Debreceni Egyetem
Természettudományi és Technológiai Kar
Matematikai Intézet

Szakdolgozat

Diofantikus egyenletrendszerek

készítette:

Pósán Kinga

témavezető: Dr. Tengely Szabolcs

Debrecen, 2022

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom a családomnak és közvetlen környezetemnek, akik rengeteg türelmet tanúsítottak velem szemben és tanácsaikkal segítettek szakdolgozatom elkészítésében.

Ezenkívül szeretném külön megköszönni Dr. Tengely Szabolcsnak, hogy vállalta témavezetésem, és szakértelmével, illetve folyamatos segítségével nagyban hozzájárult a szakdolgozatom létrejöttéhez.

1. Bevezető

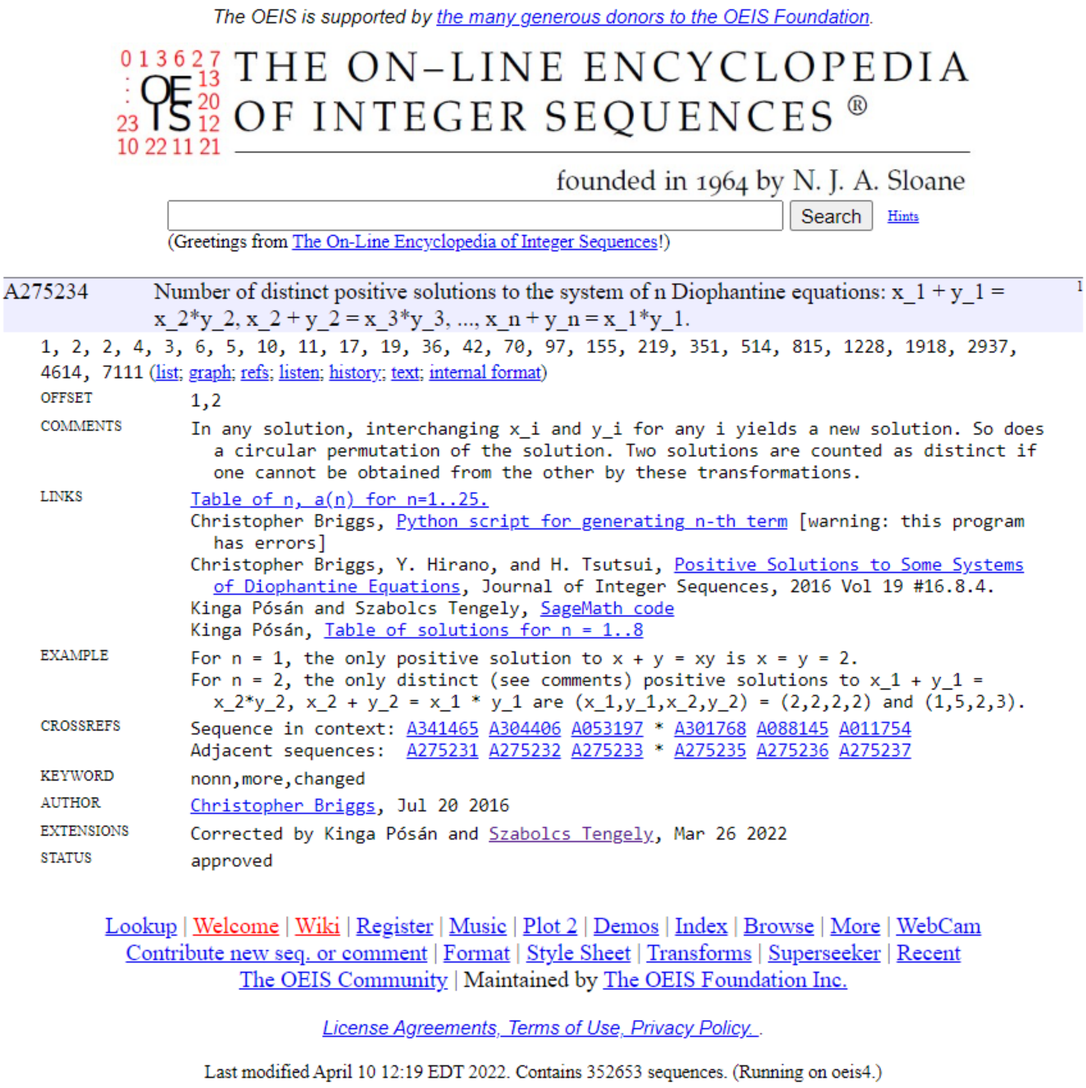
Szakdolgozatomban egy olyan számelméleti problémát fogunk körüljárni, amelyet gráfelméleti eszközökkel lehet vizsgálni. A matematika ezen két szakterülete közel áll egymáshoz, mégis ritkán szokott összekapcsolódni. A következő fejezetekben bemutatunk néhány olyan esetet, ahol ez mégis megvalósult.

1.1. Célkitűzés

A példák listázása előtt szeretném ismertetni eredeti célkitűzésünket és eredményét. Kezdetben azon dolgoztunk, hogy a Briggs és társai által írt cikkben [1] lévő gráfelméleti megközelítésre vonatkozó eljárást implementáljuk. Az implementáció segítségével sikerült listázni a problémához kapcsolódó megoldásokat, amelyek az *"Egész számok sorozatainak on-line enciklopédiájában"* szereplő A275234 (http://oeis.org/A275234) sorozat elemei. Viszont hamar kiderült, hogy az általunk meghatározott eredmények és az enciklopédiában szereplők nem egyeznek. Az első 3, illetve ötödik elem azonos volt, viszont $n = 4$-re hiányzott egy megoldás:

$$\begin{aligned} 1 + 6 &= 1 \cdot 7 \\ 1 + 7 &= 1 \cdot 8 \qquad \text{(A 2.2. fejezet végén található táblázat} \\ 1 + 8 &= 3 \cdot 3 \qquad \text{tartalmazza a többi megoldás is)} \\ 3 + 3 &= 1 \cdot 6. \end{aligned}$$

Az n-ek növekedésével egyre több megoldást nem talált meg a Python kód. Ezt a problémát jeleztük az oeis.org szerkesztőinek, továbbá csatoltuk az újonnan kidolgozott SageMath kódot is. Megvizsgálva az algoritmust, jóváhagyták a kódunkat és cserélték az enciklopédiában szereplő első 25 elemet. A Python kódhoz pedig elhelyeztek egy figyelmeztetést, miszerint a kód hibákat tartalmaz.



The OEIS is supported by the many generous donors to the OEIS Foundation.

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES ®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

Search Hints

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

A275234 Number of distinct positive solutions to the system of n Diophantine equations: x_1 + y_1 = x_2*y_2, x_2 + y_2 = x_3*y_3, ..., x_n + y_n = x_1*y_1.

1, 2, 2, 4, 3, 6, 5, 10, 11, 17, 19, 36, 42, 70, 97, 155, 219, 351, 514, 815, 1228, 1918, 2937, 4614, 7111 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

OFFSET	1,2
COMMENTS	In any solution, interchanging x_i and y_i for any i yields a new solution. So does a circular permutation of the solution. Two solutions are counted as distinct if one cannot be obtained from the other by these transformations.
LINKS	Table of n, a(n) for n=1..25. Christopher Briggs, Python script for generating n-th term [warning: this program has errors] Christopher Briggs, Y. Hirano, and H. Tsutsui, Positive Solutions to Some Systems of Diophantine Equations, Journal of Integer Sequences, 2016 Vol 19 #16.8.4. Kinga Pósán and Szabolcs Tengely, SageMath code Kinga Pósán, Table of solutions for n = 1..8
EXAMPLE	For n = 1, the only positive solution to x + y = xy is x = y = 2. For n = 2, the only distinct (see comments) positive solutions to x_1 + y_1 = x_2*y_2, x_2 + y_2 = x_1 * y_1 are (x_1,y_1,x_2,y_2) = (2,2,2,2) and (1,5,2,3).
CROSSREFS	Sequence in context: A341465 A304406 A053197 * A301768 A088145 A011754 Adjacent sequences: A275231 A275232 A275233 * A275235 A275236 A275237
KEYWORD	nonn,more,changed
AUTHOR	Christopher Briggs, Jul 20 2016
EXTENSIONS	Corrected by Kinga Pósán and Szabolcs Tengely, Mar 26 2022
STATUS	approved

Lookup | Welcome | Wiki | Register | Music | Plot 2 | Demos | Index | Browse | More | WebCam
Contribute new seq. or comment | Format | Style Sheet | Transforms | Superseeker | Recent
The OEIS Community | Maintained by The OEIS Foundation Inc.

