

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

Szakdolgozat

Matematika Geogebrával

készítette:

Zdrobe Marius

témavezető: Dr. Tengely Szabolcs

Debrecen, 2009

TARTALOMJEGYZÉK

Tartalomjegyzék	i
1 Bevezetés	2
2 A <i>Geogebra</i> program	3
3 Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása <i>Geogebra</i>val	6
3.1. Az egyenlet, egyenlőtlenség	6
3.2. A másodfokú egyenlet	7
3.3. A <i>Geogebra</i> alkalmazása	9
4 Euler-féle vonal, Feuerbach-féle kör	17
4.1. A háromszögek nevezetes vonalai és pontjai	17
4.2. Az Euler-féle vonal és a Feuerbach-féle kör	18
4.3. Szerkesztés <i>Geogebra</i> val	20
4.4. Feuerbach kilenc-pont tételének egyik bizonyítása	24
5 Az integrál szemléltetése	27
5.1. Integrálok	27
5.2. A Riemann-integrál	28
5.3. Az alsó és a felső integrálközelítő összeg	28
5.4. Az integrál szemléltetése <i>Geogebra</i> val	29
6 Függvényvizsgálat	33
6.1. A függvényvizsgálat elemei	33
6.2. A <i>Geogebra</i> alkalmazása függvényvizsgálathoz	35
7 Összegzés	39
Irodalomjegyzék	40

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek Dr. Tengely Szabolcsnak, hogy folyamatos útmutatással és hasznos tanácsokkal segítséget nyújtott szakdolgozatom elkészítéséhez.

Köszönettel tartozom családomnak is, mert türelmesek voltak és támogattak mindenben tanulmányaim sikeres elvégzéséhez.

1. BEVEZETÉS

A *Geogebra* egy általános célú dinamikus matematikai segédprogram, amit matematikai ábrázolás céljából fejlesztettek ki. Kiemelkedik a többi hasonló program közül könnyű kezelhetőségével, és sokoldalúságával. Ezen kívül előnyei a szabad hozzáférhetőség és használat, a platform függetlenség (operációs rendszer független) és az, hogy van magyar nyelvű változata.

Ez a szakdolgozat a *Geogebra* program néhány gyakorlati alkalmazását mutatja be. Segítséget jelenthet az általános vagy középiskolában matematikát tanító tanároknak, a diákjaiknak, vagy bárkinek akit érdekel a program abban, hogy megismerkedhessenek annak használati módjával. Segítségével a tanárok színesebbé tehetik a matematika órákat, rugalmasabban és pontosabban szerkeszthetnek vagy szemléltethetnek. Így a diákok érdekesebb matematika órákon vehetnek részt, ezeken könnyebben követhetik a szerkesztéseket, maguk is megtanulhatják a program használatát, szert téve nemcsak matematikai, hanem informatikai ismeretekre is. Így a program használata motivációként is hasznos lehet.

Ezen kívül a *Geogebra* azoknak is segítséget nyújthat, akik valamilyen ok miatt nem tudnak papír alapú szerkesztéseket elvégezni. Lehetővé teszi a pontos szerkesztést és az utólagos módosításokat, elkerülve az újraserkesztés szükségességét. Végig lehet futtatni gombnyomásra a szerkesztés lépéseit. Van benne nyomvonal követési lehetőség, ami hasznos a mértani helyek meghatározásában, animáció készítési lehetőség, valamint makró segítségével új eszközöket is lehet létrehozni.

Az első témakörben a *Geogebra* programot mutatom be. A másodikban az egyenletek témakörében használható alkalmazást ismertetem. A harmadik témakörben a *Geogebra* egy geometriai alkalmazása következik. Ebben a fejezetben bizonyítás szemléltetésére is használom a programot. A negyedik fejezetben az analízis témakörében az integrál egy látványos szemléltetési módjával folytatom. Az utolsó részben szintén analízis témakörben a program lehetőségeit vázolom fel egy függvényvizsgálat esetén. Minden alkalmazás esetén, az elméleti rész után, részletesen leírom annak készítési módját úgy, hogy azt bárki végig tudja vinni. Ezzel szándéksom azokat az olvasókat segíteni, akik nem rendelkeznek sok számítógépes gyakorlattal. Ezek a példák nem fedik le az egyes témakörök minden részét, de elég általánosak ahhoz, hogy sok területen alkalmazhassuk őket. Általában ehhez csak kisebb módosítások szükségesek.

2. A Geogebra PROGRAM

A *Geogebra* egy középiskolai matematika oktatási segédprogramnak szánt szoftver, melynek kitalálója és készítője *Markus Hohenwarter*. Az általam használt verzió a 2007. augusztus 9.-én megjelent 3.0 verzió. A program szabad-hozzáférésű. Működéséhez *Java* futtató környezet szükséges, amit szintén díjmentesen letölthetünk az internetről. Ez biztosítja a program számára a platform függetlenségét.

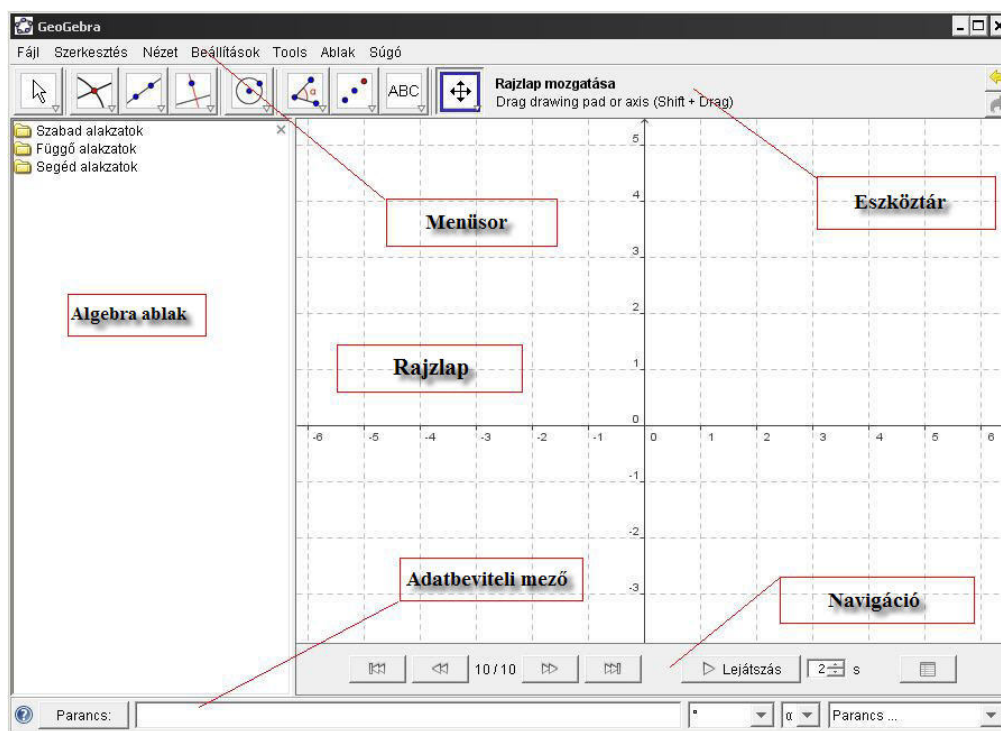
A dinamikus matematikai szoftvereknek, amelyek közé a tárgyalt program is tartozik, néhány jellemző szolgáltatását sorolom fel:

- *Interaktivitás* - az ábrázolt pontok között logikai kapcsolat van, azaz van olyan pont amit mi teszünk a rajzlapra, ezeket bázis pontoknak szoktuk nevezni, és olyanok amiket ezekből származtatunk; a bázispontok helyének változtatásával a többi pont ami ezektől függ is elmozdul;
- *Szerkesztés lépéseinek visszajátszása* - a program megjegyzi a szerkesztés lépéseit, és így utólag bármikor visszanezézhetjük, vagy levetíthetjük az előre elkészített szerkesztést;
- *Animáció készítés* - általában azt jelenti, hogy a bázispontot végig vezeti egy alakzaton és mindig a megfelelő ábra jelenik meg;
- *Nyomvonal megjelenítés* - a bázispont végig fut egy alakzaton és a tőle függő pont vonalat húz maga után, így nyomvonal jelenik meg; ezt általában mértani hely meghatározásánál lehet jól használni;
- *Makró készítés* - A program képes új eszközt létrehozni, megjegyyez egy műveletsort, amit gombnyomásra elvégez bármikor.

Fontos megemlíteni, hogy a *Geogebra* fel van szerelve a makró készítés lehetőségével, ami új eszközök létrehozására ad lehetőséget, úgy hogy a program megjegyyez több lépésből álló műveletsort, amit e gomb segítségével bármikor egy kattintásra elvégezhetünk.

A Geogebra ablakának felépítése:

- ☞ *Menüsor* - a program egyéb funkcióit, beállításait lehet itt elvégezni, az eszközöket innen nem lehet elérni, azokat az eszköztárból lehet kiválasztani;



2.1. ábra.

- ⇒ *Eszköztár* - itt elérhető minden szerkesztési eszköz vizuálisan gombokkal, de ha rávisszük az egér mutatóját, akkor szövegesen is megjelenik az eszköz neve;
- ⇒ *Parancssor* - itt lehet beírni adatokat szövegesen, algebrai alakban; amikor egy ilyen sort beírnunk, megjelenik a megfelelő alakban, az algebrai ablakban és a megfelelő rajz a geometriai ablakban; ennek szintaktikája részletezve van a súgóban;
- ⇒ *Algebrai ablak* - ebben az objektumok jelennek meg képlettel; van szabad alakzat, függő alakzat és segéd alakzat; a szabad alakzat például pont esetén a bázispont, tehát amit mozgatni lehet; a függő alakzat az, ami együtt mozog az elmozdított szabad alakzattal; a segéd alakzat pedig olyan, amit mi jelölhetünk, annak *Tulajdonságok* menüjében és később amikor akarjuk eltüntethetjük a rajzlapról;
- ⇒ *Geometria ablak (rajzlap)* - ez a program rajzoló része, itt jelennek meg az alakzatok síkba rajzolva; ha ezen az ablakon rávisszük az egeret egy alakzatra, akkor megjelenik egy leírása; ha kétszer rákattintunk az egér bal gombjával egy objektumra, akkor megjelenik a *Tulajdonságok* párbeszédablak, ahol egyébként jobb oldalon a többi alakzat is fel van sorolva;

- ⇒ *Navigációs eszköztár* - arra szolgál, hogy a szerkesztés lépései között lépeges-sünk; a *Lejátszás* gombbal automatikusan lejátssza a program a szerkesztés lépéseit; a *Szerkesztő Protokoll* gombbal pedig egy táblázatban jeleníti meg a lépéseket, a definíciókat, a megfelelő parancsokat, és itt lehet töréspontokat létrehozni.

A programnak nagyon jó magyar nyelvű súgója van, ezért nem sorolom fel a parancsokat, és alakzat eszköztárból való létrehozásának módját. Ezekkel a későbbiekben az alkalmazások készítésének leírásában foglalkozom.

A számok esetében a tizedesvessző jele a pont és a programot be lehet állítani, hogy hány tizedes jeggyel számoljon a *Beállítások* menü *Tizedes Hely* menüpon-tjában.

Nagyon hasznos, hogy a parancssorban van súgó, a *Parancs* gomb megnyomá-sával a rajzlapról, vagy az algebra ablakból választhatunk objektumot. Lista van matematikai jelekkel, operátorokkal és az összes parancssal, amit egy kattintással beilleszt a program a parancssor adatbeviteli mezőjébe.

3. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA *Geogebra*val

3.1. Az egyenlet, egyenlőtlenség

Az egyenletet, illetve egyenlőtlenséget többféleképpen megközelíthetjük. Ha az általános iskolában is használt megközelítést használjuk, akkor az egyenletről azt mondjuk, hogy olyan nyitott (hiányos) mondat, amely úgy írható le, hogy két kifejezés közé az egyenlőség jelét tesszük. A továbbiakban alaphalmazként a valós számok halmazát használjuk.

Példa:

$$\begin{aligned}3x - 2 &= 2x + 2, \\ 2y^3 + 5y^2 + 3 &= 5y - 7.\end{aligned}$$

Egyenlőtlenség esetén ez a jel lehet: $<$ (kisebb), $\leq$ (kisebb egyenlő), $>$ (nagyobb), $\geq$ (nagyobb egyenlő), vagy a $\neq$ (nem egyenlő) jel.

Példa:

$$\begin{aligned}3x - 2 &< 2x + 2, \\ 2y^3 + 5y^2 + 3 &\geq 5y - 7.\end{aligned}$$

Az egyenletet, egyenlőtlenséget tekinthetjük, olyan nyitott mondatnak, amelyet egy olyan logikai függvényként (igaz, hamis) értelmezzük, melynek két oldalán függvények vannak.

Példa:

$$\begin{aligned}ax + b &= cx + d, \\ ax^2 + bx + c &\leq dx + g.\end{aligned}$$

Az egyenlet, egyenlőtlenség lehet algebrai vagy transzcendens egyenlet, aszerint, hogy a kifejezések algebrai kifejezések vagy nem (trigonometrikus, exponenciális, logaritmikus).

Az alaphalmaz az a halmaz ahonnan választhatjuk a változó értékét. Azt az értéket, amelyre az egyenlet vagy egyenlőtlenség igaz, megoldásnak vagy gyöknek nevezzük. A megoldások halmazát igazsághalmaznak nevezzük. Ha az egyenlet,

egyenlőtlenség minden adott értékre igaz akkor azonosságnak illetve azonos egyenlőtlenségnek nevezzük. Az egyenlet, egyenlőtlenség határozott, ha véges számú értékre igaz, ellenkező esetben határozatlan.

