(x)\right)\sin\pi x = \\ = \ & b^n \pi^{2n+2} f(x)\sin\pi x = \\ = \ & \pi^2 a^n f(x)\sin\pi x && (2.2.5) \end{aligned}$$

Így ezt kaptuk:

$$\begin{aligned} N := & \int_0^1 a^n f(x)\sin\pi x dx = \left[\frac{1}{\pi}F'(x)\sin\pi x - F(x)\cos\pi x\right]_0^1 = \\ = & \ F(0) + F(1) && (2.2.6) \end{aligned}$$

ami egész. Továbbá N pozitív, hiszen egy (a határokat leszámítva) pozitív függvény integráljaként definiáltuk. Ha azonban n-et olyan nagynak választjuk, hogy $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$ legyen, a Lemma (ii) állításából

$0 < N < \pi\int_0^1 a^n f(x)\sin\pi x dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1$-et kapunk, ami ellentmondás.

$\otimes$

2.3. Buffon tűproblémája

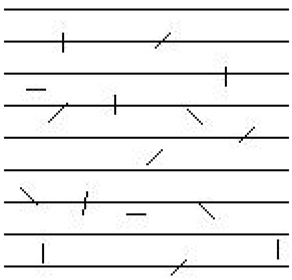
Egy francia nemes, Georges Louis Leclerc, Buffon grófja (1707-1788) 1777-ben az alábbi problémát vetette fel:

Ha leejtünk egy tűt egy vonalas lapra, mi a valószínűsége annak, hogy a tű keresztezni fog egy vonalat?

A valószínűség a lap vonalainak d távolságától és a tű l hosszától függ, vagyis inkább az l/d aránytól. A rövid tű számunkra $l \leq d$ hosszt fog jelenteni. Másszóval, rövid tű az, ami nem metsz több vonalat egyszerre (két vonalat nulla valószínűséggel érint). A válasz Buffon kérdésére talán meglepő: π-vel van összefüggésben.

2.3.1. Tétel. *(Buffon tűproblémája):*
Ha egy rövid, l hosszúságú tűt leejtünk egy egyenlő, $d \geq l$ távolságú közökkel vonalazott papírlapra, akkor annak a valószínűsége, hogy a tű keresztezni fogja valamelyik vonalat, pontosan:

$$p = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{d} \tag{2.3.1}$$



2.3.1. Bizonyítás (1)

Ebből az eredményből közelítő értéket kaphatunk π-re. Ugyanis, ha egy tűt N-szer ejtünk le, és a tű P esetben metsz vonalat, akkor $\frac{P}{N}$ megközelítőleg $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{d}$-vel egyenlő, ebből

$$\pi \approx \frac{2l}{d} \cdot \frac{N}{P}.$$

A legalaposabb vizsgálatot Lazzarini végezte 1901-ben.
Ha tetszőleges hosszúságú tűt (hosszút vagy rövidet) ejtünk le, a metszéspontok számának várható értéke:

$$E = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots,$$

ahol

- p_1 annak a valószínűsége, hogy a tű pontosan egy vonalat fog metszeni,
- p_2 az a valószínűség, melyet pontosan 2 metszéspont esetén kapunk,
- p_3 a három metszéspont valószínűsége, stb.

Annak a valószínűsége, hogy legalább egy metszéspont lesz (ezt kérdezi a Buffon probléma):

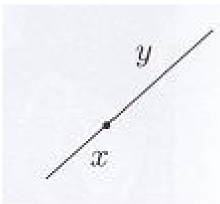
$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

Megjegyzés. Azoknak az eseményeknek a valószínűsége, amikor a tű pontosan a vonalon fekszik, vagy egyik végpontja esik valamelyik vonalra: nulla. Ezért ezeket az eseteket elhanyagolhatjuk a probléma tárgyalásakor.

Másrészt annak a valószínűsége, hogy a tű egynél több vonalat metsz, ha rövid: nulla, $p_2 = p_3 = \ldots = 0$, így $E = p$-t kapunk, vagyis a keresett valószínűség éppen a keresztezések várható értéke. Ez az átfogalmazás nagyon hasznos, hiszen kihasználhatjuk a várható érték linearitását.
Egy l hosszúságú egyenes tű leejtésekor keletkezett metszéspontok várható száma legyen $E(l)$. Ha ez a hossz: $l = x + y$, és a hossz x első, illetve y második részét külön vizsgáljuk,akkor az

$$E(x + y) = E(x) + E(y)$$

eredményt kapjuk. Hiszen mindig az első és a második rész összege lesz a keletkezett metszéspontok száma.