License Agreements, Terms of Use, Privacy Policy.

Last modified April 10 12:19 EDT 2022. Contains 352653 sequences. (Running on oeis4.)

1.2. Gráfelméleti problémára számelméleti megoldás

A példákra áttérve, **elsőként** Graham cikkéből [5] kiindulva olyan szomszédsági mátrixszal rendelkező fagráfokat vizsgálunk, amelyek sajátértékei egészek. Speciálisan, kitérünk a "dupla csillag"-ra, ami egy olyan $S_{m,n}$ gráf, amelynek egy $(m+1)$ és egy $(n+1)$ fokú csúcsa van, míg az összes többi csúcsa elsőfokú. Eme gráfnak minden sajátértéke egész értékű lesz, akkor és csak akkor, ha az

$$x^2 - (m+n+1)x + mn$$

polinomnak négyzetszámok lesznek a gyökei, nevezetesen: a^2 és b^2. Azaz, az alábbi egyenletrendszernek csak egész megoldásai lehetnek:

$$\begin{aligned} m+n+1 &= a^2 + b^2 \\ m \cdot n &= a^2 \cdot b^2. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Az egyenletrendszert n-re és m-re megoldva kapott eredményben a következő jelöléseket bevezetve:

$$\begin{aligned} A &= b - a \\ B &= b + a. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

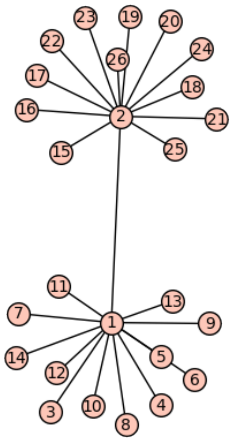
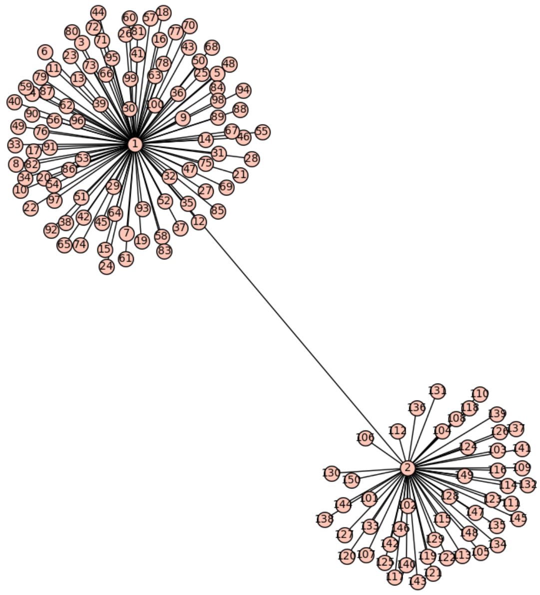
Azt kapjuk, hogy a fent említett (1.2.1) egyenletrendszer akkor és csak akkor lesz megoldható, ha az

$$(A^2 - 1)(B^2 - 1) = C^2 \tag{1.2.3}$$

megoldható.

Ennek az egyenletnek (1.2.3) pedig az egész értékű gyökei, bizonyos Csebisev-polinomok egész számokra kiértékelt megoldásaiból származik.

Az [5] cikk eredményeként azt kapjuk, hogy az eredeti gráfelméleti problémában ismertetett fagráfnak nem biztos, hogy csak egész sajátértéke lesz tetszőleges átmérő esetén. Az $S_{m,n}$ dupla csillagnak 3 lesz az átmérője minden esetben, így erre teljesülni fog. Nézzünk meg két példát erre:

	$S_{12,12}$	$S_{98,50}$
Egyenletrendszer	$12 + 12 - 1 = 3^2 + 4^2$ $12 \cdot 12 = 3^2 \cdot 4^2$	$98 + 50 + 1 = 7^2 + 10^2$ $98 \cdot 50 = 7^2 \cdot 10^2$
Gráf képe		
Sajátértékek	(3,4)	(7,10)

Míg ez az eset könnyen kezelhető, ezzel szemben 10-nél nagyobb átmérőre sokáig nem ismertek megoldást. A 2000-es években viszont sikerült két olyan feltételt meghatározni, amelyek teljesülése mellett, képesek leszünk tetszőlegesen nagy átmérőjű egészgráfot legyártani.

1. Első esetben páros átmérőjű gráfokat vizsgálunk [3]:

   1.2.1. Tétel. *Minden pozitív egész számokból álló S véges halmazhoz létezik olyan fagráf, amelynek a pozitív sajátértékei pontosan az S elemei lesznek. Ha az S halmaz nem az $\{1\}$, akkor a fa átmérője: $2|S|$ nagyságú lesz.*

2. Második esetben megnézzük, hogy ellenkező paritás esetén mi teljesül [4]: Legyen $\psi_o(T)$ a következőképpen definiálva:

   $$\psi_o(T) = x^2(x^2 - r_1)(x^2 - r_n) - r(x^2 - r_0)(x^2 - r_1) - x^2(x^2 - r_0),$$

   ahol $r_0, r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}_+$ és $\max\{r_0, r_1\} < r_2 < ... < r_n$.

   1.2.2. Tétel. *Legyen n páratlan. Ekkor T egy $(2n + 1)$ átmérőjű egészfa lesz, akkor és csak akkor, ha $r_0, r_1, \ldots, r_n$ teljes négyzetek, továbbá $\psi_o(T)$ összes sajátértéke egész.*

   1.2.3. Tétel. *Bármilyen pozitív páros n esetén, végtelen sok $(2n + 1)$ átmérőjű egészfa fog létezni.*

1.2.4. Tétel. *Bármilyen pozitív, páratlan $n \geq 3$ esetén, végtelen sok $(2n+1)$ átmérőjű egészfa fog létezni.*

Második példánkban a bűvös gráfokkal fogunk foglalkozni a [7] cikket felhasználva.

1.2.1. Definíció. Egy G gráfot bűvösnek nevezünk, ha létezik olyan csúcscímkézése, egy k bűvös konstanssal, amely egy l bijekciót képez a csúcsok és az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz között úgy, hogy bármely x csúcs esetén:

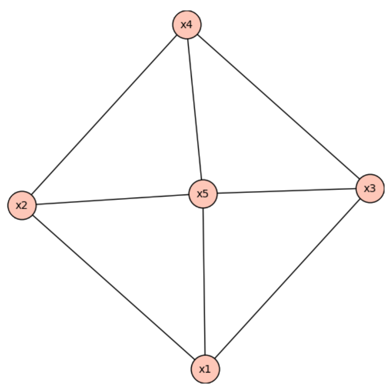
$$\sum_{y \in N_{G(x)}} l(y) = k,$$

ahol $N_{G(x)}$ olyan csúcsok halmaza, amelyek szomszédosak x-szel.

Az elnevezést és magát a problémát a bűvös négyzet inspirálta. Ez az objektum egy 3×3-as négyzet, amelynek minden sorában, oszlopában, illetve átlójában elhelyezkedő számok összege azonos. Az egyik legismertebb példát fel is tüntetném, itt ez az összeg 15 lesz:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

A címkézés élekkel is működik, de mi most a csúcsokkal fogunk foglalkozni. Vegyünk egy egyszerű példát:



A fenti 5 csúcsú gráfra a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} x2 + x3 + x5 &= k \\ x1 + x4 + x5 &= k \\ x1 + x4 + x5 &= k \\ x2 + x3 + x5 &= k \\ x1 + x2 + x3 + x4 &= k. \end{aligned}$$

Amelyet egyszerűsítve kapjuk:

$$\begin{aligned} x2 + x3 + x5 &= k \\ x1 + x4 + x5 &= k \\ x1 + x2 + x3 + x4 &= k. \end{aligned}$$

Majd $x5$-re redukálva, azt kapjuk, hogy $2 \cdot x5 = k$. Ekkor, ha minden x-es tagot az indexének megfelelő számmal azonosítjuk, akkor $k = 10$-re bűvös gráfot kapunk.