Egyenletet és egyenlőtlenséget megoldani annyit jelent, mint meghatározni az igazsághalmazát.

3.2. A másodfokú egyenlet

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$ másodfokú egyenletnek nevezzük. A következő másodfokú egyenleteket hiányos másodfokú egyenleteknek nevezzük:

- ha $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$, akkor $ax^2 + bx = 0$,
- ha $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$, akkor $ax^2 + c = 0$.

A másodfokú egyenlet általános megoldása:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Első lépésként kiemelünk minden tagból a -t, és a következőt kapjuk:

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0.$$

Megpróbáljuk a kifejezést úgy átalakítani, hogy a zárójelben két tag négyzetének a különbségét kapjuk. Ehhez előbb teljes négyzetté alakítunk:

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = 0,$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0.$$

Amennyiben $b^2 - 4ac \geq 0$:

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \right)^2 \right] = 0,$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] = 0.$$

Felhasználva az $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$ azonosságot szorzattá alakítunk:

$$a \left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] = 0.$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamely tényezője 0. Így a következőket írhatjuk:

$$a \left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] = 0, \quad a \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] = 0,$$

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0, \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0,$$

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor a következő átalakításokat végezzük:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

$$4a^2 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = b^2 - 4ac.$$

Most bevisszük a $4a^2$ -t bevisszük a zárójelbe és egyszerűsítünk:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

A fenti egyenlet és a $b^2 - 4ac < 0$ feltételektől összevetve a következő eredményt kapjuk:

$$(2ax + b)^2 < 0,$$

ami valós számok esetén lehetetlen, tehát ebben az esetben nincs valós megoldás.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A másodfokú egyenlet megoldásainak száma a diszkriminánstól függ, amelynek képlete: $D = b^2 - 4ac$. A diszkrimináns értékétől függően:

- ha $D > 0$, akkor két különböző valós gyök van, x_1 és x_2 ,
- ha $D = 0$, akkor egy(két egyenlő) valós gyök van, $x_1 = x_2$,
- ha $D < 0$, akkor nincs valós gyöke az egyenletnek.

3.3. A Geogebra alkalmazása

A *Geogebra*ban más matematikai programokkal ellentétben, amelyek csak megadják az egyenlet megoldását, esetleg a megoldáshoz vezető lépéseket, grafikus úton oldjuk meg ezeket. Ezért kapcsolatot teremt a függvények, amelyeket gyakran szoktunk ábrázolni, és az ily módon mostmár szintén ábrázolt egyenletek között. Itt az egyenlet két oldalát ábrázolandó függvényeknek tekintjük és a metszéspontok a megoldások. Az egyenlőtlenségek esetén szinten leolvasható a grafikonokból a megoldás.

A *Geogebra*val nagyon sokféle egyenlet és egyenlőtlenség oldható meg, ábrázolható.

Ebben a fejezetben az:

$$ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f \quad (<, >)$$

alakú egyenletek, egyenlőtlenségek *Geogebra*val való megoldását tárgyalom.

Tehát egyismeretlenes, legfeljebb másodfokú algebrai egyenlet, vagy egyenlőtlenség megoldása a cél.

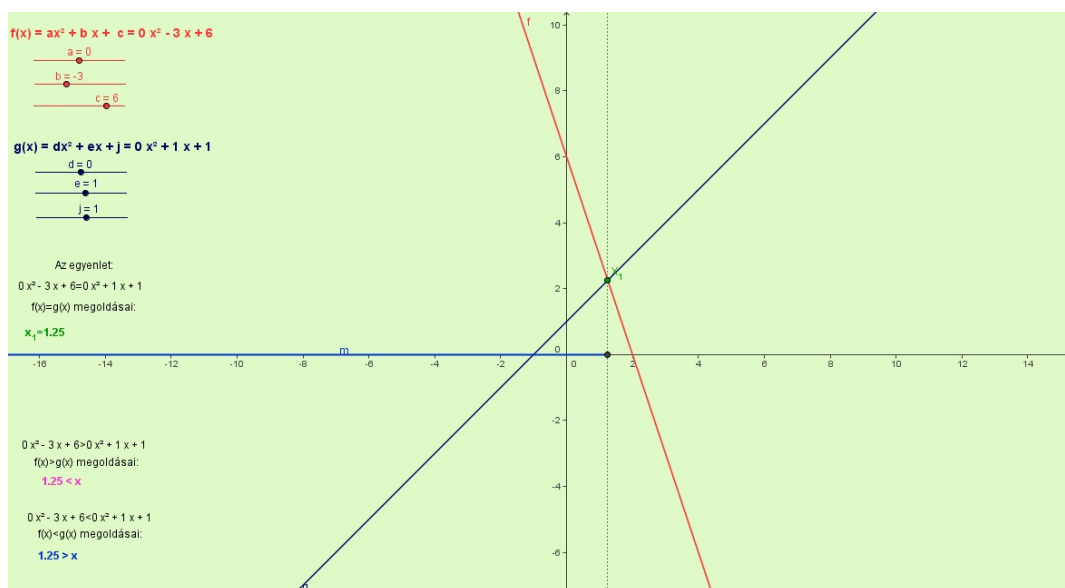
Azért van az egyenlet mindkét oldalán egy-egy másodfokú kifejezés, hogy a *Geogebra*val való megoldása látványosabb legyen. Így a megoldás nem egy parabola (egyenes) és az x-tengely metszéspontjai lesznek, hanem a két parabola (egyenes) metszéspontjai.

Fontos megjegyeznem, hogy a program az egyenletmegoldásokat, és általában a kiszámított értékeket, alapértelmezésként két tizedes jegyes pontossággal, kerekítve számítja és jeleníti meg. Ezt az opciót állítani lehet 0-tól 5 tizedesjegyre, tehát százvezredekre kerekített értékig.

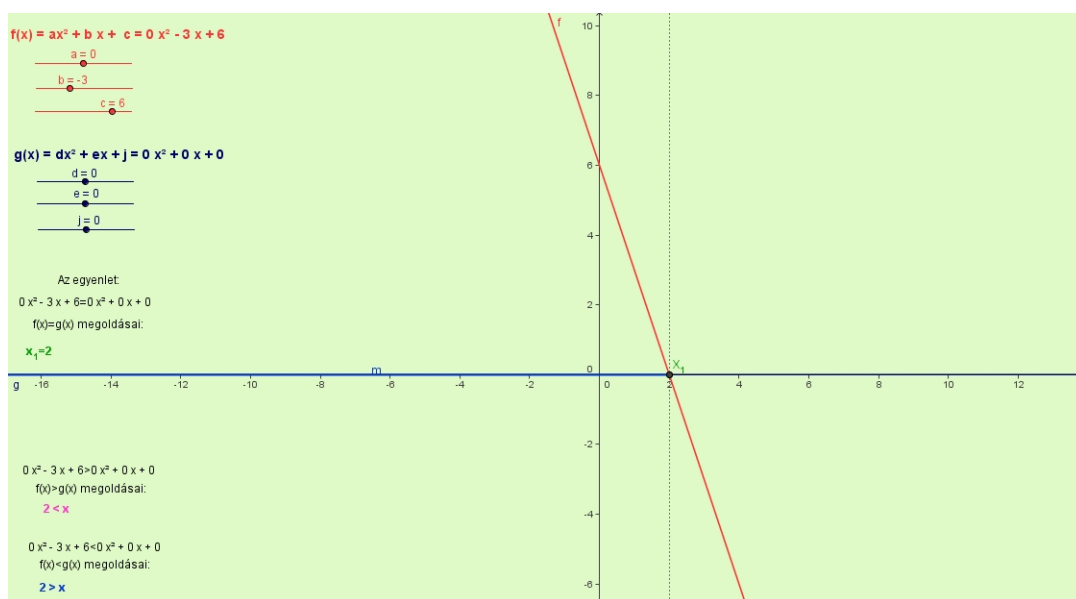
Ez a *Geogebra*val készített alkalmazás használható az általános iskolában és a középiskolában is az egyenletek, egyenlőtlenségek tanításához. Alkalmas bármilyen valós együtthatós másodfokú egyenlet vagy egyenlőtlenség megoldására. Az együtthatók értékének változtatásával egyidejűleg változik a megfelelő oldal grafikonja és így a megoldás is. Ezáltal azon kívül, hogy a tanulóknak integráltan is taníthatjuk a függvényeket, illetve egyenleteket, a dinamikus változtatás lehetősége más szempontokba hozza ezeket a fogalmakat.

Az a, b, c, d, e, f együttható értékeinek megfelelően a következő érdekes esetek fordulhatnak elő:

- ha $a = d = 0$ akkor $bx + c = ex + f$ elsőfokú egyenlethez jutunk (3.1. ábra),
- ha $a = d = e = f = 0$, akkor az $bx + c = 0$ alakú egyenletet kapunk (3.2. ábra),
- ha a vagy d nem nulla akkor másodfokú egyenletről van szó (3.3. ábra).
- ha valamelyik oldalon minden együttható nulla, például ha $d = e = f = 0$, akkor a hagyományos $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenlet megoldását látjuk (3.4. ábra)



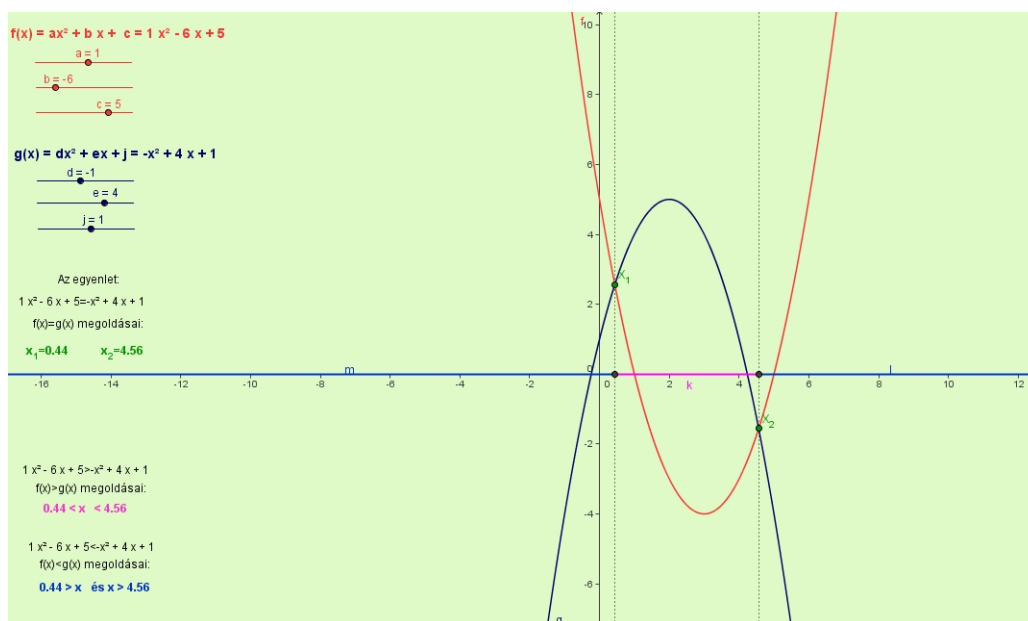
3.1. ábra.



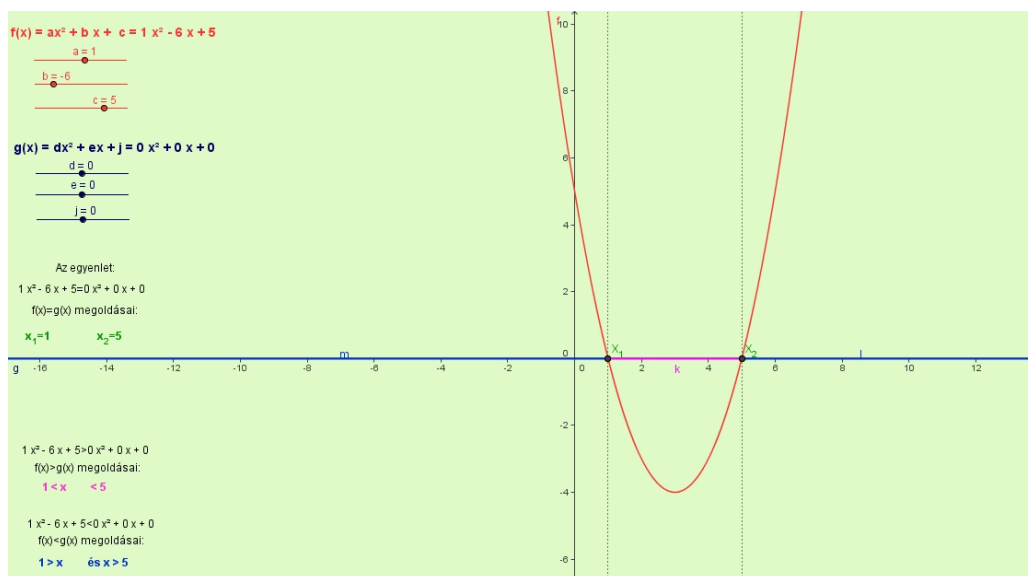
3.2. ábra.