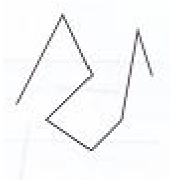


A függvényegyenletből, n szerinti indukcióval $E(nx) = n \cdot E(x)$-et kapunk minden $n \in \mathcal{N}$-re, és ekkor

$$mE\left(\frac{n}{m}x\right) = E\left(m\frac{n}{m}x\right) = E(nx) = nE(x),$$

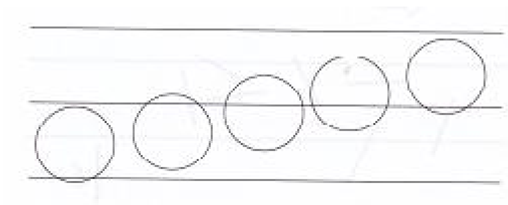
vagyis minden $r \in \mathcal{Q}$ racionális számra $E(rx) = rE(x)$ teljesül. Továbbá $E(x)$ monoton, ha $r \geq 0$, amiből

$E(x) = c \cdot x$-et kapunk minden $x \geq 0$-ra, ahol $c = E(1)$ valamilyen konstans. Ezen konstans meghatározásához más alakú tűket használunk. Ha leejtünk egy egyenes darabokból álló "töröttvonal" tűt, melynek teljes hossza l, akkor a keletkezett metszéspontok száma (1 valószínűséggel) az egyenes darabok metszéspontjainak összege.

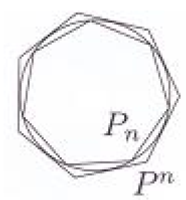


Azaz a metszéspontok várható számának ugyancsak az $E = c \cdot l$ értéket kaptuk a várható érték linearitása miatt.

Megjegyzés. Itt nem számít, hogy az egyenes darabok rugalmasan vagy mereven csatlakoznak.



Barbier megoldásának kulcsa az, hogy egy tökéletes d átmérőjű, $x = d \cdot \pi$ hosszúságú, kör alakú tűt vett. Ha egy vonalas papírlapra ilyen tűt ejtünk, akkor az minden alkalommal pontosan két metszéspontot eredményez.



A kört sokszögekkel lehet közelíteni. Így a kör alakú C tűvel a lapra ejtünk egy P_n beírt és egy P^n köréírt sokszöget is. Minden vonal, amely metszi P_n-et, C-t is metszeni fogja, és minden C-t metsző vonal P^n-et is metszi majd. Azaz a metszéspontok várható száma az

$$E(P_n) < E(C) < E(P^n)$$

egynelőtlenséget kielégíti. Mivel P_n és P^n is sokszögek, így mindkét esetben a metszéspontok száma "c-szer a hossz"', míg C-re ez az érték 2, tehát

$$cl(P_n) < 2 < cl(P^n) \tag{2.3.2}$$

P_n és P^n is közelíti C-t, ha $n \to \infty$. Speciálisan

$$\lim_{n\to\infty} l(P_n) = d\pi = \lim_{n\to\infty} l(P^n) \tag{2.3.3}$$

és így $n \to \infty$-re (2.3.2)-ből

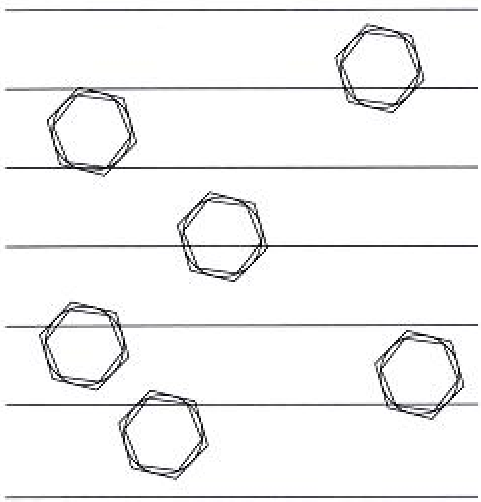
$$cd\pi \leq 2 \leq cd\pi$$

következik, ami $c = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{d}$-t ad.

$\otimes$

2.3.2. Bizonyítás (2)

Bizonyítás analízissel!
A tűprobléma egy (egyszerű) integrál kiszámításával megoldható. Ehhez először a tű meredekségét vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy amikor leesik, α szöget zár be a vízszintessel, ahol $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.



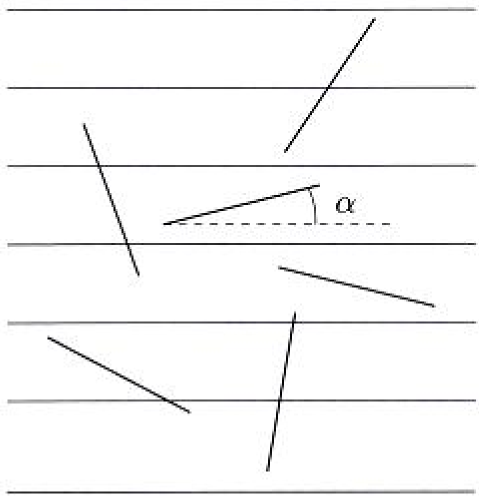
Megjegyzés. Elhanyagolhatjuk azt az esetet, amikor a tű negatív szöget zár be a vízszintessel. Ugyanis ez a pozitív esettel szimmetrikus, így ugyanazt a valószínűséget adja.