Egy bonyolultabb példa előkészítéséhez tekintsük az alábbi tételt:

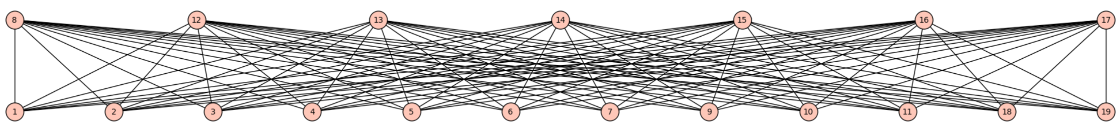
1.2.5. Tétel. *Legyen m, n pozitív egészek, $m \leq n$. A $K_{m,n}$ teljes páros gráf bűvös gráf lesz, akkor és csak akkor, ha*

- $m + n \equiv 0$ *vagy* 3 *(mod 4) és*
- *vagy* $n \leq \lfloor (1 + \sqrt{2})m - \frac{1}{2} \rfloor$ *vagy* $2(2n + 1)^2 - (2m + 2n + 1)^2 = 1$.

Erre egy példa a következőképpen konstruálható. Vegyük a $K_{7,12}$ gráfot. A csúcsainak két partíciója V_1 és V_2. Ekkor $K_{7,12}$ egy lehetséges címkézése:

$$V_1 = \{8, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}, \qquad V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 18, 19\}.$$

A gráf képe:



Ekkor $k = 95$.

1.3. Számelméleti problémára gráfelméleti megoldás

Harmadik példánkban a jól ismert Pell-egyenletet fogjuk megvizsgálni a [6] cikk alapján.

Jelölje $\mathbb{Z}_s$ a négyzetmentes pozitív egészek halmazát. Továbbá legyen $h(d)$ a $K = Q(\sqrt{d})$ valós kvadratikus test ideálosztályszáma, $d \in \mathbb{Z}_s$.
Vegyük Gauss mai napig megoldatlan problémáját: végtelen sok olyan $d \in \mathbb{Z}_s$ létezik, amelyre $h(d) = 1$.

Gauss problémáját és a negatív Pell-egyenleteket össze tudjuk kapcsolni. Ez utóbbit pedig gráfelméleti eszközökkel tudjuk közelíteni.

Jelölje P a prímek halmazát, továbbá legyen:

$$D^* := \{1 < d \in \mathbb{Z}_s \mid p \in P \wedge \text{ ha } p|d \Rightarrow p \equiv 1 \pmod 4\}. \tag{1.3.1}$$

Legyen $D_n \subset D^*$, $n = \omega(d)$; $p, q \in P, D_1$. Ekkor a [2] cikk segítségével, a következő R reláció definiálható közöttük, valamely $x \in \mathbb{Z}$ esetén:

$$< p, q > \in R \subset D_1 \times D_1 \iff p \neq q \text{ és } p^3 \neq x^2 (\text{mod } q^3\ ).$$

Legyen $d \in D_n$ és

$$d = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n, \qquad p_1 < p_2 < \ldots < p_n \;\; (p_j \in P, 1 \leq j \leq n).$$

Ekkor elkészítünk egy $H(d)$ gráfot, amely csúcsainak halmaza: $S_n = \{1, 2, ..., n\}$, továbbá két csúcs (i és j) szomszédos akkor és csak akkor, ha $< p_i, p_j > \in R$ minden $i \neq j$-re.

Egy S_n csúcshalmazzal rendelkező G gráfot páratlan gráfnak nevezünk, ha a következő tulajdonsággal rendelkezik: bármely két S_n-et lefedő, nemüres, diszjunkt,: X, Y halmazra való szétbontása után,

- vagy létezik olyan $x \in X$, amely G-ben páratlan számú Y-beli csúccsal lesz összekötve,
- vagy létezik olyan $y \in Y$, amely G-ben páratlan számú X-beli csúccsal lesz összekötve.

1.3.1. Tétel. ***(Cremona-Odoni [2]:)*** *Ha $d \in D_n$ és $H(d)$ egy páratlan gráf, akkor d negatív Pell-szám.*

Megjegyzés. Ha az $x^2 - dy^2 = -1$ diofantikus egyenletnek pozitív x, y pár esetén van megoldása, akkor d-t negatív Pell-számnak nevezik.

1.3.2. Tétel. *Legyen $d \in \mathbb{Z}_s$, és $\omega(d) \geq 2$, ahol ω d különböző prímosztóinak számát adja meg. Ekkor, ha létezik egy $< \alpha, \beta, \gamma >$ primitív Pitagoraszi-számhármas, és a, b pozitív, egymáshoz relatív prím, egészek úgy, hogy:*

$$d = a^2 + b^2, \qquad |\alpha \cdot a - \beta \cdot b| = 1,$$

akkor

$$h(d) > 1.$$

A fenti két tétel és a megjegyzés segítségével az alábbi következményre jutunk.

1. Következmény. *Ha $d \in D_n$, $n \geq 2$ és $H(d)$ egy páratlan gráf, akkor $h(d)>1$.*

A szemléletesség kedvéért menjünk végig két példán. Elsőként a diofantikus egyenlettel kell foglalkoznunk. Ehhez olyan prímeket kell keresnünk, amelyek 1-et adnak maradékul modulo 4.

```
In [36]: A=[]
         for i in range(150):
             if is_prime(i) and mod(i,4)==1:
                 A=A+[i];
         pretty_print(A)
```

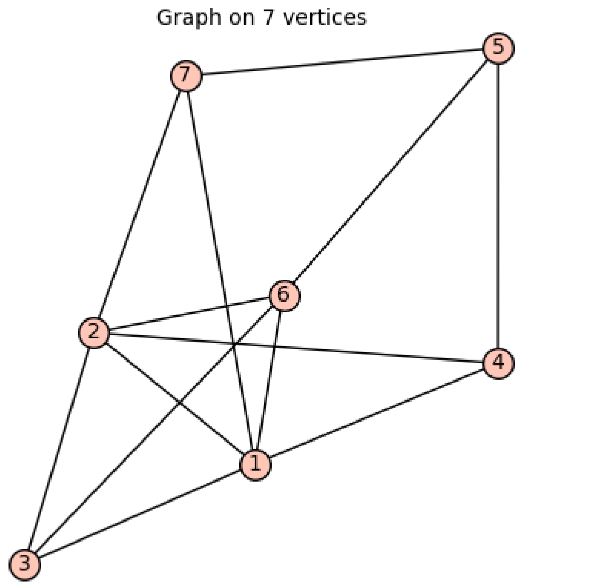
$$[5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, 137, 149]$$

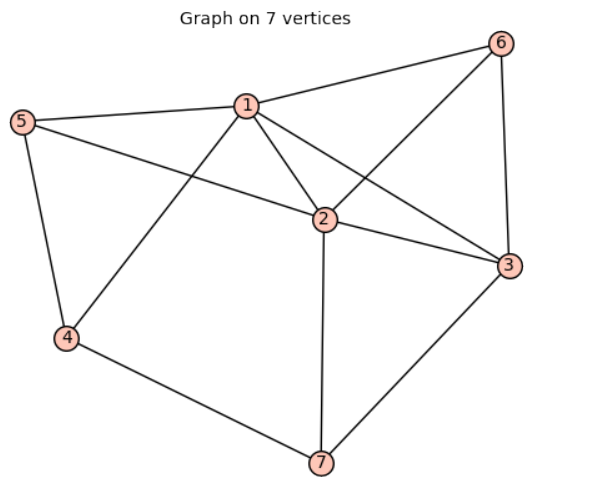
Ezután kiválasztunk tetszőleges számú prímet, és összeszorozzuk őket. Ez adja meg a d értékét. Majd a diofantikus egyenletet megoldva, ha nem kapunk megoldást, akkor páros gráfról lesz szó, ha pedig lesz megoldásunk, akkor annak számossága végtelen sok lesz.

A gráf a következőképpen készíthető el:

```
def PellGraph(L):
    n=len(L)
    Sn=[1..n]
    G=Graph()
    G.add_vertices(Sn)
    E=[(a,b) for a in Sn for b in Sn if not Integers(L[b-1]^3)(L[a
    -1]^3).is_square()]
    G.add_edges(E)
    return G
```

Két kidolgozott példa a különböző paritásokat összehasonlítva a következő oldalon található.