Az első esetben a megoldás a két egyenes metszéspontja, vagyis az $x = \frac{f-c}{b-e}$. A második esetben a $bx + c$ függvény grafikonja és az x -tengely metszéspontja a megoldás. A harmadik eset megoldásai a két oldal megfelelő paraboláinak metszéspontjai. Az utolsó esetben a parabola és az x -tengely metszéspontjai az egyenlet megoldásai.

A *Geogebra* minden esetben kiszámolja a valós megoldásokat és ezek értéke



3.3. ábra.



3.4. ábra.

dinamikusan változnak az egyenlet és az egyenlethez tartozó grafikonok változtatásával egyidejűleg.

Az egyenlőtlenségek megoldásának ábrázolásához két esetet tettem be a munkalapba, a kisebb és a nagyobb relációjeles egyenlőtlenséget.

A következőkben leírom részletesen, hogyan készült ez a *Geogebra* alkalmazás.

A *Geogebra* indítása után szükség van a tengelyek megjelenítésére, ehhez a

Nézet menüben be kell kapcsolni a tengelyek menüpontot. Ezen kívül a *Nézet* menü *Algebra ablak* menüpontot is be kell kapcsolnunk, amit elérhetünk a *CTRL+SHIFT+A* billentyűkombinációval is. Ezután bevezetünk hat együtthatót, amit később használni fogunk, és ezeknek alapértéket adunk. Ehhez a parancssorba beírjuk a következő sorokat:

$$a = -1$$

$$b = 0$$

$$c = 6$$

$$d = 1$$

$$e = 3$$

$$j = -5.$$

Ezután beírjuk a két függvényt, amelyek az egyenlet két oldalát adják:

$$f(x) = a * x \wedge 2 + b * x + c$$

$$g(x) = e * x \wedge 2 + f * x + j.$$

Ekkor kirajzolódik a két függvény grafikonja és az eszköztárban található *rajzlap mozgatása* eszközzel (3.5. ábra), a munkalap kényelmes helyzetbe mozgatható, úgy hogy a grafikonok jól látható helyzetbe kerüljenek, illetve ugyanennél az eszköznél legördítve az eszközlíst, kiválaszthatjuk a nagyítás vagy kicsinyítés eszközöket a megfelelő látvány eléréséhez.



3.5. ábra.

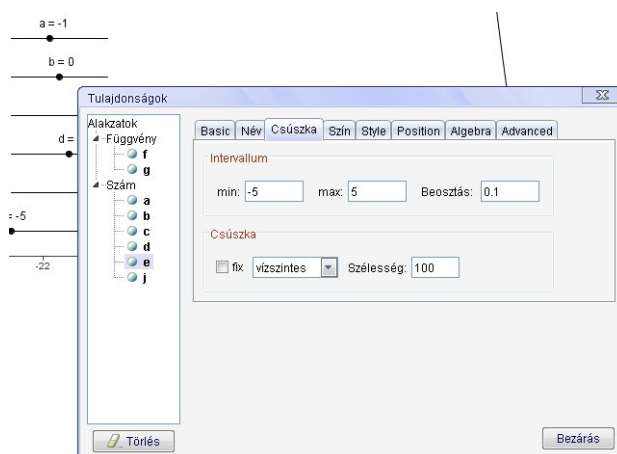
A következő lépés az, hogy az együtthatókat, amelyek a szabad alakzatok résznél vannak, egyesével megjelenítjük a munkalapon úgy, hogy külön-külön mindegyikre rámegyünk az egérrel, jobb gombot nyomunk és kiválasztjuk az alakzat megjelenítése opciót (3.6. ábra). Az együtthatókhoz tartozó küszöbértékeket és a beosztás nagyságát a munkaablakban a csuszkára kattintva jobb gombbal, *Tulajdonságok* menü, *Csuszka* fül kiválasztásával tehetjük meg. Itt a párbeszédablak jobb oldalán könnyen változtathatjuk az objektum tulajdonságait.

A továbbiakban az eszköztár *szöveg besúrása* (3.7. ábra) eszközével az " $f(x)=g(x)$ megoldásai:" szöveget illesztjük be a megfelelő helyre.

Ezután a következő két paranccsal, amit a parancssorba beírunk, megjelenítjük a két grafikon metszéspontját:

Metszéspont[f,g,1]

Metszéspont[f,g,2].



3.6. ábra.



3.7. ábra.

Ezt megtehetjük úgy is, hogy az eszköztárban kiválasztjuk az *új pont* (3.8. ábra) eszközt, legördítjük a listáját, innen kiválasztjuk a *két alakzat metszéspontja* (3.9. ábra) eszközt és rákattintunk a két pontra.



3.8. ábra.



3.9. ábra.

Átnevezzük az így kapott pontokat úgy, hogy a *tulajdonságok* menüpont kiválasztásával a *névhez* beírjuk X_1 és X_2 . Ugyanitt, a *tulajdonságok* párbeszédablak, *szöveg* menüpontjában a *tizedes hely* gördíthető listából lehet kiválasztani hány tizedesjegyes kerekítést használjon a program az értékek megjelenítéséhez.

Ezt követően néhány dinamikus szövegrész következik, amit a szöveg beillesztés eszközzel készíthetünk el a következő szövegekkel:

$$\begin{aligned} & \text{"x}_1\text{" + (x(X}_1\text{))} \\ & \text{"x}_2\text{" + (x(X}_2\text{))} \\ & \text{"f(x) = ax}^2 + \text{bx + c ="} + \text{f} \\ & \text{"g(x) = dx}^2 + \text{ex + j ="} + \text{g} \\ & \text{f + " = " + g} \end{aligned}$$

A továbbiakban merőlegeseket szerkesztünk az x -tengelyre a metszéspontokon keresztül. Ehhez az eszköztárból kiválasztjuk a *merőleges* (3.10. ábra) eszközt, rákattintunk a pontra és azután az x -tengelyre. Az így készített egyenes stílusát szaggatottvonalasra változtatjuk a *Tulajdonságok* párbeszédablak *Style* fülére kattintva és kiválasztva a megfelelő típust, vonalvastagságot.



3.10. ábra.

A fentieknek megfelelően a készített merőlegesek és az x -tengely metszéspontjait kijelöljük.

Most következik az egyenlőtlenségek ($<$, $>$) ábrázolása a Geogebra-val. Az egyenlőtlenségek megoldásait az x -tengelyen legutóbb kijelölt két pont által határolt szakasz és félegyenések adják. Ehhez készítünk egy szakaszt amely összeköti a legutóbb készített két pontot. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az eszköztárban kiválasztjuk az *egyenest két ponton keresztül* (3.11. ábra) eszközt és utána a listából a *szakasz* (3.12. ábra) eszközt, majd a két pontra kattintunk.



3.11. ábra.



3.12. ábra.

A készített szakasz két oldalából készítünk két félegyenest úgy, hogy mindkét oldalon találomra kijelölünk egy-egy pontot, aztán az eszköztárból az *egyenest két ponton keresztül* (3.11. ábra) eszközt legördítve kiválasztjuk a *félegyenest* (3.13. ábra) eszközt és rákattintunk a megfelelő pontokra.



3.13. ábra.

Az alkalmazás, a jelenlegi helyzetében, ha az egyenletnek nincs megoldása, vagy csak egy megoldása van, akkor a nem létező megoldáshoz azt írja ki *nem definiált*. Ennek elkerülésének céljából, a megoldások megjelenítését feltételhez kötjük úgy, hogy rákattintunk az x_2 -t tartalmazó szövegre az egér jobb gombjával, kiválasztjuk a *Tulajdonságok* menüpontot, a megjelenő párbeszédablakban rákattintunk az *Advanced* fülre és beírjuk azt, hogy $k \geq 0$. Ezt azért kell így megoldani, mert a k az a két megoldás közötti szakaszt jelenti az x -tengelyen és ha nincs csak egy megoldás, akkor nincs szakasz sem.

Ahhoz, hogy a másik szöveg az x_1 -et tartalmazó szöveg is eltűnjön ha nincs értéke, egy szakaszt kell szerkeszteni az x_1 -el jelölt pont és a rajta áthaladó x -tengelyre merőleges egyenes és az x -tengely metszéspontja között a *szakasz* (3.12. ábra) eszköz segítségével. Erre a szakaszra csak a feltétel miatt van szükségünk, ezért letiltjuk a megjelenését és a nevének a megjelenését. Az x_1 -et tartalmazó szöveg eltűnéséhez a *Tulajdonságok* menüpont *Advanced* fülénél be kell írni azt, hogy $n \geq 0$ feltéve, hogy az előbb létrehozott szakasz neve n lett létrehozása után.

Utolsó lépésként az egyenlőtlenséghez szükséges szövegeket illesztjük be, amelyeket megfelelően párosítva a grafikus megoldással (szakasz félegyenes), azonos színűre színezzük, a *Tulajdonságok* párbeszédablak *Szín* fülére kattintva. Ezek a szövegek a következőképpen néznek ki:

$$\begin{aligned} & f + ">" + g \\ & x(A) + "< x" \\ & "<" + (x(B)) \\ & f(x) > g(x) \text{ megoldásai:} \\ & f(x) < g(x) \text{ megoldásai:} \\ & x(A) + "> x" \\ & " \text{ és } x > " + (x(B)) \end{aligned}$$

Itt is a megoldások nem létezése esetére feltételeket kell beilleszteni a megjelenítéssel kapcsolatban a *Tulajdonságok* menüpont *Advanced* fülénél úgy, hogy az $x <$ szövegeknél az $n \geq 0$ feltételt, az $x >$ szövegeknél a $k \geq 0$ feltételt kell beállítani.

A *Geogebra Nézet* menüjének *Szerkesztő protokoll* menüpontja alatti alkalmazással megnézhetjük a munkánkat összesítve és levezethetjük lépésenként (3.14. ábra és 3.15. ábra). Ezt használhatjuk bemutató céllal is az alkalmazás készítésének lépésről-lépésre való bemutatásához.

Szerkesztő Protokoll				
Fájl Nézet Súgó				
No.	Név	Definíció	Parancs	Algebra
1	Szám a			$a = 1$
2	Szám b			$b = -6$
3	Szám c			$c = 5$
4	Szám d			$d = 0$
5	Szám e			$e = 0$
6	Szám j			$j = 0$
7	Függvény f	$f(x) = a x^2 + b x + c$	$f(x) = a x^2 + b x + c$	$f(x) = 1 x^2 - 6 x + 5$
8	Függvény g	$g(x) = d x^2 + e x + j$	$g(x) = d x^2 + e x + j$	$g(x) = 0 x^2 + 0 x + 0$
9	Szöveg T3			T3 = "f(x)=g(x) megoldásai"
10	Pont X ₁	metszéspontja f, g	Metszéspont[f, g, 1]	X ₁ = (1, 0)
11	Pont X ₂	metszéspontja f, g	Metszéspont[f, g, 2]	X ₂ = (5, 0)
12	Szöveg T4	"x ₁ " + (x(X ₁))	"x ₁ " + (x(X ₁))	T4 = "x ₁ =1"
13	Szöveg T5	"x ₂ " + (x(X ₂))	"x ₂ " + (x(X ₂))	T5 = "x ₂ =5"
14	Szöveg T2	"g(x) = dx ² + ex + j = " + g	"g(x) = dx ² + ex + j = " + g	T2 = "g(x) = dx ² + ex + j = 0 x ² + 0 ...
15	Szöveg T1	"f(x) = ax ² + b x + c = " + f	"f(x) = ax ² + b x + c = " + f	T1 = "f(x) = ax ² + b x + c = 1 x ² - 6 ...
16	Szöveg T6	f + " = " + g	f + " = " + g	T6 = "1 x ² - 6 x + 5 = 0 x ² + 0 x + 0"
17	Egyenes h	Egyenes keresztül X ₁ merőleges	Merőleges[X ₁ , xTengely]	h: x = 1
18	Egyenes i	Egyenes keresztül X ₂ merőleges	Merőleges[X ₂ , xTengely]	i: x = 5

3.14. ábra.