Az α szögben fekvő tű hossza $l \sin\alpha$, és annak a valószínűsége, hogy egy ilyen tű az egymástól d távolságban elhelyezkedő vízszintes vonalak valamelyikét metszi:

$$\frac{l \sin\alpha}{d}.$$

Tehát a valószínűséget a lehetséges szögek szerinti átlagolással kapjuk:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{l\sin\alpha}{d} d\alpha = \frac{2}{\pi\cdot\frac{l}{d}\int_0^{\pi/2}\sin\alpha d\alpha} \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{l}{d}\left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{l}{d}\cdot(0-(-1)) \end{aligned} \tag{2.3.4}$$



Hosszú tűre is ugyanezt az $\frac{l\sin\alpha}{d}$ valószínűséget kapjuk, ha $l\sin\alpha \leq d$, vagyis $0 \leq \alpha \leq \arcsin\frac{d}{l}$.

A tű nagyobb α szögekre azonban egy vonalat mindenképpen metsz, tehát a valószínűség 1. Így $l \geq d$-re

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\arcsin(d/l)} \frac{l\sin\alpha}{d} + \int_{\arcsin(d/l)}^{\pi/2} 1 d\alpha\right) && (2.3.5)\\
p &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}\int_0^{\arcsin(d/l)} \sin\alpha + [\alpha]_0^{\pi/2}\right)\\
p &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}[-\cos\alpha]_0^{\arcsin(d/l)} + \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{d}{l}\right)\\
p &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}\left(1-\sqrt{1-\frac{d^2}{l^2}}\right) + \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{d}{l}\right)\\
p &= 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{d}\left(1-\sqrt{1-\frac{d^2}{l^2}}\right) - \arcsin\frac{d}{l}\right) && (2.3.6)
\end{aligned}
$$

$\otimes$

$l = d$-re a formula $\frac{2}{\pi}$-t ad, l-ben szigorúan nő, valamint 1-hez tart, ha $l \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
p &= 1 + \frac{2}{\pi}\left((1-\sqrt{1-1}) - \arcsin 1\right)\\
p &= 1 + \frac{2}{\pi}(1 - \underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}})\\
p &= 1 + \frac{2}{\pi} - \underbrace{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}}_{1}\\
p &= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

Ma már nagyon sok weblapot találunk, amelyek matematikával foglalkoznak. Az egyik ilyen lapon* tesztet is futtathatunk arra vonatkozólag, hogy a Buffon tűprobléma valóban a pi közelítő értékét adja eredményül.

2.4. Az Euler-féle sor

Tudjuk, hogy a $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ sor divergens, sőt még a $\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p}$ sor is.
Viszont a négyzetek reciprokösszege konvergens, és érdekes határértéket ad.

2.4.1. Tétel. *(Euler sor):*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{2.4.1}$$

*http://www.angelfire.com/wa/hurben/buff.html

Ez az állítás Euler egy kalsszikus, híres és fontos tétele 1734-ből. Egyik rendkívül fontos következménye, hogy a Riemann-féle zéta függvény első nemtriviális értékét, $\zeta(2)$-t adja meg. Ez az érték irracionális.
Az eredményen kívül a bizonyítások sokszínűsége is rendkívül érdekes színfoltja a matematikatörténetnek.

2.4.1. Bizonyítás (1)

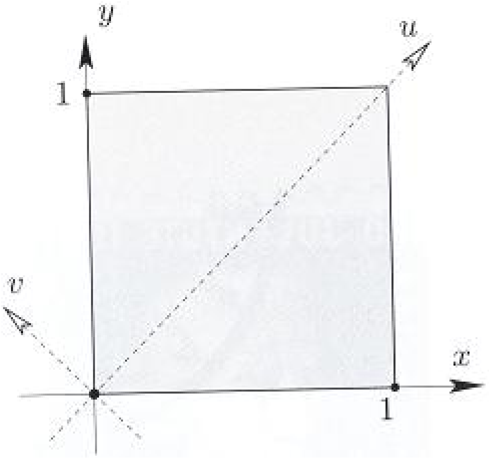
William J. LeVeque számelmélet feladatgyűjteményében jelent meg feladatként az első bizonyítás, 1956-ban. Majd később Tom Apostol újra felfedezte. A bizonyítás az