	Páros
Prímek	$[17, 29, 37, 41, 53, 61, 73]$
d	176506646929
Diofantikus egyenlet	$x^2 - 176506646929y^2 = -1$
Megoldás	[ ]
Feszítőfák száma(Paritás)	612 (páros)
Gráf képe	

	Páratlan
Prímek	$[5, 17, 37, 53, 73, 97, 109]$
d	128652316865
Diofantikus egyenlet	$x^2 - 128652316865y^2 = -1$
Megoldás	végtelen sok
Feszítőfák száma(Paritás)	593 (páratlan)
Gráf képe	

2. DIOFANTIKUS EGYENLETRENDSZER ÁLTALÁNOSAN

2.1. A vizsgált diofantikus egyenletrendszer bemutatása

A diofantikus egyenletek megoldása a számelmélettel foglalkozó kutatók régóta fennálló célja. Sokan, köztük Briggs és társai is, vizsgálták a pozitív megoldások számát egy véges diofantikus egyenletrendszerben. A szakdolgozat elején említett cikket [1] felhasználva az alábbiakban ismertetni fogom az általunk vizsgált probléma alapját.

Tekintsük a nemlineáris diofantikus egyenletek egy speciális rendszerét, amely a következőképpen konstruálható:

$$\begin{aligned} a_{1,1} + a_{1,2} &= a_{2,1} \cdot a_{2,2} \\ a_{2,1} + a_{2,2} &= a_{1,1} \cdot a_{1,2}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

A (2.1.1) egyenletrendszernek véges számú pozitív megoldása kell, hogy legyen.

A kérdés az, hogy a pozitív megoldások száma akkor is véges maradna, ha az egyenletek számát növelnék. Azaz, hogy az alábbi nemlineáris diofantikus egyenletrendszernek véges sok pozitív megoldása van-e?

$$\begin{aligned} a_{1,1} + a_{1,2} &= a_{2,1} \cdot a_{2,2} \\ a_{2,1} + a_{2,2} &= a_{3,1} \cdot a_{3,2} \\ &\vdots \\ a_{n-1,1} + a_{n-1,2} &= a_{n,1} \cdot a_{n,2} \\ a_{n,1} + a_{n,2} &= a_{1,1} \cdot a_{1,2}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

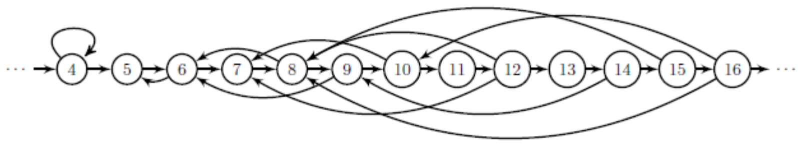
A válasz pedig az lesz, hogy igen. A fontosabb kérdést, az veti fel, hogy a megoldások tényleges számát, hogyan találhatjuk meg adott n esetén.

2.2. Megoldások számának keresési módszerei

2.2.1. Gráfelméleti megközelítés

Szomszédsági mátrix

Tekintsük a következő végtelen irányított gráfot:



A csúcsok lesznek a pozitív egészek, továbbá él fut m-ből n-be, ha létezik olyan a, b pozitív egész párok, hogy $a \cdot b = m$ és $a + b = n$.

Például van egy él 5 és 6 között, mert $5 \cdot 1 = 5$ és $5 + 1 = 6$. Fut egy él a 6-ból az 5-be, mert $2 \cdot 3 = 6$ és $2 + 3 = 5$.

Az élek száma, amelyek kiindulópontja egy n csomópontból kiinduló élek száma az n azon osztóinak száma, amelyek kisebbek vagy egyenlőek $\sqrt{n}$-nél, és az n csomópontban végződő élek száma egyenlő n alsó egészrészével. Az éleket m-től $(m - k)$-ig tartó $(k > 0)$ (k hosszúságú) csúszdának nevezzük (a Chutes and Ladders társasjáték analógiájára). A k hosszúságú csúszdák száma megegyezik a $(k + 1)$ osztók számával, amelyek kisebbek vagy egyenlőek $\sqrt{n} + 1$-nél. A gráf jelentősége az, hogy minden n hosszúságú zárt séta megoldást jelent a (2.1.2) egyenletekre.

Például $n = 5$ esetén a $6 \to 7 \to 8 \to 6 \to 5 \to 6$ zárt séta, a következő megoldásnak lesz a megfeleltetése:

$$\begin{aligned} 6 + 1 &= 7 \cdot 1 \\ 7 + 1 &= 2 \cdot 4 \\ 2 + 4 &= 2 \cdot 3 \\ 2 + 3 &= 1 \cdot 5 \\ 1 + 5 &= 1 \cdot 6. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Tekintsük a gráfhoz tartozó végtelen szomszédsági mátrixot (a mátrixot jelölje: A). A mátrix ritka abban az értelemben, hogy véges sok kivétellel,a soraiban és oszlopaiban szereplő értékek 0-k lesznek. Az A^k mátrix n-edik átlója tartalmazni fogja az n-edik csúcsból induló zárt séták számát. Az n-edik csúcsból induló k hosszúságú zárt séták kiszámításához elegendő a bal felső négyzetes almátrix k-adik hatványát megkeresni, amely egy $(2k + 4)$ dimenziójú mátrix lesz.

Viszont az így megszámlált séták nem feltétlenül lesznek különbözőek. A (2.1.2) egyenletek különálló megoldásainak számára az általunk felhasznált cikk [1] írói egyelőre csak egy felső határt tudtak megállapítani.

2.2.2. Kidolgozott módszer

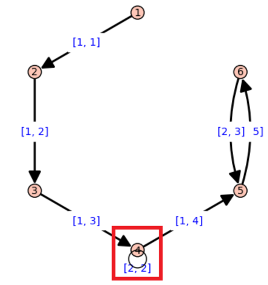
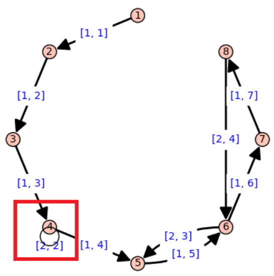
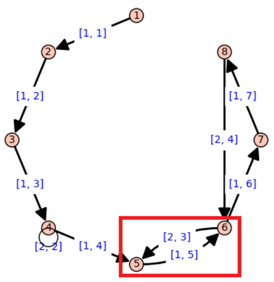
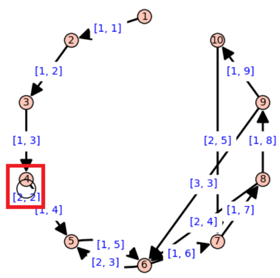
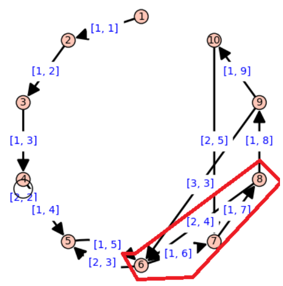
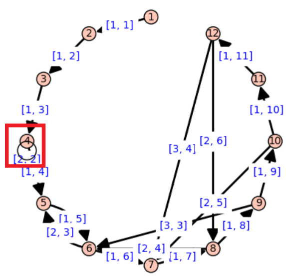
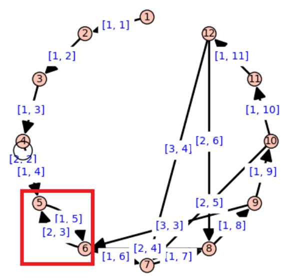
Némi kutatás után képesek voltunk kidolgozni egy algoritmust a SageMath keretein belül, amellyel lehetséges nagyszámú megoldásokat meghatározni a (2.1.1) egyenletrendszerre. Szimmetriatörést alkalmazva az ekvivalens megoldásokat ki lehet szűrni.