Szerkesztő Protokoll				
Fájl Nézet Súgó				
No.	Név	Definíció	Parancs	Algebra
19	Pont A	metszéspontja h, xTengely	Metszéspont[h, xTengely]	A = (1, 0)
20	Pont B	metszéspontja i, xTengely	Metszéspont[i, xTengely]	B = (5, 0)
21	Szakasz k	Szakasz[A, B]	Szakasz[A, B]	k = 4
22	Pont C	Ponton xTengely	Pont[xTengely]	C = (11.21, 0)
23	Félegyenes l	Átmenő félegyenes B, C	Félegyenes[B, C]	l: y = 0
24	Pont D	Ponton xTengely	Pont[xTengely]	D = (-14.17, 0)
25	Félegyenes m	Átmenő félegyenes A, D	Félegyenes[A, D]	m: y = 0
26	Szöveg T8	f + " = " + g	f + " = " + g	T8 = "1 x ² - 6 x + 5 > 0 x ² + 0 x + 0"
27	Szöveg T9	x(A) + " < x"	x(A) + " < x"	T9 = "1 < x"
28	Szöveg T7			T7 = "f(x)>g(x) megoldásai"
29	Szöveg T10			T10 = "f(x)<g(x) megoldásai"
30	Szöveg T11	f + " < " + g	f + " < " + g	T11 = "1 x ² - 6 x + 5 < 0 x ² + 0 x + 0"
31	Szöveg T12	x(A) + " > x"	x(A) + " > x"	T12 = "1 > x"
32	Szakasz n	Szakasz[A, X ₁]	Szakasz[A, X ₁]	n = 0
33	Szöveg T13	" < " + (x(B))	" < " + (x(B))	T13 = "< 5"
34	Szöveg T14	" és x > " + (x(B))	" és x > " + (x(B))	T14 = "és x > 5"
35	Szöveg T15			T15 = "Az egyenlet"

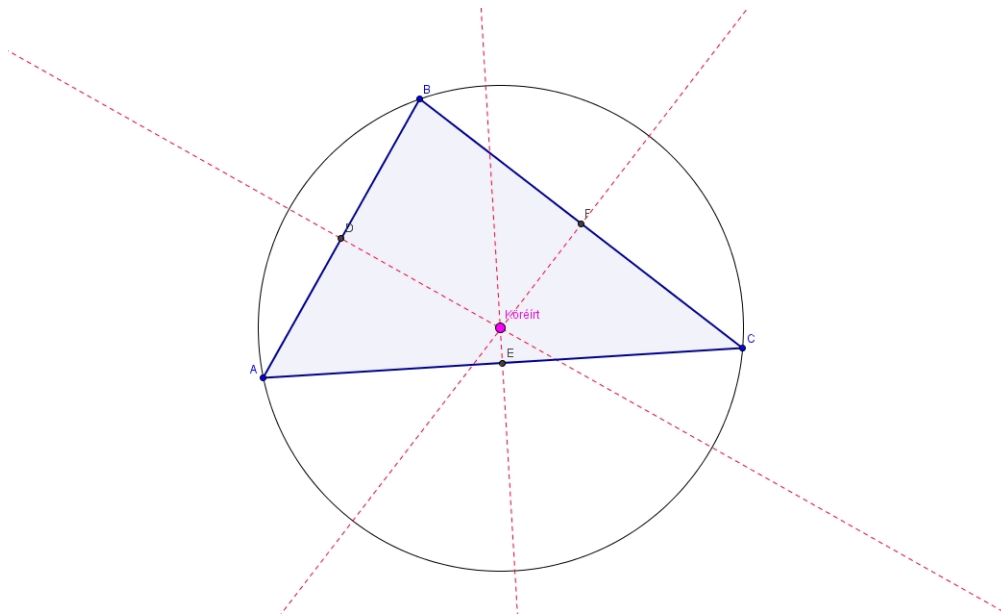
3.15. ábra.

4. EULER-FÉLE VONAL, FEUERBACH-FÉLE KÖR

4.1. A háromszögek nevezetes vonalai és pontjai

A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakaszát *középvonalnak* nevezzük. A középvonal párhuzamos az általa nem felezett oldallal és hossza fele a nem felezett oldal hosszának.

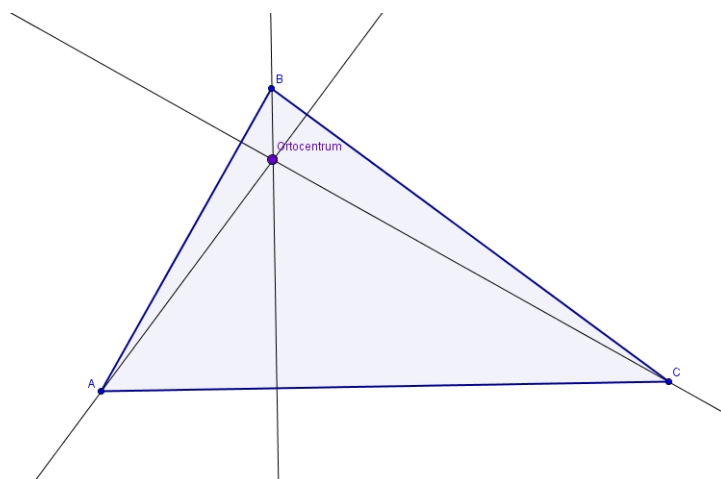
Egy és csak egy olyan kör van, amelyre egy háromszög mindhárom csúcsa illeszkedik, ezt a háromszög *körülírt körének* nevezzük. Ennek középpontja hegyesszögű háromszög esetén a háromszögön belülre, derékszögű háromszög esetén az átfogó felezési pontjába, tompaszögű háromszög esetén pedig a háromszögön kívülre esik. Az oldalak felezőmerőlegesei egymást a háromszög köré írt kör középpontjában metszik (4.1.ábra). A köré írt kör sugara ennek a pontnak és bármelyik csúcspontnak a távolsága.



4.1. ábra.

Egy háromszög csúcspontjából a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges

szakaszt a háromszög *magasságának* nevezzük. Egy háromszög három magasságának egyenese egy ponton halad át, ezt a pontot a háromszög *magasságpontjának* (*ortocentrumának*) hívjuk (4.2. ábra). Ha egy háromszög nem derékszögű, akkor csúcsai a magasságponttal együtt ún. ortocentrikus pontnégyest alkotnak. Ez azt jelenti, hogy közülük bármely három olyan háromszöget határoz meg, amelynek a negyedik a magasságpontja.



4.2. ábra.

Egy háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög *súlyvonalának* nevezzük. A háromszög súlyvonalai egy ponton haladnak át. Ez a pont a háromszög *súlypontja* (*baricentruma*). A súlypont mindegyik súlyvonalnak (a csúctól távolabbi) harmadolópontja. Egy és csak egy olyan kör létezik, amely egy háromszög mindhárom oldalát érinti, ezt a háromszög *beírt körének* hívjuk. A háromszög szögfelezői egymást a beírt kör középpontjában metszik.

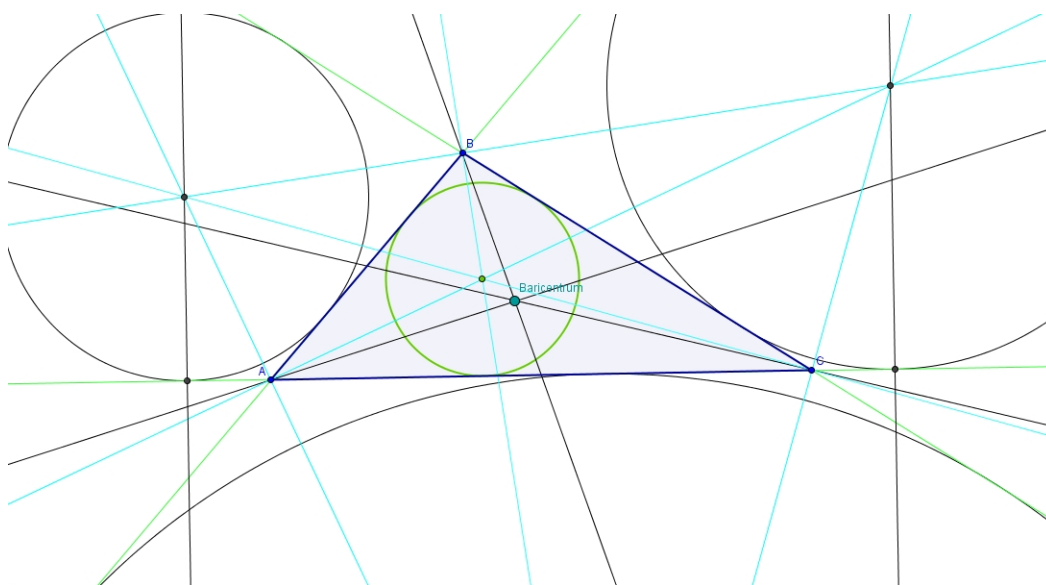
Azt a kört, amely a háromszög oldalát és másik két oldalának meghosszabbítását érinti, a háromszög *hozzáírt körének* nevezzük. A háromszög minden oldalához egyetlen hozzáírt kör tartozik, amelynek középpontja egy belső és két külső szög felezőjének közös pontja.

4.2. Az Euler-féle vonal és a Feuerbach-féle kör

Ha egy háromszög nem szabályos, akkor körülírt körének középpontja, súlypontja és magasságpontja egy egyenesre illeszkedik. A súlypont a körülírt kör középpontja és a súlypont távolságát harmadolja, és a körülírt kör középpontjához van közelebb.

Ennek a három pontnak az egyenesét *Euler-féle egyenesnek* nevezzük.

Szabályos háromszög esetén a fent említett három pont egybeesik és ebben



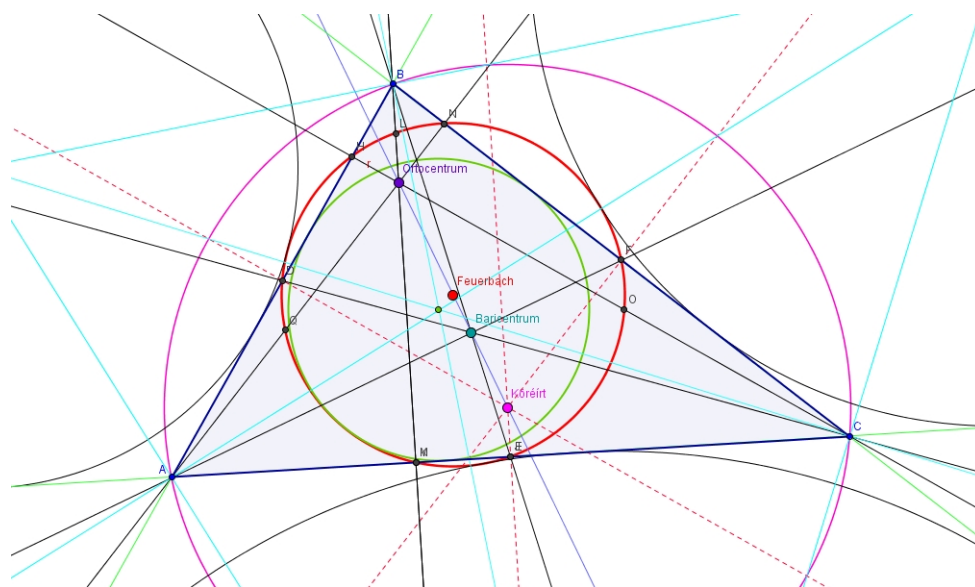
4.3. ábra.

az esetben a háromszögnek nincs ilyen egyenese. A magasságpont kétszer akkora távolságra van a háromszög csúcsától, mint a körülírt kör középpontja a csúccsal szemközti oldaltól. A magasságpontnak az oldalakra vonatkozó tükörképei a háromszög körülírt körén vannak.

Egy háromszög oldalfelező pontjai, a magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai rajta vannak egy olyan körön, amelynek középpontja a magasságpontot a körülírt kör középpontjával összekötő szakasz felezőpontja, sugara pedig fele a körülírt kör sugarának. Ezt a kört a háromszög *Feuerbach-féle körének* (vagy a *kilencpontos körnek*) nevezzük.

A Feuerbach-kör középpontja felezi a magasságpontot és a háromszög körülírt körének középpontját összekötő szakaszt, sugara pedig a körülírt kör sugarának a fele. A Feuerbach-kört a kilenc pont közül bármely három egyértelműen meghatározza. Így a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai is egy kört határoznak meg és ez a kör a háromszög köréírt körének $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítéséből származik.

Ezek közül a pontok közül Euler 1765-ben hatot ismert. Ismerte azt, hogy az oldalfelező pontok, a magasságok talppontjai rajta vannak ugyanazon a körön, de nem ismerte azt, hogy a magasságpontot és a csúcsokat összekötő szakaszok felezőpontjai is ezen a körön vannak. Az első teljes bizonyítását annak, hogy a kilenc pont egy körön helyezkedik el Poncelet francia matematikus adta 1821-ben. A kört azért nevezik mégis Feuerbach-körnek, mert ő 1822-ben egy újabb tulajdonságot vett észre, mégpedig azt, hogy a kilencpontos kör érinti a háromszög beírt körét és mindhárom hozzáírt körét.[1]



4.4. ábra.

4.3. Szerkesztés *Geogebra*val

Az előző fejezetben láthattuk hogyan lehet egyenletek megoldását szemléltetni. Ebben a fejezetben a programnak egy geometriai alkalmazását láthatjuk. Itt nem csak feladat megoldáshoz használhatjuk a *Geogebra*t, hanem tételek bizonyításának szemléltetésére is. Mivel ezekkel a dinamikus geometriai programokkal pontos szerkesztéseket lehet végezni a szerkesztés gyorsabbá válik, és biztosak lehetünk benne, hogy a pontatlanságból eredő hibákat elkerüljük. Előbb leírom hogyan lehet megszerkeszteni ezt a dinamikus ábrát (4.4. ábra), ezután egy elemi geometriai módszerrel hogyan lehet bizonyítani azt, hogy a kilenc előbb említett nevezetes pont rajta van egy körön.

A szerkesztések minél jobb átláthatósága érdekében érdemes különböző színeket használni. Viszont kerülni kell a felesleges színezéseket, például ezekben az ábrákban a hasonló elemeket ugyanazzal a színnel jelöltem, mondjuk az oldalfelező merőlegeseket szaggatott piros vonallal. Az ábrák elkészítésének leírásában nem térek ki a különböző elemek színezésére.

Az ábra elkészítéséhez a háromszög csúcspontjait kell először kijelölni az eszköztár *új pont* eszközével. Ezután a háromszöget az eszköztár *sokszög* (4.5. ábra) eszközével készíthetjük el úgy, hogy a pontokra kattintunk sorba és utoljára ismét



4.5. ábra.

az először kijelölt pontra kattintunk. Ekkor a *szakasz felező* (4.6. ábra) eszközt



4.6. ábra.

alkalmazzuk a háromszög oldalaira. Az eszköz kiválasztása után rákattintunk a szakaszra vagy két pontra. A három felezőmerőlegesnek kijelöljük a közös pontját a *két alakzat metszéspontja* (4.7. ábra) eszközzel és elnevezzük *köréírt*-nek, vagyis



4.7. ábra.

ez a háromszög köré írt kör középpontja.