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy$$

kettős integrál kétféle kiszámításán alapul. Az elsőhöz az $\frac{1}{1-xy}$-t mértani sorrá fejtjük, szorzatokra bontjuk az összeadandókat, majd integrálunk:

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n\geq 0} (xy)^n dxdy = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dxdy \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\int_0^1 x^n dx \right) \left(\int_0^1 y^n dy \right) = \sum_{n\geq 0} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{n+1} y^{n+1} \right]_0^1 \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{n+1} - 0 \right) \cdot \left(\frac{1}{n+1} - 0 \right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).
\end{aligned}$$

A számítás azt is megmutatja, hogy a (pozitív függvényen vett, $x = y = 1$ pólusú) kettős integrál véges. Megfigyelhetjük, hogy az előbbi levezetés visszafelé olvasva is egyszerű. $\zeta(2)$ kiértékelése tehát az I kettős integrál kiértékeléséhez vezet.



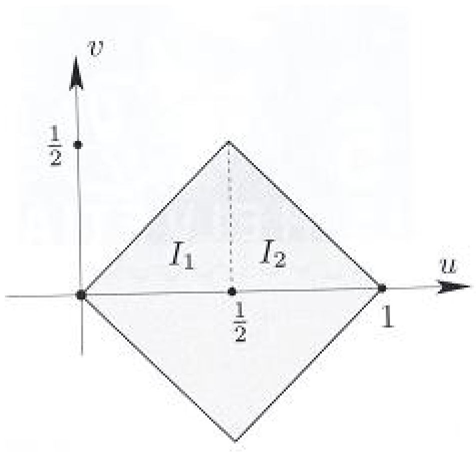
I másik kiszámításához megváltoztatjuk a koordinátákat. Az új kooordinátákat az

$$u := \frac{y+x}{2} \text{ és a } v := \frac{y-x}{2}$$

kifejezések adják.
Az eredeti integrálási tartományból úgy kapjuk az újat, hogy az eredeti koordinátarendszert 45°-kal elforgatjuk, majd $\sqrt{2}$-ed részére kicsinyítjük. Így tehát az új integrálási tartomány egy $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oldalú négyzet.
Behelyettesítve $x = u - v$-t és $y = u + v$-t

$$1 - xy = \frac{1}{1 - u^2 + v^2}$$

adódik.
Az integrál átalakításához $dxdy$-t $2dudv$-vel helyettesítjük hogy a koordinátatranszformáció miatti területfeleződést kompenzáljuk (a transzformáció Jacobi determinánsa 2, amire azért van szükség, mert helyettesítéses integrálást alkalmaztunk). Az u tengelyre nézve az új integrálási tartomány és az integrálandó függvény szimmetrikusak, ezért a tartomány felső felében kétszer kell kiszámítani az integrált, melyet két részre vágunk.



$$4\int_0^{1/2}\left(\int_0^u -\frac{dv}{1-u^2+v^2}\right)du + 4\int_{1/2}^1\left(\int_0^{1-u}\frac{dv}{1-u^2+v^2}\right)du.$$

Felhasználva, hogy $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$:

$$\begin{aligned} I &:= 4\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{dv}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right]_0^u + 4\int_{1/2}^1\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{dv}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right]_0^{1-u} \\ &= 4\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du + 4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du \end{aligned}$$

a kapott érték.

Az integrálok meghatározásához közvetlenül kiszámítjuk, hogy a

$g(u) := \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$ függvény deriváltja $g'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$,

míg a

$h(u) = \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right)$ deriváltja $h'(u) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

Tehát használhatjuk a következő formulát:

$$\int_a^b f'(x) = f(x)dx = \left[\frac{1}{2}f(x)^2\right]_a^b = \frac{1}{2}f(b)^2 \cdot f(a)^2$$

és így

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{1/2} g'(u)g(u)du + 4\int_{1/2}^1 -2h'(u)h(u)du \\ &= 2\left[g(u)^2\right]_0^{1/2} - 4\left[h(u)^2\right]_{1/2}^1 \\ &= 2g\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2g(0)^2 - 4h(1)^2 + 4h\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 - 0 + 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = 6\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$\otimes$

Az Euler sor értékét ebből a bizonyításból egy egyszerű koordináta-transzformációval, integrálással kaptuk. Hasonló jellegű bizonyítást később Beukers, Calabi és Kolk talált, melyben egy triviálisnak egyáltalán nem nevezhető koordinátatranszformációt használtak. Bizonyításuk kiindulópontja az, hogy páros és páratlan tagokra bontották fel a $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ sort.

Az $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k)^2}$ páros tagok összege $\frac{1}{4}\zeta(2)$, tehát a páratlan tagok:

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k+1)^2}$ a teljes $\zeta(2)$ érték 3/4-ét teszik ki.