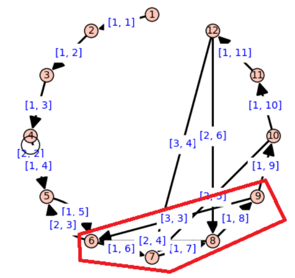
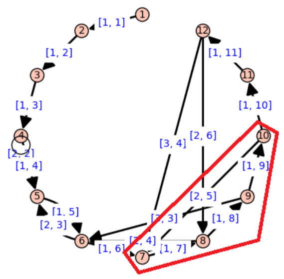
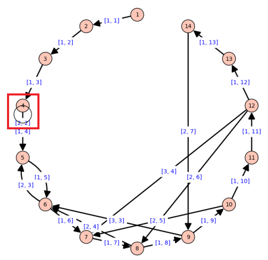
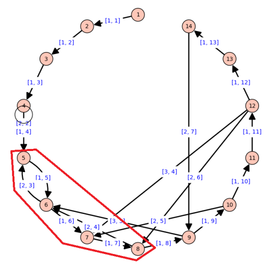
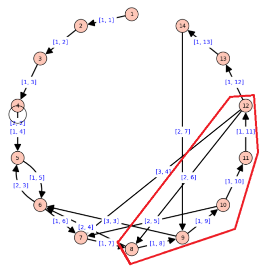
A SageMath kód a következő:

```
def Gmn(m,n):
    S=[k for k in [t.rhs() for t in solve(x*(n-x)==m,x) if t.rhs() in
     ZZ] if k>0]
    if len(S)>0:
        return True,S
    else:
        return False,S

def eqsys(L):
    x=var('x')
    M0=[];
    for i in [0..len(L)-1]:
        if (i+1)<len(L)-1:
            a=L[i+1];
            b=L[i];
            sol=solve(x*(a-x)-b,x)
            if len(sol)==2:
                M0.append(sol)
            else:
                M0.append([sol[0],sol[0]])
        else:
            a=L[0];
            b=L[i];
            if a!=b:
                sol=solve(x*(a-x)-b,x)
                if len(sol)==2:
                    M0.append(sol)
                else:
                    M0.append([sol[0],sol[0]])
    M1=[sorted([(M0[i][0]).rhs(),(M0[i][1]).rhs()]) for i in [0..len(
   M0)-1]]
    return M1

def is_EQ(L1,L2):
    n=len(L1)
    L0=[[L1[(k+t)%n] for k in [0..n-1]] for t in [1..n-1]]
    return L2 in L0
```

```
def GGraph(k):
    G=DiGraph(multiedges=True, loops=True)
    for u in [1..2*k+4]:
        for v in [1..2*k+4]:
            IH,MO=Gmn(u,v)
            if IH:
                for s in MO:
                    t=u//ZZ(s)
                    w=str(sorted([s,t]))
                    if not (u,v,w) in G.edges():
                        G.add_edge((u,v,w))
    Kall = G.all_cycles_iterator(starting_vertices=[4..2*k+4],
    max_length=k+1)
    Kjo=[t for t in Kall if len(t)==k+1]
    KjoEQ=[]
    for t in Kjo:
        if Set(t)==Set([4]):
            KjoEQ.append([[2,2] for w in [1..len(t)-1]])
        else:
            KjoEQ.append(eqsys(t))
    return KjoEQ

W=GGraph(k)
SOL=[W[0]]
for t in [1..len(W)-1]:
    if not True in [is_EQ(s,W[t]) for s in SOL]:
        SOL.append(W[t])

for s in [0..len(SOL)-1]:
    M=SOL[s]
    pretty_print(s+1,". megoldas:")
    for i in [0..len(M)-1]:
        if (i+1)<k:
            pretty_print(M[i][1], "+", M[i][0], "=" , M[i+1][1], "*"
    , M[i+1][0])
        else:
            pretty_print(M[i][1], "+", M[i][0], "=" , M[0][1], "*" ,
    M[0][0])
```

Kis n-ekre a megoldásokat egy táblázatban szemléltetném:

$n = 1$	$2 + 2 = 2 \cdot 2$			
$n = 2$	$2 + 2 = 2 \cdot 2$ $2 + 2 = 2 \cdot 2$		$5 + 1 = 2 \cdot 3$ $2 + 3 = 5 \cdot 1$	
$n = 3$	$2 + 2 = 2 \cdot 2$ $2 + 2 = 2 \cdot 2$ $2 + 2 = 2 \cdot 2$		$6 + 1 = 7 \cdot 1$ $7 + 1 = 4 \cdot 2$ $4 + 2 = 6 \cdot 1$	
$n = 4$	$2 + 2 = 2 \cdot 2$ $2 + 2 = 2 \cdot 2$ $2 + 2 = 2 \cdot 2$ $2 + 2 = 2 \cdot 2$		$5 + 1 = 3 \cdot 2$ $3 + 2 = 5 \cdot 1$ $5 + 1 = 3 \cdot 2$ $3 + 2 = 5 \cdot 1$	

$n = 4$	$6+1=7\cdot 1$ $7+1=8\cdot 1$ $8+1=3\cdot 3$ $3+3=6\cdot 1$		$7+1=8\cdot 1$ $8+1=9\cdot 1$ $9+1=5\cdot 2$ $5+2=7\cdot 1$	
$n = 5$	$2+2=2\cdot 2$ $2+2=2\cdot 2$ $2+2=2\cdot 2$ $2+2=2\cdot 2$ $2+2=2\cdot 2$		$5+1=6\cdot 1$ $6+1=7\cdot 1$ $7+1=4\cdot 2$ $4+2=3\cdot 2$ $3+2=5\cdot 1$	
$n = 5$	$8+1=9\cdot 1$ $9+1=10\cdot 1$ $10+1=11\cdot 1$ $11+1=6\cdot 2$ $6+2=8\cdot 1$			

3. Algoritmusok összehasonlítása

3.1. Python kód

A Briggs és társai által írt cikkben [1] legyártottak egy Python kódot, amely elegendő idő és számítási teljesítmény esetén megtalálja a felhasználó számára a sorozat bármely kívánt tagját.

A felhasznált Python kód:

```
import math
import sys
k=int(raw_input('Specify n (number of equations): '))
sols=[]
temp=[]
a={}
b={}
c={}
d={}
def check(k,level):
    if level<k:
        if a[level-1]+b[level-1]==a[level]*b[level]:
          return True
        else:
          return False
    if level==k:
        if a[level-1]+b[level-1]==a[level]*b[level] and a[level]+b[
    level]==a[1]*b[1]:
          return True
        else:
          return False

def assign_the_c(lev):
    t=int(math.floor(math.sqrt(a[lev]*b[lev])))+1
    return t
def assign_the_d(level):
    t=int(math.floor((a[level-1]+b[level-1])/a[level]))+1
    return t
def is_rotation_of(list1,list2):
    length1=len(list1)
    for i in range(len(list1)):
        if list2==list1[i:length1]+list1[0:i]:
          return True
    return False
```

```
def add_to_list(k,a,b,sols):
    t=[]
    for i in range(k):
        t+=[[a[i+1],b[i+1]]]
    for item in sols:
        if is_rotation_of(t,item): return sols
    return sols+[t]
def loop_attempt(k,lev,a,b,c,d,sols):
    if lev==1:
        n=2*k+3
        for i1 in range(1,2):
            a[1]=i1
            for b[1] in range(1,n):
                c[1]=assign_the_c(1)
                for a[2] in range(1,c[1]):
                    d[2]=assign_the_d(2)
                    sols=loop_attempt(k,2,a,b,c,d,sols)
        return sols
    elif lev==k:
        for b[lev] in range(a[lev],d[lev]):
            if check(k,lev):
                sols=add_to_list(k,a,b,sols)
        return sols
    else:
        for b[lev] in range(a[lev],d[lev]):
            if check(k,lev):
                c[lev]=assign_the_c(lev)
                for a[lev+1] in range(1,c[lev]):
                    d[lev+1]=assign_the_d(lev+1)
                    sols=loop_attempt(k,lev+1,a,b,c,d,sols)
        return sols
trivsol=[]

for i in range(k):
    trivsol.append([2,2])
sols.append(trivsol)
details=raw_input('\nView (n)umber of solutions or (d)etails? ')
sols=loop_attempt(k,1,a,b,c,d,sols)
if details=='n':
    print len(sols)
if details=='d':
    for item in sols:
        print item
```

A futási idő mellett, más probléma is akad az algoritmussal. A kimenetet vizsgálva, már kis n értéknél sem adnak megfelelő eredményt.