Most a háromszög oldalainak a felezőpontjait szerkesztjük meg a *felező vagy középpont* (4.8. ábra) eszköz segítségével, a felezőmerőleges szerkesztéséhez hason-



4.8. ábra.

lóan. Az *egyenes két ponton keresztül* (4.9. ábra) eszköz segítségével összekötjük a



4.9. ábra.

háromszög csúcspontjait a szembenlévő felező pontokkal. Kijelöljük az *két alakzat metszéspontja* eszközzel ezeknek az egyeneseknek a metszéspontját, és elnevezzük *baricentrumnak*, vagyis ez a háromszög súlypontja.

Megszerkesztjük a háromszög magasságvonalait a *merőleges* (4.10. ábra) eszköz segítségével, úgy hogy kijelöljük sorba a háromszög csúcspontját és utána



4.10. ábra.

a vele szemben lévő oldalt. Ezeknek kijelöljük a közös pontját a *két alakzat metszéspontja* eszköz segítségével és elnevezzük azt *ortocentrumnak*, vagyis a magasságpont. Egyenest szerkesztünk az *egyenes két ponton keresztül* eszközzel az *ortocentrum* és a *köréírt* pontokon keresztül. A harmadik pont a *baricentrum* is rajta van ezen az egyenesen. Nagyon jól lehet szemléltetni tehát azt, hogy ez a három nevezetes pont mindig ezen az egyenesen van, akkor is ha elmozdítjuk a háromszög valamelyik csúcspontját. Ezt az egyenest Euler-féle vonalnak nevezzük. Elkészíthetjük a háromszög köré írt körét a *köré írt kör* (4.11. ábra) eszközzel.



4.11. ábra.

A továbbiakban megszerkesztjük a magasságpontot és a súlypontot összekötő szakasz felezőpontját, amit elnevezhetünk *Feuerbach*-nak. Ez lesz a Feuerbach-féle kör középpontja. Most megszerkesztjük a Feuerbach-féle kört a meglévő pontjainkkal, és kijelöljük a körön a kilenc nevezetes pontot. Itt is a pontok helyének változtatásával látszik, hogy ez a kilenc pont bármely háromszög esetén egy körön helyezkedik el.

A következőkben a háromszög Feuerbach által felfedezett azon tulajdonságát szeretnénk szemléltetni miszerint a Feuerbach-féle kör érinti a háromszög beírt körét és a hozzáírt köröket. Ehhez megszerkesztjük a beírt kört és a hozzáírt köröket.

Az *egyenes két ponton keresztül* eszközzel megrajzoljuk azokat az egyeneseket amelyekre a háromszög oldalai illeszkednek. Most a *szögfelező* (4.12. ábra) eszköz segítségével megszerkesztjük a háromszög szögfelező egyeneseit és a külső



4.12. ábra.

szögek szögfelezőit. A háromszögön kívüli metszéspontokból merőlegest húzunk az oldalak egyenesére azért hogy a hozzáírt köröket a *kör középponttal és kerületi ponttal* (4.13. ábra) eszköz segítségével megszerkeszthessük.



4.13. ábra.

A háromszög szögfelező egyeneseseinek metszéspontjából merőlegest húzunk a háromszög egyik oldalára, kijelöljük a metszéspontot és megszerkesztjük a háromszögbe írt kört.

A *Geogebra Nézet* menüjének *Szerkesztő protokoll* menüpontja alatti alkalmazással megnézhetjük a munkánkat összesítve és levezethetjük lépésenként (4.14. és 4.15. ábra).

Szerkesztő Protokoll				
Fájl	Nézet	Súgó		
No.	Név	Definíció	Parancs	Algebra
1	Pont A			$A = (-12.61, -11.63)$
2	Pont B			$B = (-1.85, 7.84)$
3	Pont C			$C = (23.81, -11.01)$
4	Háromszög P	Sokszög A, B, C	Sokszög[A, B, C]	$P = 351.08$
4	Szakasz c	Szakasz[A, B] Háromszög P	Szakasz[A, B, P]	$c = 22.34$
4	Szakasz a	Szakasz[B, C] Háromszög P	Szakasz[B, C, P]	$a = 31.68$
4	Szakasz b	Szakasz[C, A] Háromszög P	Szakasz[C, A, P]	$b = 36.42$
5	Egyenes d	Felező A, B	Szakaszfelező[A, B]	$d: -10.95x - 19.47y = 114.96$
6	Egyenes e	Felező A, C	Szakaszfelező[A, C]	$e: -36.41x - 0.62y = -196.89$
7	Egyenes f	Felező C, B	Szakaszfelező[C, B]	$f: 25.46x - 18.85y = 311.86$
8	Pont Kórért	metszéspontja d, e	Metszéspont[d, e]	$Kórért = (5.56, -9.03)$
9	Pont D	középpontja A, B	Középpont[A, B]	$D = (-7.13, -1.89)$
10	Pont E	középpontja C, A	Középpont[C, A]	$E = (5.6, -11.32)$
11	Pont F	középpontja B, C	Középpont[B, C]	$F = (11.08, -1.58)$
12	Egyenes h	Egyenes keresztül C, D	Egyenes[C, D]	$h: -9.11x - 30.94y = 123.56$
13	Egyenes i	Egyenes keresztül A, F	Egyenes[A, F]	$i: -10.05x + 23.68y = -148.78$
14	Egyenes j	Egyenes keresztül B, E	Egyenes[B, E]	$j: 19.16x + 7.25y = 25.23$
15	Pont Baricentrum	metszéspontja j, h	Metszéspont[j, h]	$Baricentrum = (3.18, -4.93)$
16	Egyenes k	Egyenes keresztül B merőleges	Merőleges[B, b]	$k: 36.41x - 0.62y = -55.25$
17	Egyenes l	Egyenes keresztül A merőleges	Merőleges[A, a]	$l: -25.46x + 18.85y = 101.72$
18	Egyenes m	Egyenes keresztül C merőleges	Merőleges[C, c]	$m: -10.95x - 19.47y = -46.47$
19	Pont Ortocentrum	metszéspontja k, m	Metszéspont[k, m]	$Ortocentrum = (-1.57, 3.27)$
20	Egyenes n	Egyenes keresztül Ortocentrum,	Egyenes[Ortocentrum, Kórért]	$n: 12.31x + 7.13y = 3.98$
21	Kör p	Kör átmenő A, C, B	Kör[A, C, B]	$p: (x - 5.56)^2 + (y + 9.03)^2 = 336.79$
22	Egyenes q	Felező Ortocentrum, Kórért	Szakaszfelező[Ortocentrum,	$q: -7.13x + 12.31y = -49.68$
23	Pont Feuerbach	metszéspontja n, q	Metszéspont[n, q]	$Feuerbach = (1.99, -2.88)$
24	Kör r	Kör középpont Feuerbach átmenő E	Kör[Feuerbach, E]	$r: (x - 1.99)^2 + (y + 2.88)^2 = 84.2$
25	Pont H	metszéspontja c, m	Metszéspont[c, m]	$H = (-3.59, 4.4)$
26	Pont I	metszéspontja a, l	Metszéspont[a, l]	$I = (0.58, 6.19)$
27	Pont J	metszéspontja r, b	Metszéspont[r, b]	$J = (5.6, -11.32)$
27	Pont K	metszéspontja r, b	Metszéspont[r, b]	$K = (-1.32, -11.44)$
28	Egyenes g	Egyenes keresztül B merőleges	Merőleges[B, b]	$g: 36.41x + 0.62y = -55.25$
29	Pont L	metszéspontja r, k	Metszéspont[r, k]	$L = (-1.61, 5.56)$

4.14. ábra.

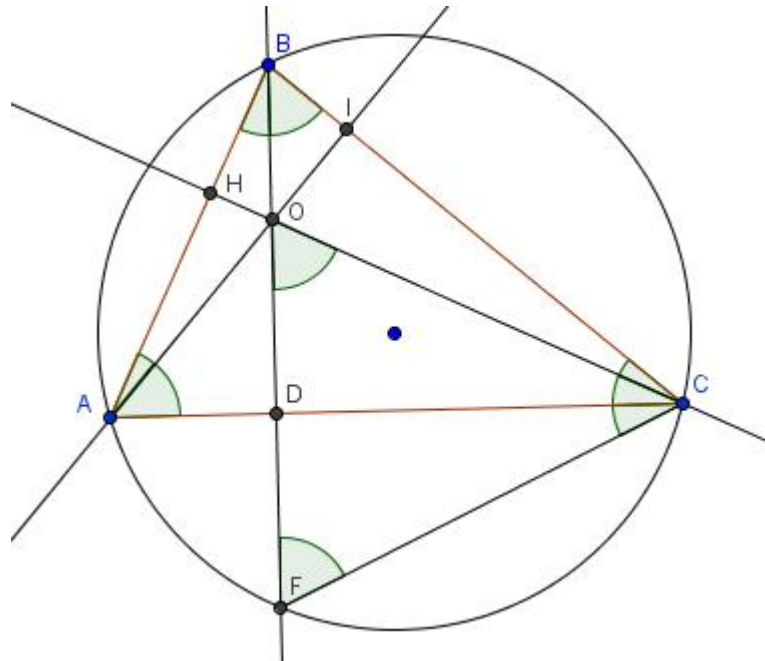
29	Pont M	metszéspontja r, k	Metszéspont[r, k]	$M = (-1.32, -11.44)$
30	Pont N	metszéspontja r, l	Metszéspont[r, l, l]	$N = (0.58, 6.19)$
31	Pont O	metszéspontja r, m	Metszéspont[r, m, l]	$O = (11.12, -3.87)$
32	Egyenes s	Egyenes keresztül B, A	Egyenes[B, A]	$s: 19.47x - 10.95y = -118.05$
33	Egyenes t	Egyenes keresztül B, C	Egyenes[B, C]	$t: 18.85x + 25.46y = 168.5$
34	Egyenes a1	Egyenes keresztül A, C	Egyenes[A, C]	$a1: -0.62x + 36.41y = -415.61$
35	Egyenes b1	Szögfelezője B, A, C	Szögfelező[B, A, C]	$b1: -0.51x + 0.86y = -3.53$
36	Pont R	Ponton a1	Pont[a1]	$R = (47.89, -10.6)$
37	Pont S	Ponton s	Pont[s]	$S = (9.57, 27.78)$
38	Egyenes c1	Szögfelezője S, B, C	Szögfelező[S, B, C]	$c1: -0.21x + 0.99y = 8.01$
39	Egyenes d1	Szögfelezője B, C, R	Szögfelező[B, C, R]	$d1: -0.95x + 0.31y = -26.03$
40	Pont U	Ponton a	Pont[a]	$U = (14.89, -4.41)$
41	Pont V	Ponton a1	Pont[a1]	$V = (-29.44, -11.92)$
42	Egyenes f1	Szögfelezője V, A, B	Szögfelező[V, A, B]	$f1: -0.86x - 0.51y = 16.78$
43	Pont W	metszéspontja c1, f1	Metszéspont[c1, f1]	$W = (-21.67, 3.57)$
44	Pont Z	Ponton t	Pont[t]	$Z = (-12.27, 15.7)$
45	Pont A1	metszéspontja d1, f1	Metszéspont[d1, f1]	$A1 = (10.95, -51.13)$
46	Pont B1	Ponton s	Pont[s]	$B1 = (-21.26, -27.01)$
47	Egyenes i1	Szögfelezője B, C, A	Szögfelező[B, C, A]	$i1: -0.31x - 0.95y = 3.22$
48	Egyenes j1	Szögfelezője A, B, C	Szögfelező[A, B, C]	$j1: 0.98x + 0.21y = 0.02$
49	Pont G	metszéspontja c1, b1	Metszéspont[c1, b1]	$G = (32.16, 15.07)$
50	Pont T	metszéspontja i1, b1	Metszéspont[i1, b1]	$T = (0.8, -3.63)$
51	Egyenes e1	Egyenes keresztül G merőleges	Merőleges[G, a1]	$e1: -11.7x - 0.2y = -379.39$
52	Pont E1	metszéspontja a1, e1	Metszéspont[a1, e1]	$E1 = (32.6, -10.86)$
53	Kör g1	Kör középpont G átmenő E1	Kör[G, E1]	$g1: (x - 32.16)^2 + (y - 15.07)^2 = 67...$
54	Egyenes h1	Egyenes keresztül W merőleges	Merőleges[W, a1]	$h1: -34.48x - 0.59y = 744.96$
55	Pont F1	metszéspontja a1, h1	Metszéspont[a1, h1]	$F1 = (-21.4, -11.78)$
56	Kör k1	Kör középpont W átmenő F1	Kör[W, F1]	$k1: (x + 21.67)^2 + (y - 3.57)^2 = 235...$
57	Egyenes l1	Egyenes keresztül A1 merőleges	Merőleges[A1, s]	$l1: 8.21x + 14.6y = -656.56$
58	Pont G1	metszéspontja s, l1	Metszéspont[s, l1]	$G1 = (-23.82, -31.57)$
59	Kör p1	Kör középpont A1 átmenő G1	Kör[A1, G1]	$p1: (x - 10.95)^2 + (y + 51.13)^2 = 15...$
60	Pont Q	metszéspontja r, l	Metszéspont[r, l, 2]	$Q = (-7.09, -4.18)$
61	Egyenes m1	Egyenes keresztül T merőleges	Merőleges[T, b]	$m1: 27.3x + 0.47y = 20.17$
62	Pont C1	metszéspontja b, m1	Metszéspont[b, m1]	$C1 = (0.93, -11.4)$
63	Kör q1	Kör középpont T átmenő C1	Kör[T, C1]	$q1: (x - 0.93)^2 + (y + 3.63)^2 = 60.28$

4.15. ábra.