Tehát az Euler sor a páratlan tagokra vonatkozó egyenlőséggel ekvivalens:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2.4.2. Bizonyítás (2)

Az első bizonyításhoz hasonlóan az összeget egy kettős integrállal fejezzük ki, mégpedig

$$J \;=\; \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2} dxdy = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \tag{2.4.2}$$

A J integrált kell kiszámolunk. Beukers, Calabi és Kolk javaslata alapján a bevezetett új koordináták:

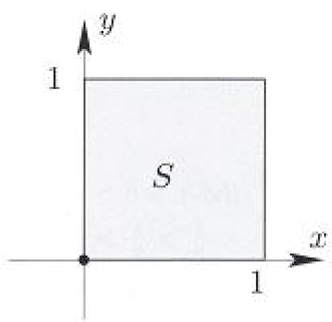
$$u := \arccos \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}$$

$$v := \arccos \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}$$

Nem vesszük figyelembe a kettős integrál kiszámításakor az integrálási tartomány határát, $0 < x < 1$, illetve $0 < y < 1$ tartományban vizsgáljuk x-et és y-t. Ekkor az u és v az $u > 0$, $v > 0$, $u + v < \pi/2$ háromszögben fekszik.

A koordináta-transzformácó explicit inverze a következő helyettesítésre vezet:

$x = \frac{\sin u}{\cos v}$ és $y = \frac{\sin v}{\cos u}$.



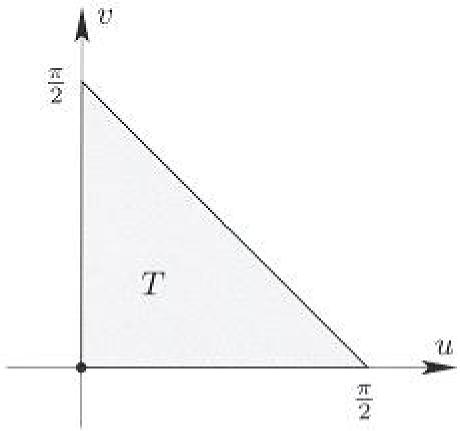
Ez a képlet bijektív transzformációt ad meg az $S = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ egységnégyzet belseje és a $T = \{(u, v) : u, v \geq 0, u + v \leq \pi/2\}$ háromszög belseje között. A koordináta-transzformáció Jacobi determinánsa ezután

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\cos u}{cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{pmatrix} = 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} = 1 - x^2y^2.$$

Ez azt jelenti, hogy a kiszámítandó integrál

$$J = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2-u} 1 du dv \tag{2.4.3}$$

alakba írható, amely egyenlő a T háromszög $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$ területével.



⊗

Ugyanez a bizonyítási módszer alkalmazható $\zeta(2k)$ $2k$-dimenziós integrálokkal történő kiszámítására is minden $k \geq 1$-re.

2.5. Pi nem egyenlő 22/7-el

A 22/7 egy racionális szám, mely széleskörben használt közelítő értéke π-nek. A közelítés az ókor óta ismert. Először Arkhimédész bizonyította, a *Measurement of a Circle* című művében egy $6 * 2^n$ szöget egy körbe írva és a kör köré rajzolva, meghatározta az első szigorú megközelítést arra vonatkozóan, hogy a 22/7 felső becslés. Az $n = 4$ -re a következőt kapta a kör kerülete és átmérője közötti arányra:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Fibonacci a *Practica geomatriae* című könyvében rámutat arra, hogy a π értéke nem *pontosan* $3\frac{1}{7}$, hanem csak közelítő értéke. Fibonacci ismerte Arkhimédész eljárását, ami nemcsak ebből a művéből, hanem egyéb munkáiból is megállapítható. Akkoriban még nem sokat lehetett tudni a π-ről, és nagyon sok matematikus szerint ez az arány a pi pontos értéke. A XIV. században Dominicus Parisiensis a *Practica geometriae* című művében hangsúlyozza, hogy a $3\frac{1}{7}$ a kör kerülete és átmérője közötti aránynak csak megközelítő értéke.
Egy lényegretörő, modern bizonyítás következik arról, hogy a $\frac{22}{7} > \pi$, mely csupán alapvető matematikai módszereket igényel. A cél nem elsősorban az, hogy meggyőzzem az olvasót arról, hogy ez az állítás valóban igaz; létezik szisztematikus eljárás π értékének kiszámítására.

Az alapötlet

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ 0 &< \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - x \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Ebből következik, hogy $\frac{22}{7} > \pi$.