Ha megnézzük az $n = 3$, és $n = 5$ eseteket akkor a következőket kapjuk:

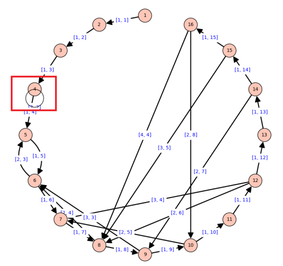
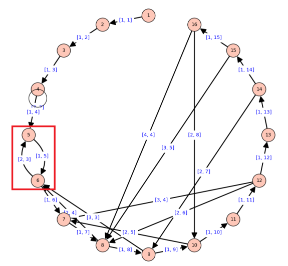
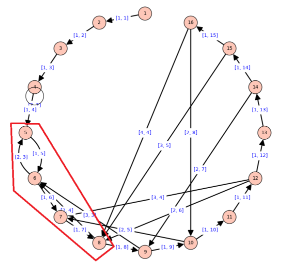
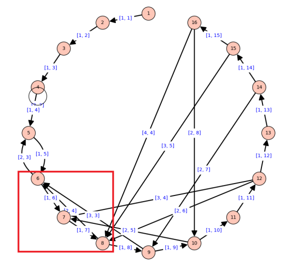
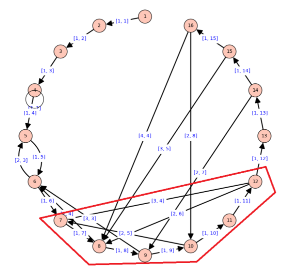
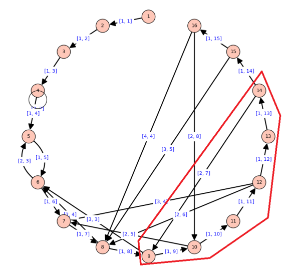
```
Specify n (number of equations): 3

View (n)umber of solutions or (d)etails? d
[[2, 2], [2, 2], [2, 2]]
[[1, 6], [1, 7], [2, 4]]
>>>
Specify n (number of equations): 5

View (n)umber of solutions or (d)etails? d
[[2, 2], [2, 2], [2, 2], [2, 2], [2, 2]]
[[1, 5], [1, 6], [1, 7], [2, 4], [2, 3]]
[[1, 8], [1, 9], [1, 10], [1, 11], [2, 6]]
```

A táblázatban kigyűjtött megoldásokkal összevetve látható, hogy ebben a két esetben jól futott a program, és megkaptuk az összes lehetséges megoldást.

Vizsgáljuk meg $n = 6$-ot illetően milyen eredményeket kapunk:

```
Specify n (number of equations):  6

View (n)umber of solutions or (d)etails?  d

[[2, 2], [2, 2], [2, 2], [2, 2], [2, 2], [2, 2]];
[[1, 5], [2, 3], [1, 5], [2, 3], [1, 5], [2, 3]];
[[1, 6], [1, 7], [2, 4], [1, 6], [1, 7], [2, 4]];
[[1, 7], [1, 8], [1, 9], [1, 10], [1, 11], [3, 4]];
[[1, 9], [1, 10], [1, 11], [1, 12], [1, 13], [2, 7]];
```

Kimenetként 5 darab nem ekvivalens megoldást kaptunk, viszont, ha összehasonlítjuk az általunk futtatott SageMath algoritmus eredményével, akkor észrevehető, hogy egy megoldás hiányozni fog.

$n = 6$	$2+2=2\cdot2$ $2+2=2\cdot2$ $2+2=2\cdot2$ $2+2=2\cdot2$ $2+2=2\cdot2$ $2+2=2\cdot2$		$5+1=3\cdot2$ $3+2=5\cdot1$ $5+1=3\cdot2$ $3+2=5\cdot1$ $5+1=3\cdot2$ $3+2=5\cdot1$	
$n = 6$	$5+1=6\cdot1$ $6+1=7\cdot1$ $7+1=8\cdot1$ $8+1=3\cdot3$ $3+3=3\cdot2$ $3+2=5\cdot1$		$6+1=7\cdot1$ $7+1=4\cdot2$ $4+2=6\cdot1$ $6+1=7\cdot1$ $7+1=4\cdot2$ $4+2=6\cdot1$	
$n = 6$	$7+1=8\cdot1$ $8+1=9\cdot1$ $9+1=10\cdot1$ $10+1=11\cdot1$ $11+1=4\cdot3$ $4+3=7\cdot1$		$9+1=10\cdot1$ $10+1=11\cdot1$ $11+1=12\cdot1$ $12+1=13\cdot1$ $13+1=7\cdot2$ $8+2=9\cdot1$	

További összehasonlításokat végezhetünk, azzal, hogy listázzuk a Briggs [1] által meghatározott megoldások számát, az általunk legyártottakkal.

	Python[1]	SageMath (2.2.2)
$n = 1$	1	1
$n = 2$	2	2
$n = 3$	2	2
$n = 4$	3	4
$n = 5$	3	3
$n = 6$	5	6
$n = 7$	4	5
$n = 8$	7	10
$n = 9$	7	11
$n = 10$	12	17
$n = 11$	12	19
$n = 12$	21	36
$n = 13$	22	42

	Python [1]	SageMath (2.2.2)
$n = 14$	37	70
$n = 15$	47	97
$n = 16$	72	155
$n = 17$	93	219
$n = 18$	145	351
$n = 19$	198	514
$n = 20$	303	815
$n = 21$	427	1228
$n = 22$	637	1918
$n = 23$	917	2937
$n = 24$	1383	4614
$n = 25$	2008	7111

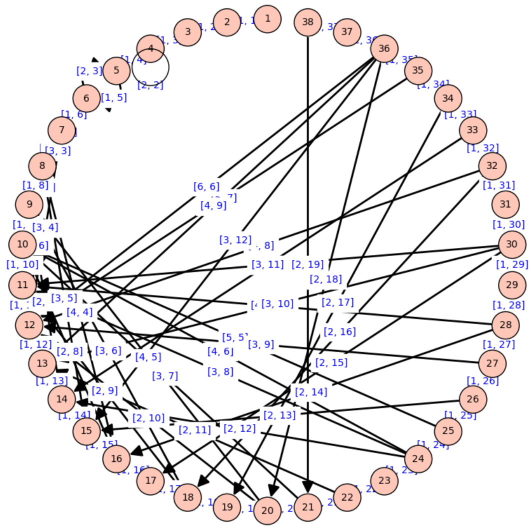
A táblázatból egyértelműen leolvasható, hogy Briggs [1] algoritmusa az n-ek növekedésével, egyre több megoldást nem talál meg.

3.2. Nagyobb n-re vizsgálat

A SageMath program $n = 17$ esetén még jól tudja kezeli az algoritmust, azaz viszonylag kevés idő alatt eredményt ad.

Ekkor 219 különböző megoldást fogunk kapni, amit hosszú lenne listázni, így csak két megoldást tüntetnék fel:

	Első példa	Második példa
	$5+1=3\cdot 2$	$5+1=6\cdot 1$
	$3+2=5\cdot 1$	$6+1=7\cdot 1$
	$5+1=6\cdot 1$	$7+1=8\cdot 1$
	$6+1=7\cdot 1$	$8+1=9\cdot 1$
	$7+1=8\cdot 1$	$9+1=5\cdot 2$
	$8+1=9\cdot 1$	$5+2=7\cdot 1$
	$9+1=10\cdot 1$	$7+1=8\cdot 1$
	$10+1=11\cdot 1$	$8+1=3\cdot 3$
n=17	$11+1=6\cdot 2$	$3+3=6\cdot 1$
	$6+2=8\cdot 1$	$6+1=7\cdot 1$
	$8+1=9\cdot 1$	$7+1=8\cdot 1$
	$9+1=5\cdot 2$	$8+1=9\cdot 1$
	$5+2=7\cdot 1$	$9+1=5\cdot 2$
	$7+1=8\cdot 1$	$5+2=7\cdot 1$
	$8+1=3\cdot 3$	$7+1=4\cdot 2$
	$3+3=3\cdot 2$	$4+2=3\cdot 2$
	$3+2=5\cdot 1$	$3+2=5\cdot 1$



4. Számtani sorozatokkal való kapcsolat

Szakdolgozatom második részében áttérnénk a megoldások egy speciális esetének vizsgálatára. Eddig a természetes számok körében mozogtunk, most viszont kvadratikus testekben is vizsgálódunk. Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók egy számtani sorozatot alkotnak tetszőleges sorrendben. Célunk meghatározni, hogy adott n esetén hány megoldása lehet az egyenletrendszernek. Illetve, ha feltételünket módosítjuk, és csak az x-ek egy kollektív csoportjának kell számtani sorozatot alkotnia, akkor hány tag után fog bekövetkezni az, hogy a triviális csupa nulla és csupa kettesen kívül nem fogunk más megoldást kapni.