4.4. Feuerbach kilenc-pont tételének egyik bizonyítása

A bizonyítást három *Geogebra* ábra, alkalmazás segítségével szemléltethetjük. Az első a magasságpont oldalakra vett tükörképeivel foglalkozik, a második a magasságpont az oldalak felezőpontjaira vett tükörképeit vizsgálja és a harmadik a kilenc pont helyét vizsgálja a körülírt körön lévő pontokkal kapcsolatban. A három ábra megfelel a bizonyítás fő lépéseinek.

Először bizonyítsuk azt, hogy a magasságpont a háromszög oldalára vett tükörképe rajta van a háromszög köréírt körön ($OD = DF$).

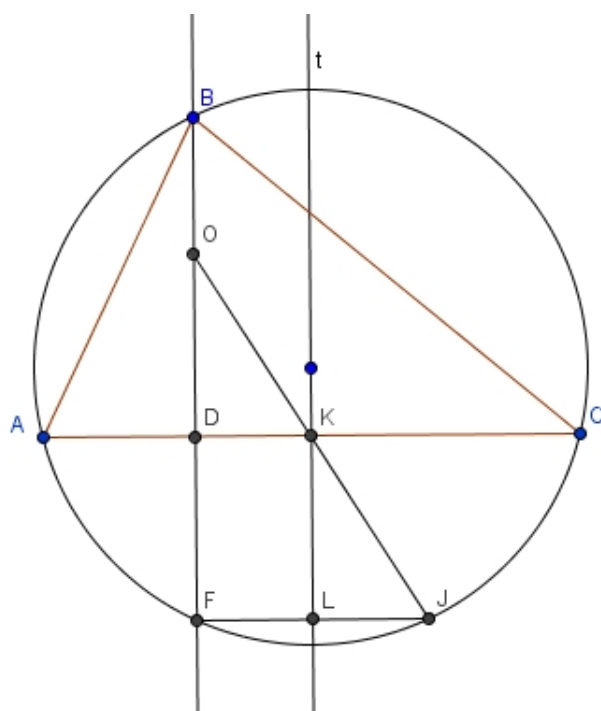


4.16. ábra.

Összehasonlítva a $BAD\triangle$ és a $ACH\triangle$ háromszögeket azt kapjuk, hogy a két egyenlő nagyságú szög miatt az $ABD\angle = HCA\angle$. Mivel BC közös húrhoz a $BAC\angle$ és a $BFC\angle$ középponti szögnek, ezért ez a két szög egyenlő nagyságú. Emiatt a $BAD\triangle$ és a $FCD\triangle$ háromszögeknek van két egyenlő nagyságú szöge, és így a következő is igaz $BAC\angle = DFC\angle$. Ugyanígy a $BAD\triangle$ és a $ODC\triangle$ háromszögekkel kapcsolatban igaz az, hogy $BAC\angle = COD\angle$. A fentiek miatt az $ODC\triangle$ és a $CDF\triangle$ háromszögek kongruensek és így sikerült bizonyítani azt, amit akartunk $OD = DF$.

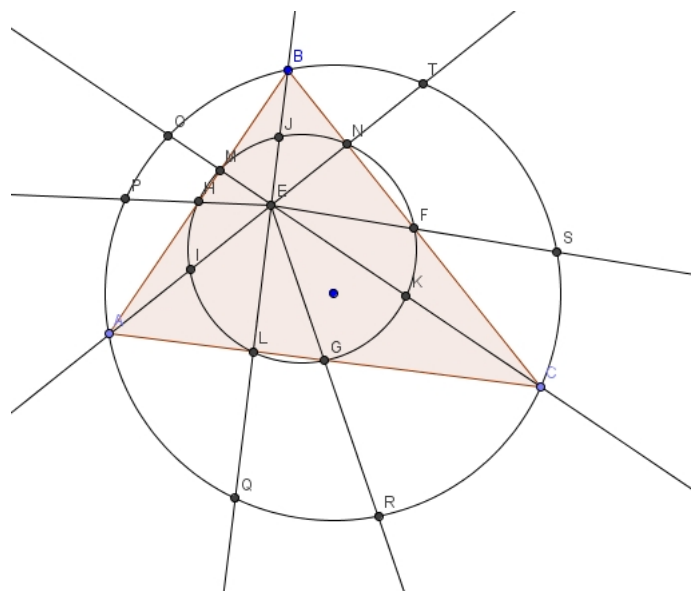
Most bizonyítsuk be azt, hogy a magasságpont oldalfelezőpontokra vett tükörképe is rajta van a körülírt körön.

Az $ODK\triangle$ háromszögnek kétszeres O középpontú nagyított képe az $OFJ\triangle$ háromszög, így FJ kétszerese a DK -nak. Mivel $DKLF$ négyszög téglalap $DK = FL$, tehát $DK = FL = LJ$.



4.17. ábra.

Ha a kört tükrözzük a t tengelyre, akkor önmagát kapjuk, és így az F pont képe a J pont. Mivel a fentiekben beláttuk, hogy az F pont rajta van a körön, ezért a J pont is rajta van.



4.18. ábra.

A harmadik ábrát tekintve az előbbi bizonyításokkal beláttuk, hogy a T, S, R, Q, P, O pontok rajta vannak a háromszög körülírt körén. Ezenken a pontokon kívül a háromszög csúcspontjai is rajta vannak ezen a körön, tehát kilenc pont van rajta.

Mivel a csúcspontokon kívül, ezeket a pontokat úgy kaptuk, hogy egy a háromszög oldalán lévő pontot kétszeresen nagyítottuk a magasságpontból, a köréírt kör egy $\frac{1}{2}$ arányú nagyított képe ennek a háromszögnek a Feuerbach-féle köre lesz, amelyen rajta lesznek az előbb említett hat pont és ezen kívül a magasságpontot és a csúcsokat összekötő szakaszok felező pontjai.

5. AZ INTEGRÁL SZEMLÉLTETÉSE

5.1. Integrálok

Az emeltszintű érettségi anyagának egy fontos fogalmának az előkészítésével, az *integrál (határozatlan, határozott)* fogalmával folytatjuk. Ebben a fejezetben használni fogjuk a *Geogebra* integrállal kapcsolatos eszközeit, lehetőségeit.

Ahhoz, hogy az integrálról beszéljünk definiáljuk a függvényt, a differenciálhányados függvényt, és a differenciálhatóságot.

Legyenek A és B adott halmazok. Az $f \subset A \times B$ relációt *függvénynek* nevezzük, ha $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$ esetén $y = z$ teljesül.

Legyen $\langle a, b \rangle$ egy nyílt vagy zárt intervallum, $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. A

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$(x \neq x_0, x, x_0 \in \langle a, b \rangle)$, által definiált függvényt az f függvény x, x_0 -hoz tartozó *differenciálhányados függvényének* nevezzük.

Az $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* az $x_0 \in \langle a, b \rangle$ pontban ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

(véges) határérték. Ezt a határértéket az f függvény x_0 -beli *differenciálhányadosának* nevezzük.

Ha f az $\langle a, b \rangle$ minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy differenciálható $\langle a, b \rangle$ -n. A fent definiált $f' : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az f függvény *differenciálhányados (derivált) függvényének* nevezzük.

Az $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényt az $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *primitív függvényének* vagy *határozatlan integráljának* nevezzük ha, $F' = f$. Az F függvényt a következőképpen jelöljük: $\int f$. Az F függvény x helyen felvett értékét $F(x) = \int f(x)dx$ -el jelöljük.

Az $f(x)$ függvénynek végtelen sok $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ alakú primitív függvénye van, melyek csupán egy konstansban különböznek egymástól, mivel $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$.

5.2. A Riemann-integrál

A függvénygörbe alatti terület első precíz definícióját Riemann vezette be. Róla nevezték ezt el Riemann-integrálnek. Általában erre használjuk a határozott integrál megnevezést.

Legyen $[a, b]$ zárt intervallum. A továbbiakban $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ típusú korlátozott függvényekkel dolgozunk. Az intervallum egy *felosztásának* nevezzük és δ -val jelöljük az $[a, b]$ intervallum pontjainak egy véges halmazát, úgy hogy $a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$. Legyen az összes ilyen felosztás halmaza Δ . Az így keletkező intervallumokat nevezzük részintervallumoknak.

A *felosztás finomságának* nevezzük a felosztás leghosszabb részintervallumának a hosszát, jelöljük $\nu(\delta)$ -val.

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervalluma, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény, δ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása és minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumból válasszunk ki egy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ elemet (ezek halmaza legyen ξ). A

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

összeget az f függvény δ felosztás és a ξ elemhalmazra vonatkozó *Riemann összegének* nevezzük, vagy az integrál *n-tagú közelítő összegének*.

A felosztásokból készíthetünk a (számsorozatok mintájára) végtelen sorozatokat. Ezeket nevezzük felosztássorozatoknak. Ha a felosztások finomságainak $\nu_1, \nu_2, \dots$ sorozata nullához tart, akkor a sorozatot normális felosztássorozatnak vagy minden határon túl finomodó felosztássorozatnak nevezzük.

Amennyiben minden normális felosztássorozat esetén, a közelítő összeg ugyanahhoz az A számhoz tart, akkor azt mondjuk, hogy a függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon. Az A értéket nevezzük a függvény Riemann-integráljának (határozott integráljának, 5.1. ábra). Egy f függvény $[a, b]$ intervallumon vett Riemann integrálját a következő módon jelöljük: $\int_a^b f(x) dx$ vagy röviden $\int_a^b f$.

5.3. Az alsó és a felső integrálközelítő összeg

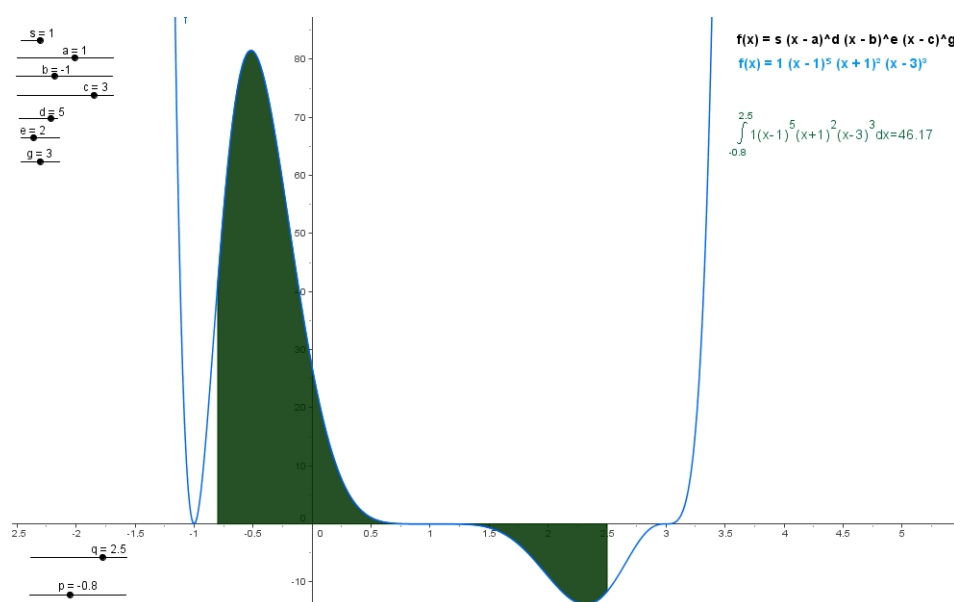
Ha a σ_n összegben a $f(\xi_i)$ helyett mindenhol a függvénynek az adott részintervallumbeli felső határát írjuk, akkor a felső integrálközelítő összeghez jutunk:

$$S_n = \sum M_i (x_i - x_{i-1})$$

ahol M_i a függvény felső határa az $[x_i - x_{i-1}]$ intervallumon. Hasonló módon definiáljuk az alsó integrálközelítő összeget is:

$$s_n = \sum m_i (x_i - x_{i-1})$$

ahol m_i az függvény alsó határa az $[x_i - x_{i-1}]$ intervallumon. Amennyiben létezik a $[a, b]$ intervallumon az f függvény Riemann integrálja, akkor az $s_n \leq \int_a^b f \leq S_n$.



5.1. ábra.