Részletesebben:

Az a tény, hogy az integrál pozitív, abból az állításból következik, hogy *pozitív függgyvény integrálja is pozitív.* Jelen esetben az integrálandó függvényünk egy tört, a számláló és a nevező is nemnegatív. Nemnegatív valós számok hatványának össszege vagy szorzata szintén nemnegatív.
Mivel az integrálandó függvényünk tehát pozitív, az integrál 0 és 1 között pozitív, mert az integrálás alsó határa kisebb mint az integrál felső határa ($0 < 1$).
Megmutatjuk, hogy az integrál valóban eleget tesz a kívánt feltételnek:

A számlálóban felbontjuk a zárójelet, majd az azonos tagokat összevonjuk. Ezután a számlálót bővítjük. Úgy rendezzük a számlálóban lévő kifejezést, hogy kiemelést tudjunk alkalmazni, és így a nevezőben lévő kifejezéssel azonos értékeket is kapjunk, hogy aztán egyszerűsíthessünk azokkal.

$$\begin{aligned}
0 &< \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x && (2.5.2)\\
0 &< \int_0^1 \frac{x^4(1-2x+x^2)(1-2x+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
0 &< \int_0^1 \frac{x^4(1-2x+x^2-2x+4x^2-2x^3+x^2-2x^3+x^4)}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
0 &< \int_0^1 \frac{x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
0 &< \int_0^1 \frac{x^4-4x^5+6x^6-4x^7+x^8}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
0 &< \int_0^1 \frac{-4x^4+(4x^4+x^4+5x^6)+(x^6+x^8)+(-4x^5-4x^7)}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
0 &< \int_0^1 \frac{-4x^4+(5x^4+5x^6)+(x^6+x^8)+(-4x^5-4x^7)}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
0 &< \int_0^1 \frac{-4x^4+5x^4(1+x^2)+x^6(1+x^2)-4x^5(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
0 &< \int_0^1 \left(\frac{-4x^4}{1+x^2}+\frac{5x^4(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{x^6(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{-4x^5(1+x^2)}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

A következő egyenlet alkalmazható a számlálóban, ezzel az integrál értékén nem változtatunk.

$$-4x^4 = -4x^4 - 4x^2 + 4x^2 + 4 - 4$$

A lehetséges egyszerűsítéseket végrehajtjuk, majd elvégezzük az integrálást.

$$\begin{aligned}
0 &< \int_0^1 \left(\frac{(-4x^4-4x^2)+(4x^2+4)-4}{1+x^2}+5x^4+x^6-4x^5\right)\mathrm{d}x\\
0 &< \int_0^1 \left(\frac{-4x^2(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{4(1+x^2)}{1+x^2}-\frac{4}{1+x^2}+5x^4+x^6-4x^5\right)\mathrm{d}x\\
0 &< \int_0^1 \left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\
0 &< \left[x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}\right]_0^1\\
0 &< \frac{x^7}{7}-\frac{2x^6}{3}+x^5-\frac{4x^3}{3}+4x-4\arctan x\Big|_0^1 && (2.5.3)
\end{aligned}$$

Behelyettesítjük x helyére 1-et ($\arctan(1)=\pi/4$) és 0-t, majd kivonjuk őket egymásból.

Így a következő eredményhez jutunk:

$$
\begin{aligned}
0 &< \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi && (2.5.4) \\
0 &< \frac{1}{7} + 3 - \pi \\
0 &< \frac{1}{7} + \frac{21}{7} - \pi \\
0 &< \frac{22}{7} - \pi \\
\pi &< \frac{22}{7} \\
\pi &\neq \frac{22}{7} && (2.5.5)
\end{aligned}
$$

Tehát valóban $22/7 > \pi$.

$\otimes$

Az integrál becslése első ízben 1968-ban jelent meg feladatként a Putnam versenyen.

D. P. Dalzell 1944-ben mutatta meg, hogy ha x helyére a nevezőben 1-et helyettesítünk, akkor az integrál egy alsó becslését, míg ha 0-t helyettesítünk, akkor egy felső határát kapjuk:

$$\frac{1}{1260} < \int_0^1 \frac{x^4(1-x^2)^4}{1+x^2} dx < \frac{1}{630}. \tag{2.5.6}$$

Tehát

$$\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7}\frac{1}{1260}. \tag{2.5.7}$$

Talán nem is létezik még egy ilyen számítási módszer π becslésére, amely közel 3 tizedesjegyet ennyire gyorsan és egyszerűen kiszámol. Dalzell is így gondolta.

2.6. Wallis formula

John Wallis (1616–1703) nagy csodálója volt a görög matematikusoknak, kiadta Arkhimédész, Eutociusz, Ptolemaiosz és Arisztarkhosz munkáinak egy részét.

2.6.1. A Wallis formula

A következő egyszerű bizonyítás, mely Johan W$\ddot{a}$stlund nevéhez fűződik, nem igényel semmilyen integrálás vagy szögfüggvény alkalmazását.