4.1. Rezultáns módszer

Számításaink megkönnyítéséhez bevezetjük a rezultáns fogalmát. A rezultáns képes meghatározni két polinom közös gyökeit. Többváltozós esetben fogjuk használni, ami annyit tesz, hogy lépésenként elimináljuk a változókat, addig amíg egyváltozós polinomra nem redukáljuk egyenletrendszerünket.

4.1.1. Definíció. Legyenek f és g polinomok az $R[x]$ polinomgyűrű elemei; jelölje f fokát m, g fokát n. Az R gyűrűről feltesszük, hogy kommutatív és egységelemes.

$$f = f_0 + f_1X + \ldots + f_mX^m \qquad \text{és} \qquad g = g_0 + g_1X + \ldots + g_nX^n.$$

Ekkor a két polinom rezultánsa a Sylvester-mátrix determinánsa:

$$\operatorname{Res}(f,g) = \det \begin{pmatrix} f_m & f_{m-1} & \cdots & f_0 & & & & \\ & f_m & f_{m-1} & \cdots & f_0 & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & & f_m & f_{m-1} & \cdots & f_0 \\ g_n & g_{n-1} & \cdots & g_0 & & & & \\ & g_n & g_{n-1} & \cdots & g_0 & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & & g_n & g_{n-1} & \cdots & g_0 \end{pmatrix}.$$

A mátrix m sorban tartalmazza f együtthatóit, és n sorban g együtthatóit, a többi koordinátája nulla. Tehát a Sylvester-mátrix négyzetes, $m+n$ sorral és oszloppal.

4.2. Négy ismeretlenes eset

4.2.1. Gyökkeresés

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_3 \cdot x_4 \\ x_3 + x_4 &= x_1 \cdot x_2. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Tegyük fel, hogy x_1, x_2, x_3, x_4 számtani sorozatot alkot. Ekkor a további két egyenlettel bővíthetjük egyenletrendszerünket:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2x_2 \\ x_2 + x_4 &= 2x_3. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

SageMath-ban is létrehozzuk egyenleteinket:

```
P.<x1,x2,x3,x4>=QQ[]
f1=x1+x2-x3*x4
f2=x3+x4-x1*x2
f3=x1+x3-2*x2
f4=x2+x4-2*x3
```

Majd elkezdjük a rezultáns alkalmazásával eliminálni a változókat. Először x_1-et tüntetjük el

```
g1=f1.resultant(f2,x1)
g2=f1.resultant(f3,x1)
g3=f1.resultant(f4,x1)
```

Ekkor:

$$\begin{aligned} g1 &= -x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2^2 + x_3 + x_4 \\ g2 &= x_3 \cdot x_4 - 3x_2 + x_3 \\ g3 &= x_2 - 2x_3 + x_4. \end{aligned}$$

x_2-vel folytatva:

```
h1=g1.resultant(g2,x2)
h2=g1.resultant(g3,x2)
```

$$\begin{aligned} h1 &= -2x_3^2 \cdot x_4^2 - x_3^2 \cdot x_4 + x_3^2 + 9x_3 + 9x_4 \\ h2 &= -2x_3^2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4^2 + 4x_3^2 - 4x_3 \cdot x_4 + x_4^2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Végül a $h1$ egyenletből kifejezzük x_4-et. Ekkor egy negyedfokú, egyváltozós polinomot kapunk eredményül:

$$4x_4^8 - 6x_4^7 + 90x_4^6 - 256x_4^5 + 516x_4^4 - 2160x_4^3 + 2800x_4^2.$$

Ezt faktorizálva:

$$2x_4^2 \cdot (x_4 - 2)^2 \cdot (x_4^2 + 2x_4 + 10) \cdot (2x_4^2 + x_4 + 35)$$

megkapjuk a 0-t és 2-t megoldásul, továbbá két másodfokú polinomot, amelyek gyökeit az alábbiakban vizsgáljuk.

A $2x_4^2 + x_4 + 35$ polinom vizsgálatával kezdenénk. Az alábbi négy táblázatból látszik, hogy ez a polinom nem fog megoldást adni az egyenletrendszerünkre hiszen már az x_3, x_4 értékek közül sem kapunk olyan párt, amely közös gyöke lenne a megadott polinomoknak. Ez a táblázatok utolsó soraiból következtethető, ugyanis, ha a $h2$-t kiértékeljük, az x_3, x_4 helyeken, akkor 0-t kellene kapnunk, ha közös gyökök lennének. Nullától különböző értékeket kaptunk, így megállunk ennek a polinomnak a vizsgálatával, és áttérünk a másikra.

Polinom	$2x_4^2 + x_4 + 35$	
	x_{4_1}	x_3
	$-\frac{3}{4}i\sqrt{31} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2}\left(i\sqrt{62} + 5\sqrt{2}\right)$
$h2(x_3, x_4)$	$-\frac{21}{64}\sqrt{62}\sqrt{31}\sqrt{2} - \frac{39}{64}i\sqrt{62}\sqrt{2} + \frac{51}{32}i\sqrt{31} - \frac{885}{32}$	

	x_{4_1}	x_3
	$-\frac{3}{4}i\sqrt{31} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2}\left(-i\sqrt{62} + 5\sqrt{2}\right)$
$h2(x_3, x_4)$	$\frac{3}{64}\sqrt{62}\sqrt{31}\sqrt{2} + \frac{93}{64}i\sqrt{62}\sqrt{2} - \frac{93}{32}i\sqrt{31} - \frac{93}{32}$	

	x_{4_2}	x_3
	$\frac{3}{4}i\sqrt{31} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2}\left(i\sqrt{62} - 7\sqrt{2}\right)$
$h2(x_3, x_4)$	$\frac{3}{64}\sqrt{62}\sqrt{31}\sqrt{2} - \frac{93}{64}i\sqrt{62}\sqrt{2} + \frac{93}{32}i\sqrt{31} - \frac{93}{32}$	

	x_{4_2}	x_3
	$\frac{3}{4}i\sqrt{31} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2}\left(-i\sqrt{62} + 5\sqrt{2}\right)$
$h2(x_3, x_4)$	$-\frac{21}{64}\sqrt{62}\sqrt{31}\sqrt{2} + \frac{39}{64}i\sqrt{62}\sqrt{2} - \frac{51}{32}i\sqrt{31} - \frac{885}{32}$	

Az $x_4^2+2x_4+10$ polinom két megoldás ad vissza. Az egyiknek a differenciája $-2i$, a másiknak $2i$ lesz. Tehát mindkét megoldásunk a $\mathbb{Q}(i)$-ból származik.

<table>
<tr><td>Polinom</td><td colspan="4">$x_4^2+2x_4+10$</td></tr>
<tr><td>x_4</td><td colspan="2">$-3i-1$</td><td colspan="2">$3i-1$</td></tr>
<tr><td>x_3</td><td>$\frac{4}{5}i+\frac{3}{5}$</td><td>$-i-1$</td><td>$-\frac{4}{5}i+\frac{3}{5}$</td><td>$i-1$</td></tr>
<tr><td>$h2(x_3,x_4)$</td><td>$\frac{387}{25}i-\frac{816}{25}$</td><td>$0$</td><td>$-\frac{387}{25}i-\frac{816}{25}$</td><td>$0$</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>$i-1$</td><td>1</td><td>$-i-1$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$g2(x2,x3,x4)$</td><td>0</td><td>$3i-6$</td><td>0</td><td>$-3i-6$</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td colspan="2">$3i-1$</td><td colspan="2">$-3i-1$</td></tr>
<tr><td>Megoldások</td><td colspan="2">$x_1=3i-1$
$x_2=i-1$
$x_3=-i-1$
$x_1=-3i-1$</td><td colspan="2">$x_1=-3i-1$
$x_2=-i-1$
$x_3=i-1$
$x_1=3i-1$</td></tr>
</table>