5.4. Az integrál szemléltetése *Geogebra*val

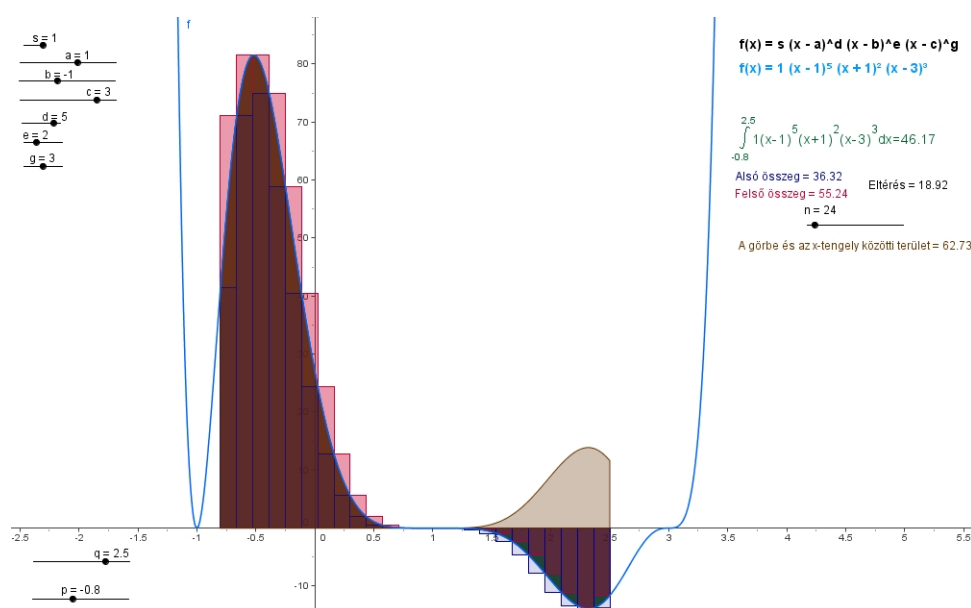
Ebben a témakörben is használhatjuk a *Geogebra*t. Az elkészített alkalmazás lehetővé teszi az integrál szemléltetését. A számítások mennyisége miatt és az ábrázolás bonyolultsága miatt, nehéz és sok munkába kerül krétával ezt megoldani, így ezzel az alkalmazással a diákok könnyebben megérthetik a határozott integrál lényegét, láthatják azt területként ábrázolva, és láthatják az alsó és felső integrálközelítő összegeket (5.2. ábra). Az elkészített alkalmazással a következő polinom alakú $f(x) = s(x-a)^d(x-b)^e(x-c)^g$ függvények integrálját szemléltethetjük. Az a, b, c, d, e, g, s változók segítségével lehet a megfelelő polinomot beállítani, ezzel párhuzamosan változik az ábrázolt grafikon alakja is.

A p és q változók a Riemann integrál alsó-, illetve felsőhatára. Ezek változtatásával egyidejűleg változik a grafikonon a színezett rész, az integrál értéke, az alsó integrálközelítő összeg, a felső integrálközelítő összeg, és különbségeik.

Még egy változó van, az n , amely az integrálközelítő összegek, vagyis az intervallum részintervallumainak a számát jelenti. Az n változó növekedésével a két integrálközelítő összeg közeledik egymáshoz, így a különbségük egyre kisebb, és egy megfelelően nagy n érték esetén, nagyon jól közelítik az integrál értékét.

A továbbiakban leírom hogyan lehet elkészíteni egy ilyen alkalmazást.

A *Geogebra*t beindítva a *Nézet* menüben bekapcsoljuk a *Tengelyek* menüpontot a tengelyek megjelenítéséhez, illetve a könnyebb munka érdekében bekapcsoljuk ugyancsak a *Nézet* menüben az *Algebra Ablak* menüpontot ($CTRL+SHIFT+A$). Ezután a parancssorba beírjuk, hogy $a = 1$ és az algebra ablakban rákattintunk az egér jobb gombjával kiválasztjuk a *tulajdonságok* menüpontot. Megjelenik egy



5.2. ábra.

párbeszédablak, a változó párbeszédablaka, ebben kiválasztjuk a *Basic* fület, itt be pipáljuk az egérrel az *alakzat megjelenítése* négyzetet, és utána a *csúszka* fület választva átállítjuk a beosztást 1-re. Egy olyan eszközt kapunk a rajzlapon, amelyik segítségével változtathatjuk, egér segítségével, az a változó értékét -5-től 5-ig egy nagyságú léptekkel.

Ugyanezt megcseréljük a b, c, d, e, g, s változókkal is csak a d, e, g, s változók esetén a Tulajdonságok párbeszédablakban a Csúszka fül alatt a min értéket 0-ra a max értéket 6-ra állítjuk.

Ezután beírjuk a parancssorba a következő sort: $f(x) = s(x-a)^d(x-b)^e(x-c)^g$. Ekkor a rajzlapon megjelenik a függvény grafikonja és az algebra ablakban a függvény valódi változók behelyettesítésével kapott alakját.

Ahhoz, hogy a rajzlapon is nyomon követhessük a függvény alakját beszúrjuk az eszköztár *szöveg beszúrása* eszköz (5.3. ábra) segítségével a következő két szöveget: $f(x) = s(x-a)^d(x-b)^e(x-c)^g$ és " $f(x) =$ " + f . Most beírjuk a p



5.3. ábra.

és q változókat a parancssorba egy alapértéket megadva. Ezeknél a tulajdonságok párbeszédalakban elég ha az alakzat megjelenítését kipipáljuk, mert lehetnek negatívak, és tizedestörtek is.

Az *Integrál*[$f(x)$], p , q] szöveg parancssorba való beírásával a grafikonon azonnal beszíneződik a függvény és az x -tengely közötti rész a p és q közötti részben, ami

megfelel a függvény ezen pontok közötti Riemann integráljának. Itt is, mint máshol, lehetőségünk van a megjelenítés tulajdonságainak a változtatására, mint például szín, kitöltés és vonalvastagság. Ezt írott alakban is megjeleníthetjük a `"∫" + f + "dx = " + i` szöveg beillesztésével a *szöveg beszúrása* (5.2. ábra) segítségével. Hasonló módon az integrál jel tetejére beillesztjük szöveggént a p illetve q értékeit a `p + "` és `q + "` szöveget.

A következő az hogy beírjuk az n változót egy értékkel és a tulajdonságaiban a *csúszka* fülnél a *min* értéket átállítjuk 0-ra, a *max* értékét 300-ra, illetve a *basic* fülnél bepipáljuk az *alakzat megjelenítése* négyzetet. A *Felsőösszeg*[f , p , q , n] szöveg begépelésével a grafikonon megjelennek a felsőösszeghez szükséges téglalapok az eddigiektől eltérő színnel. Ugyaezt megcsináljuk a *Alsóösszeg*[f , p , q , n] szöveggel. Ezeket a változókat elnevezzük *also*-nak illetve *felso*-nek.

Az eszköztár *szöveg beszúrása* eszközének segítségével beírva a következő szövegeket: `"Alsó összeg = " + also` és `"Felső összeg = " + felso`, azt eredményezi, hogy a program megjeleníti az idézőjelben lévő szöveget és kiszámolja mellé a megfelelő integrálközelítő összeget. Beírjuk a parancssorba, hogy `kul=also+felso` és így kapunk még egy változót, amely az alsó és felső integrálközelítő összegek különbségét fogja mutatni. Ehhez a *szöveg beszúrása* eszközzel beírjuk, hogy: `"Eltérés = " + kul`.

Az utolsó érték amit megjelenítünk az a függvény és az x -tengely közötti teljes terület, amit úgy tudunk megoldani, hogy az f abszolút értékének számíttatjuk ki és jelenítetjük meg az értékét. Ezt megtehetjük a következő szöveg begépelésével *Integrál*[$abs(f(x))$, p , q]. Az utolsó létrehozott változót nevezzük át *ter*-re. Utolsó lépésként szurjuk be a következő szöveget: `"A görbe és az x-tengely közötti terület = " + ter`.

Mint az előző fejezetekben tárgyalt alkalmazások esetén itt is hasznos lehet áttekinteni a szerkesztés lépéseit. A *Nézet* menü *Szerkesztő protokoll* menü pontja alatt érhetjük el ez a szolgáltatást (5.4. ábra).

Szerkesztő Protokoll				
Fájl	Nézet	Súgó		
No.	Név	Definíció	Parancs	Algebra
1	Szám a			a = 1
2	Szám b			b = -1
3	Szám c			c = 3
4	Szám d			d = 5
5	Szám e			e = 2
6	Szám g			g = 3
7	Szám s			s = 1
8	Függvény f	$f(x) = s(x-a)^d(x-b)^e(x-c)^g$	$f(x) = s(x-a)^d(x-b)^e(x-c)^g$	$f(x) = 1(x-1)^5(x+1)^2(x-3)^3$
9	Szöveg T4	"f(x) = " + f	"f(x) = " + f	T4 = "f(x) = 1(x-1)^5(x+1)^2(x-3)^3"
10	Szöveg T5			T5 = "f(x) = s(x-a)^d(x-b)^e(x-c)^g"
11	Szám p			p = -0.8
12	Szám q			q = 2.5
13	Szám i	Integrál f(x) p míg q	Integrál f(x), p, q]	i = 46.17
14	Szöveg T1	"int " + f + " dx = " + i	"int " + f + " dx = " + i	T1 = "int 1(x-1)^5(x+1)^2(x-3)^3 dx = 46.17"
15	Szöveg T2	p + ""	p + ""	T2 = "-0.8"
16	Szöveg T3	q + ""	q + ""	T3 = "2.5"
17	Szám n			n = 300
18	Szám felso	Felsőösszeg[f, p, q, n]	Felsőösszeg[f, p, q, n]	felso = 46.93
19	Szám also	Alsóösszeg[f, p, q, n]	Alsóösszeg[f, p, q, n]	also = 45.41
20	Szöveg T6	"Alsó összeg = " + also	"Alsó összeg = " + also	T6 = "Alsó összeg = 45.41"
21	Szöveg T7	"Felső összeg = " + felso	"Felső összeg = " + felso	T7 = "Felső összeg = 46.93"
22	Szám kul	felso - also	felso - also	kul = 1.52
23	Szöveg T8	"Eltérés = " + kul	"Eltérés = " + kul	T8 = "Eltérés = 1.52"
24	Szám ter	Integrál abs(f(x)) p míg q	Integrál abs(f(x)), p, q]	ter = 62.73
25	Szöveg T9	"A görbe és az x-tengely közötti terület = " + ter	"A görbe és az x-tengely közötti terület = " + ter	T9 = "A görbe és az x-tengely közötti terület = 62.73"

5.4. ábra.

6. FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

6.1. A függvényvizsgálat elemei

Ebben a fejezetben a függvényvizsgálathoz szükséges elméleti elemek felsorolása után a függvényvizsgálat *Geogebra*-val szemléltethető részeit szeretném bemutatni egy változtatható együtthatókkal rendelkező negyedfokú polinóm alakú függvény segítségével.

Az élet különböző területein előforduló folyamatokkal kapcsolatos összefüggések vizsgálatában rendkívüli fontosságúak a függvények segítségével végzett vizsgálatok. Ezen összefüggések tanulmányozásához a különböző változók közötti kapcsolatot keressük, amelyet egy függvény segítségével ábrázoljuk pontosan vagy közelítő módon. Ezek után, a kapott függvény vagy függvények tulajdonságainak a vizsgálatával folytatva megállapításokat hozhatunk. Ezt *függvényvizsgálatnak* nevezzük.

A középiskolás matematika tananyagban a függvények alakjának és értékeinek megismerésén, és a függvény transzformáció alkalmazásán túl, további általános ismeretek elsajátítása is szükséges. Ezeket egy függvényvizsgálat végigkövetésével jobban meg lehet értetni. Ha ehhez társul, ennek a dinamikus programnak, a lehetőségeinek a használata, akkor így, a látványosabb szemléltetéssel, könnyebben, jobban és érdekesebben meg lehet ezeket az ismereteket tanulni.

Egy alapos függvényvizsgálatnak tartalmaznia kell a következő elemeket:

- * az értelmezési tartomány meghatározása,
- * a zérushelyek meghatározása az $x = 0$ és az $y = f(x) = 0$ esetekben,
- * a függvény folytonosságának vizsgálata és a szakadási helyeknek a megállapítása,
- * paritás vizsgálat; a függvény lehet páros, páratlan vagy egyik sem,
- * a függvény periodicitása,
- * a monotonitás vizsgálata (első derivált),
- * a szélsőértékek megállapítása (első derivált),
- * a függvény konvexitásának meghatározása (második derivált),

- * az inflexiós pontok megkeresése (második derivált),
- * a határértékek vizsgálata,
- * függvény grafikonjának rajzolása és az értékkészlet megadása,
- * egyéb jellemzők megállapítása.

Amennyiben nincs megadva, a függvény értelmezési tartományát kell első lépésként megállapítani. Az értelmezési tartományt D_f -el szoktuk jelölni és az alaphalmaz azon elemeit tartalmazza amelyekre értelmezhető a függvény.

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x \in D_f$ *zérushelye*, ha ebben a pontban $f(x) = 0$. Ezenkívül meg lehet állapítani az $f(0)$ értékét is, ez az érték a függvény és az y tengely metszéspontját adja.

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *folytonos* az $a \in D_f$ pontban, ha $\forall \epsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0 : \forall x \in k_\delta(a) \cap D_f : |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Itt $k_\delta(a)$ alatt az a pont egy δ sugarú nyílt (gömb)környezetét értjük, vagyis $k_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}$.

Amikor az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény valamely $a \in D_f$ pontjában nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az a pont az f *szakadási helye*.

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor *páros*, ha $x \in D_f$ esetén $f(x) = f(-x)$. A függvény akkor *páratlan* ha $f(-x) = -f(x)$. Az ábrázoláskorán a függvény paritása abban nyilvánul meg, hogy a páros függvény szimmetrikus az y tengelyre, a páratlan pedig az origóra.

A periodicitással kapcsolatban az lehet mondani, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *periódikus*, ha $\exists p \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $p > 0$, és $\forall x \in D_f$ esetén $x + p \in D_f$ és $f(x) = f(x + p)$. Ebben az esetben a p az f függvény *periódusa*.