Az alábbi képlet bizonyítás nélkül megtalálható Wallis 1655-ben megjelent *Arithmetica infinitorum, sive Nova Methodus...* című könyvében, azzal a megjegyzéssel, hogy a képletet nem a szerző állapította meg, hanem egyik barátja, William Brouncker. Az első bizonyítást több mint 120 évvel később Euler adta meg.

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots=\frac{\pi}{2}. \tag{2.6.1}$$

(2.6.1) különböző bizonyítása a legtöbb könyvben bizonyos határozott integrál becslésére támaszkodik, hasonlóan mint az

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx$$

parciális integrálásánál. Ez a bizonyítási módszer a matematikusok számára sem egy alapfeladat.
A következő bizonyítás célja, hogy megmutassuk, (2.6.1)-t az általános iskolában tanult matematika módszerekkel is tudjuk igazolni, úgymint: alapvető algebrai ismeretek, Pitagorasz tétele, az r sugarú kör $\pi\cdot r^2$ területképlete.

1951-ben Viggo Brun adott meg egy módszert Wallis formulájának kiszámítására. 1953-ban Yaglom és Yaglom adott (2.6.1)-re egy gyönyörű bizonyítást, mely nem használ integrálást, hanem néhány meglehetősen bonyolult trigonometriai azonosságot.

2.6.2. Egy számsorozat

A Wallis formulát a következő alakban adjuk meg:

$$W=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots. \tag{2.6.2}$$

(2.6.2)-t felírhatjuk 2 részsorozat szorzataként, ahol az egyik részsorozat tényezői páros számok, melyek egy növekvő sorozatot adnak $(2,2,4,4,\dots)$; míg a másik részsorotat tagjai páratlan számok, és csökkenő sorozatot alkotnak $\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\cdots\right)$.

Legyen $s_0=0$, $s_1=1$, és az n-edik tag:

$$s_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n-2}.$$

(2.6.2) páratlan számokból álló részsorozata felírható a következő formában:

$$\frac{2n}{s_n^2}=\frac{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)}{1\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}>W,$$

míg a páros számokból álló részsorozat:

$$\frac{2n-1}{s_n^2} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n-2)^2}{1 \cdot 3^2 \cdots (2n-3)^2} \cdot (2n-1) < W.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{2n-1}{W} < s_n^2 < \frac{2n}{W}. \tag{2.6.3}$$

Megmutatjuk a_n-re az $s_{n+1} - s_n$ különbséget, és vegyük észre, hogy

$$a_n = s_{n+1} - s_n = s_n \left(\frac{2n+1}{2n} - 1 \right) = \frac{s_n}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

Először levezetjük a következő azonosságot:

$$a_i a_j = \frac{j+1}{i+j+1} a_i a_{j+1} + \frac{i+1}{i+j+1} a_{i+1} a_j. \tag{2.6.4}$$

Bizonyítás:
A behelyettesítések után

$$a_{i+1} = \frac{2i+1}{2(i+1)} a_i$$

és

$$a_{j+1} = \frac{2j+1}{2(j+1)} j_i,$$

(2.6.4) jobb oldala megfelel:

$$a_i a_j \left(\frac{2j+1}{2(j+1)} \cdot \frac{j+1}{i+j+1} + \frac{2i+1}{2(i+1)} \cdot \frac{i+1}{i+j+1} \right) = a_i a_j.$$

$\otimes$

Az a_0^2-től indulva és (2.6.4)-et alkalmazva a következő azonosságot kapjuk:

$$1 = a_0^2 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0 = \cdots \tag{2.6.5}$$
$$\cdots = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0.$$

Bizonyítás:
(2.6.4)-et minden tagra alkalmazva, az $a_0 a_{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0$ összeg megfelel:

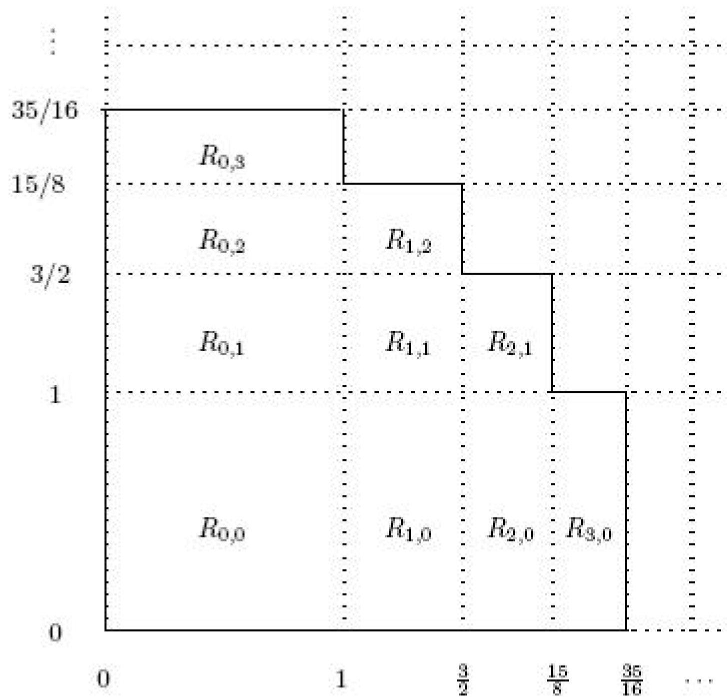
$$\left(a_0 a_n + \frac{1}{n} a_1 a_{n-1} \right) + \left(\frac{n-1}{n} a_1 a_{n-1} + \frac{2}{n} a_2 a_{n-2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} a_{n-1} a_1 + a_n a_0 \right).$$