4.2.2. Permutáció az összes megoldás előállítására

Az x_i-k sorrendjének megválasztása négyváltozós esetben 4!, azaz 24-féleképpen történhet. Ezek listázása nem igényel nagy időbefektetést a SageMath segítségével.

```
P.<x1,x2,x3,x4>=QQ[]
g=P.gens()
G=[k for k in g]
PG=Permutations(G)
S4=[]
MO=[]
I1=[x1+x2-x3*x4,x3+x4-x1*x2]
for t in PG:
    I2=[t[0]+t[2]-2*t[1],t[1]+t[3]-2*t[2]]
    I=ideal(I1+I2)
    Igb=I.groebner_basis()
    pretty_print(t)
    pretty_print(Igb)
    pretty_print(ideal(Igb).variety(ring=QQbar))
    S4=S4+[Igb]
    MO=MO+[ideal(Igb).variety(ring=QQbar)]
```

Először megkeressük a generátorelemeket, majd segítségükkel elkészítjük az elemek összes permutációját. Ezután végigmegyünk az egyes permutációkon, és ideálfaktorizációval, illetve Gröebner-bázis kereséssel próbáljuk csökkenteni az ismeretlenek számát. A ciklus lefutása után kapunk 24 listát, amely 5-5 egyenletet tartalmazni. Végül a rezultáns-módszert alkalmazva soronként, kapunk 1-1 olyan negyedfokú polinomot, amely már csak egyetlen ismeretlent fog tartalmazni. Ezt faktorizálva, pedig megkapjuk minden esetben megoldásként a nullát illetve a kettőt. A két triviális megoldás mellett megjelenhet legfeljebb két polinom, amelyek gyökei már a $\mathbb{Q}(i)$ testből fognak kikerülni, azaz Gauss-egészeket kapunk.

Az algoritmus lefutása után az első négy permutációra az alábbi kimentet kapjuk:

[x1, x2, x3, x4] $\left[x_4^3 + 5x_4^2 - 45x_3 + 31x_4, x_3^2 + \frac{1}{3}x_4^2 - 6x_3 + \frac{10}{3}x_4, x_3x_4 - 5x_3 + 3x_4, x_1 - 3x_3 + 2x_4, x_2 - 2x_3 + x_4\right]$ [{x4: 0, x3: 0, x2: 0, x1: 0}, {x4: 2, x3: 2, x2: 2, x1: 2}, {x4: -1 - 3*I, x3: -1 - 1*I, x2: -1 + 1*I, x1: -1 + 3*I}, {x4: -1 + 3*I, x3: -1 + 1*I, x2: -1 - 1*I, x1: -1 - 3*I}]
[x1, x2, x4, x3] $[x_4^3 - 3x_4^2 - 5x_3 + 7x_4, x_3^2 + 3x_4^2 + 10x_3 - 18x_4, x_3x_4 + 3x_3 - 5x_4, x_1 + 2x_3 - 3x_4, x_2 + x_3 - 2x_4]$ [{x4: 0, x3: 0, x2: 0, x1: 0}, {x4: 2, x3: 2, x2: 2, x1: 2}, {x4: -1 - 1*I, x3: -1 - 3*I, x2: -1 + 1*I, x1: -1 + 3*I}, {x4: -1 + 1*I, x3: -1 + 3*I, x2: -1 - 1*I, x1: -1 - 3*I}]
[x1, x3, x2, x4] $\left[x_4^3 + 2x_4^2 - 8x_4, x_3^2 - \frac{1}{3}x_4^2 - \frac{4}{3}x_4, x_3x_4 - 2x_3, x_1 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right]$ [{x4: 0, x3: 0, x2: 0, x1: 0}, {x4: 2, x3: 2, x2: 2, x1: 2}, {x4: 2, x3: -2, x2: 0, x1: -4}, {x4: -4, x3: 0, x2: -2, x1: 2}]
[x1, x3, x4, x2] $[x_4^3 - 3x_4^2 + x_3 + x_4, x_3^2 + x_4^2 - 2x_3 - 2x_4, x_3x_4 - x_3 - x_4, x_1 - 2x_3 + x_4, x_2 + x_3 - 2x_4]$ [{x4: 0, x3: 0, x2: 0, x1: 0}, {x4: 2, x3: 2, x2: 2, x1: 2}]

A harmadik esetben, ha az x_i-ket $\{x_1, x_3, x_2, x_4\}$ sorrendben választjuk meg, akkor bejön egy olyan megoldás, ahol negatívak is megjelennek, nevezetesen a $\{-4, -2, 0, 2\}$ sorozat, ami a kezdeti feltételnek, miszerint pozitív megoldásokat keresünk, nem fog megfelelni.

4.3. Hat ismeretlenes eset

4.3.1. Gyökkeresés

A hat ismeretlenre való bővítés, nem fog nagy nehézséget okozni, hasonlóan tudjuk majd kezelni, mint a négy ismeretlenes egyenletrendszerünket.

Vizsgáljuk tehát az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= x_3 \cdot x_4 \\
x_3 + x_4 &= x_5 \cdot x_6 \\
x_5 + x_6 &= x_1 \cdot x_2 \\
x_1 + x_3 &= 2x_2 \\
x_2 + x_4 &= 2x_3 \\
x_3 + x_5 &= 2x_4 \\
x_4 + x_6 &= 2x_5.
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Az algoritmusunk a következő:

```
P.<x1,x2,x3,x4,x5,x6>=QQ[]
g=P.gens()
G=[k for k in g]
PG=Permutations(G)
S6=[]
I1=[x1+x2-x3*x4,x3+x4-x5*x6,x5+x6-x1*x2]
for t in PG:
    I2=[t[0]+t[2]-2*t[1],t[1]+t[3]-2*t[2],t[2]+t[4]-2*t[3],t[3]+t
    [5]-2*t[4]]
    I=ideal(I1+I2)
    Igb=I.groebner_basis()
    print(t,ideal(Igb).variety(ring=QQbar))
    S6=S6+[Igb]
```

Mivel hat ismeretlenünk van, és hét egyenletünk, így a rendszer túlhatározott. Továbbá, jelen esetben ez azt is maga után vonja, hogy az ideálok 0 dimenziósak lesznek, így a rezultánsos módszert alkalmazva, olyan egyváltozós egyenleteket kapunk, amelyekből az adott változó összes lehetséges megoldását visszakapjuk. Viszont jelen esetben, csak a triviális megoldásokat fogjuk 6!, azaz 720 soron keresztül kimenetként látni.

```
[x6, x5, x4, x3, x2, x1],

{x6: 0, x5: 0, x4: 0, x3: 0, x2: 0, x1: 0},

{x6: 2, x5: 2, x4: 2, x3: 2, x2: 2, x1: 2}
```

4.4. Összegzés

Az általunk vizsgált diofantikus egyenletrendszernek, ha bármely eleme nulla lesz, akkor az egész egyenletrendszer nullákból fog felépülni, így ezzel az esettel nem foglalkozunk, ugyanis az eredeti célkitűzésben is csak a pozitív megoldásokat vettük figyelembe.

Ha az egyenletrendszer első négy tagja számtani sorozatot alkot, akkor nem kapunk semmilyen speciális esetet, ugyanis a Gauss-egészek között találhatunk nem triviális megoldásokat. Ezzel szemben, ha ez legalább hat tagra fog teljesülni, akkor feltehető hogy, a csupa kettes megoldáson kívül nem fogunk mást találni. Viszont ezt egyelőre nem sikerült bizonyítani.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] C. Briggs, Y. Hirano, and H. Tsutsui. Positive solutions to some systems of Diophantine equations. *J. Integer Seq.*, 19(8):Art. 16.8.4, 8, 2016.

[2] J. E. Cremona and R. W. K. Odoni. Some density results for negative Pell equations; an application of graph theory. *J. London Math. Soc. (2)*, 39(1):16–28, 1989.

[3] P. Csikvári. Integral trees of arbitrarily large diameters. *J. Algebraic Combin.*, 32(3):371–377, 2010.

[4] E. Ghorbani, A. Mohammadian, and B. Tayfeh-Rezaie. Integral trees of odd diameters. *J. Graph Theory*, 70(3):332–338, 2012.

[5] R. L. Graham. On a Diophantine equation arising in graph theory. *European J. Combin.*, 1(2):107–112, 1980.

[6] A. Grytczuk. Gauss' Problem, Negative Pell's Equation and Odd Graphs. *Advances in Pure Mathematics*, 01:133–135, 2011.

[7] R. Rupnow. A survey of distance magic graphs. *Master's report, Michigan Technological University*, 2014.