Az egynemű tagokat összeadjuk, majd a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve kapjuk: $a_0a_n + \cdots + a_na_0$.

$\otimes$

2.6.3. Egy geometriai értelmezés

Az $x - y$ sík pozitív negyedét téglalapokra osztjuk, mégpedig úgy, hogy egyenes vonalakat rajzolunk $x = s_n$ és $y = s_n$ értékeknél, minden n-re.
Legyen adott az $R_{i,j}$ téglalap a bal alsó sarkának (s_i, s_j) koordinátáival és a jobb felső sarkának (s_{i+1}, s_{j+1}) koordinátáival. Az $R_{i,j}$ téglalap területe $a_i \cdot a_j$. Következésképpen a (2.6.5) azonosság felhasználásával az $R_{i,j}$ téglalap területe 1, ahol $i + j = n$.
Legyen P_n egy sokszögtartomány, amelyet az összes $R_{i,j}$ téglalap alkot, ahol $i + j < n$. Ennélfogva P_n területe n (lásd az alábbi ábrát).



P_n külső sarokpontjai az (s_i, s_j) koordinátájú pontok, melyre $i + j = n + 1$. A Pitagorasz tétel miatt, egy ilyen pont origótól való távolsága

$$\sqrt{s_i^2 + s_j^2}.$$

(2.6.3) miatt ez felülről korlátos a következő alapján

$$\sqrt{\frac{2(i+j)}{W}} = \sqrt{\frac{2(n+1)}{W}}.$$

Hasonlóan, P_n belső sarokpontjai az $(s_i + s_j)$ koordinátájú pontok, ahol $i + j = n$. Egy ilyen pont origótól való távolsága alulról korlátos a következő alapján

$$\sqrt{\frac{2(i+j-1)}{W}} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{W}}.$$

Ezért P_n tartalmaz egy $\sqrt{2(n-1)/W}$ sugarú negyedkört, ésP_n benne van egy $\sqrt{2(n+1)/W}$ sugarú negyedkörben. Mivel egy r sugarú negyedkör területe $\pi r^2/4$, a következő határokat kapjuk P_n területére:

$$\frac{\pi(n-1)}{2W} < n < \frac{\pi(n+1)}{2W}.$$

Mivel ez minden n-re igaz, arra a következtetésre jutottunk, hogy valóban:

$$W = \frac{\pi}{2}.$$

2.7. Összegzés

A π-nek rengeteg formulája létezik az egyszerűtől a rendkívül komplikáltig, ahogyan azt láthattuk az eddigi példák alapján is. Nem az volt a dolgozatom célja, hogy bemutassam a π összes formuláját, hanem, hogy néhány érdekes és egyszerűbb formulával részletesen foglalkozzunk.

Életünk során bármerre terelődik is a figyelmünk, mindig elénk kerül valamilyen formában a π. Egy gumigyár gömb alakú butántároló-tornyaiban (azért gömb alakú, mert az összes azonos felületnagyságú testek közül a gömbnek van a legnagyobb térfogata) éppúgy jelen van, mint egy egyszerű kerékben, vagy a termelés gépesítésére és automatizálására szolgáló legbonyolultabb berendezésekben.

Mindennapjaink részévé vált tehát ez a különleges szám, még akkor is, ha megfeledkezünk róla.

Irodalomjegyzék

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. Bizonyítások a könyvből. 2004.

[2] L. Berggren, J. Borwien, and eds P. Borwien. Pi: A source book. 1997.

[3] F. Beukers, J. A. C. Kolk, and E. Calabi. Sums of generalized harmonic series and volumes. 1993.

[4] Florica T. Cimpan. A pi története. 1971.

[5] http://en.wikipedia.org.

[6] http://www.ep.liu.se/ea/lsm/2005/002/lsm05002.pdf.

[7] http://www.maths.ex.ac.uk/ rjc/etc/zets2.dvi,ps,pdf.

[8] http://www.mathworld.wolfram.com/Pi.html.

[9] H. S. Zuckerman I. Niven. Bevezetés a számelméletbe. 1978.