A monotonitása az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $(a, b) \in D_f$ intervallumon a következő lehet, $x_1, x_2 \in (a, b)$ esetén:

- ✦ *monoton növekvő*, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- ✦ *szigorúan monoton növekvő*, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$,
- ✦ *monoton csökkenő*, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- ✦ *szigorúan monoton csökkenő*, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

Ezek megállapításához sok segítséget nyújthat a függvény első deriváltjának a kiszámítása. A derivált előjele különböző intervallumokon adja az eredeti függvény monotonitását, abban az intervallumban, a következők szerint:

- ✦ *monoton növekvő*, ha $f' \geq 0$ az adott intervallumon,
- ✦ *szigorúan monoton növekvő*, ha $f' > 0$ az adott intervallumon,
- ✦ *monoton csökkenő*, ha $f' \leq 0$ az adott intervallumon,

✦ *szigorúan monoton csökkenő*, ha $f' < 0$ az adott intervallumon.

Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek egy intervallumon az $x_0 \in D_f$ pontban *lokális minimuma* van, ha az intervallum bármely x_0 -tól különböző pontjában $f(x) > f(x_0)$ teljesül. Hasonló módon, az f függvénynek *lokális maximuma* van, ha az intervallum bármely x_0 -tól különböző pontban teljesül az, hogy $f(x) < f(x_0)$.

Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény deriválható egy pont környezetében, a deriváltja abban a pontban nulla és előjelet vált, akkor a függvénynek ott lokális szélsőértéke van. Az ilyen pontokban a deriváltfüggvény előjelet vált, ahol a derivált függvény negatív értékeket vesz fel ott a függvény csökkenő, ahol pozitív ott pedig növekvő. Aszerint, hogy a deriváltfüggvény egy pontban, negatívból pozitívba vagy pozitívból negatívba megy át, az eredeti függvénynek lokális minimuma vagy maximuma van, abban a pontban.

A függvénynek a görbületét annak második deriváltfüggvényének vizsgálatával állapíthatjuk meg. Azt a pontot ahol a függvény görbülete megváltozik *inflexiós pontnak* (görbületváltási hely) nevezzük. Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható egy pont környezetében, a második deriváltja nulla és az előjelet vált (vagyis a függvény harmadik deriváltja ha létezik nem nulla) abban a pontban, akkor az a függvénynek inflexiós pontja. Általánosan ennek megállapításához mindig szükség van a legutolsó még nem nulla deriváltfüggvény megvizsgálására. Ekkor azon az intervallumon ahol $f'' \geq 0$, az eredeti függvény *konvex* és azon amelyen $f'' \leq 0$, *konkáv*.

Egy L halmaznak az $t \in D_f$ *torlódási pontja*, ha bármely környezete végtelen sok L -beli pontot tartalmaz, azaz $\forall \epsilon > 0 : k_\epsilon(a) \cap L$ végtelen. Legyen $t \in D_f$ az f függvény torlódási pontja. Az t pontban a függvénynek T a *határértéke*, ha $\exists T \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (k_\delta(t) \setminus \{t\}) \cap D_f : f(x) \in k_\epsilon(T)$.

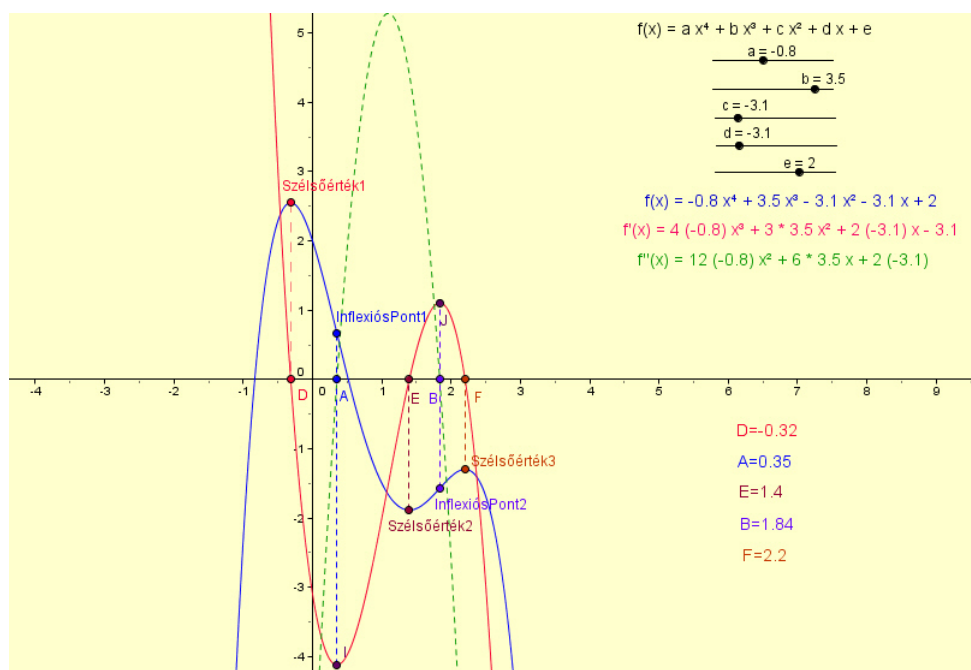
A függvényvizsgálat eddigi lépéseinek az eredményeit megjeleníthetjük táblázatban is, hogy összességében vizsgálhassuk a függvényt és így következtethessünk ennek grafikonjának alakjára. Ezek segítségével elég jó pontossággal megrajzolhatjuk a függvény grafikonját.

Előfordulhat, hogy a függvény ezen tulajdonságain túl, más tulajdonságai is érdekel bennünket, mint például a függvény asszimptotái, ennek a szakadási pontokbeli jobb- és baloldali differenciál hányadosai, vagy valamely pontban a jobb- és baloldali folytonosság, de az előbb bemutatott tulajdonságok elegendőek ahhoz, hogy teljes függvényvizsgálatról beszéljünk.

6.2. A Geogebra alkalmazása függvényvizsgálathoz

Természetesen a könnyebb és látványosabb szemléltetés céljából ehhez a témához is készíthető *Geogebra* alkalmazás. A továbbiakban láthatjuk, hogy néhány perc alatt és viszonylag egyszerűen elkészíthető egy nagyon hasznos alkalmazás. A

következő polinom alakú $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ függvények függvényvizsgálatához szükséges alkalmazás készítését részletezem.



6.1. ábra.

Az a, b, c, d, e, g, s változók változtatásával lehet a megfelelő polinomot beállítani, ezzel párhuzamosan változik az ábrázolt grafikonok alakja is. A függvény és deriváltjainak a grafikonyainak az ábrázolásával könnyen megállapítható a függvény monotonitása, konvexitása, szélsőértékei, inflexiós pontjai és más tulajdonságok is.

Első lépésként beírjuk a parancssorba az együtthatóknak megfelelő változókat egy alapértékkel és az algebra ablakban beállítjuk ezeknek a megjelenítését. Most a függvény grafikonjának megjelenítéséhez beírjuk a parancssorba a következő szöveget: $f(x) = a * x \wedge 4 + b * x \wedge 3 + c * x \wedge 2 + d * x + e$. Ekkor beírjuk, hogy $Szélsőérték[f]$ és a grafikonon megjelennek a függvény szélsőértékei(mindegyik). Ezeket a pontokat átnevezhetjük a későbbi könnyebb átláthatóság érdekében $Szélsőérték1$, $Szélsőérték2$, illetve $Szélsőérték3$ nevekkkel (ha három van). Ezután az f függvény primitív függvényét ábrázoljuk beírva a parancssorba azt, hogy $g(x) = f'(x)$. Megjelenítjük ennek gyökeit is a $Gyök[g]$ parancs beírásával. Következik az f második deriváltja, vagyis a g első deriváltja, ezt megkpjuk beírva azt, hogy $h(x) = g'(x)$.

Összekötve a szélsőértékeket a szélsőértékhelyeket jelző pontokkal könnyebben láthatjuk ezek változását, amikor változtatjuk az eredeti függvény együtthatóit. Az inflexiós pontok megjelenítéséhez beírjuk a parancssorba, hogy $InflexiósPont[f]$. Úgyanígy jelennek meg a g függvény szélsőértékei ha beírjuk, hogy $Szélsőérték[g]$.

Szakasszal összekötjük a g szélsőértékeit f -nek a megfelelő inflexiós pontjaival.

A függvények kitevőinek a változását akkor láthatjuk, ha szövegként beillesztjük ezeket a következőket beírva a parancssorba:

```
"f(x) = " + f
"f'(x) = " + g
"f(x) = ax4 + bx3 + cx2 + dx + e"
"f''(x) = " + h
```

Természetesen ezt megtehetjük az eszköztárban található *Söveg beszúrása* eszköz használatával is. Kijelöljük a h függvény és az x -tengely metszéspontját. A kijelölt szélsőérték és inflexiós pontok helyeinek változásának szemléltetéséhez beszúrjuk a következő szövegeket:

```
"D=" + (x(D))
"A=" + (x(A))
"E=" + (x(E))
"B=" + (x(B))
"F=" + (x(F))
```

Végül azért, hogy a három függvényt, az együtthatókat, a szélsőértékeket, az inflexiós pontokat és különböző más elemeket egymástól megkülönböztethessük és átláthatóbb ábrát kapjunk átszínezzük ezeket úgy hogy az egymáshoz kapcsolódóakat ugyanazzal a színnel színezzük.

A *Nézet* menü *Szerkesztő protokoll* menü pontja alatt megtekinthetjük a szerkesztés lépéseit (6.2. ábra).

Szerkesztő Protokoll				
Fájl Nézet Súgó				
No.	Név	Definíció	Parancs	Algebra
1	Szám a			$a = -0.8$
2	Szám b			$b = 3.5$
3	Szám c			$c = -3.1$
4	Szám d			$d = -3.1$
5	Szám e			$e = 2$
6	Függvény f	$f(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$	$f(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$	$f(x) = -0.8 x^4 + 3.5 x^3 - 3.1 x^2 - 3.1 x + 2$
7	Pont Szélsőérték1	Szélsőérték f	Szélsőérték[f]	Szélsőérték1 = (-0.32, 2.55)
7	Pont Szélsőérték2	Szélsőérték f	Szélsőérték[f]	Szélsőérték2 = (1.4, -1.89)
7	Pont Szélsőérték3	Szélsőérték f	Szélsőérték[f]	Szélsőérték3 = (2.2, -1.3)
8	Függvény g	$g(x) = f'(x)$	$g(x) = f'(x)$	$g(x) = 4(-0.8)x^3 + 3 \cdot 3.5x^2 + 2(-3.1)x + e$
9	Pont D	Gyök g	Gyök[g]	$D = (-0.32, 0)$
9	Pont E	Gyök g	Gyök[g]	$E = (1.4, 0)$
9	Pont F	Gyök g	Gyök[g]	$F = (2.2, 0)$
10	Függvény h	$h(x) = g'(x)$	$h(x) = g'(x)$	$h(x) = 12(-0.8)x^2 + 6 \cdot 3.5x + 2(-3.1)$
11	Szakasz I	Szakasz[Szélsőérték2, E]	Szakasz[Szélsőérték2, E]	$i = 1.89$
12	Szakasz J	Szakasz[F, Szélsőérték3]	Szakasz[F, Szélsőérték3]	$j = 1.3$
13	Pont InflexióPont1	Inflexió pont f	InflexióPont[f]	InflexióPont1 = (0.35, 0.67)
13	Pont InflexióPont2	Inflexió pont f	InflexióPont[f]	InflexióPont2 = (1.84, -1.57)
14	Pont I	Szélsőérték g	Szélsőérték[g]	$I = (0.35, -4.12)$
14	Pont J	Szélsőérték g	Szélsőérték[g]	$J = (1.84, 1.11)$
15	Szakasz k	Szakasz[I, InflexióPont1]	Szakasz[I, InflexióPont1]	$k = 4.79$
16	Szakasz l	Szakasz[J, InflexióPont2, J]	Szakasz[J, InflexióPont2, J]	$l = 2.68$
17	Szöveg T1	"f(x) = " + f	"f(x) = " + f	$T1 = "f(x) = -0.8 x^4 + 3.5 x^3 - 3.1 x^2 - 3.1 x + 2"$
18	Szöveg T2	"f'(x) = " + g	"f'(x) = " + g	$T2 = "f'(x) = 4(-0.8)x^3 + 3 \cdot 3.5x^2 + 2(-3.1)x + e"$
19	Szöveg T3	"f''(x) = " + h	"f''(x) = " + h	$T3 = "f''(x) = 12(-0.8)x^2 + 6 \cdot 3.5x + 2(-3.1)"$
20	Szöveg T4	"f''(x) = " + h	"f''(x) = " + h	$T4 = "f''(x) = 12(-0.8)x^2 + 6 \cdot 3.5x + 2(-3.1)"$
21	Szakasz m	Szakasz[Szélsőérték1, D]	Szakasz[Szélsőérték1, D]	$m = 2.55$
22	Pont A	metszéspontja k, xTengely	Metszéspont[k, xTengely]	$A = (0.35, 0)$
23	Pont B	metszéspontja xTengely, l	Metszéspont[xTengely, l]	$B = (1.84, 0)$
24	Szöveg T5	"D=" + (x(D))	"D=" + (x(D))	$T5 = "D=-0.32"$
25	Szöveg T6	"A=" + (x(A))	"A=" + (x(A))	$T6 = "A=0.35"$
26	Szöveg T7	"E=" + (x(E))	"E=" + (x(E))	$T7 = "E=1.4"$
27	Szöveg T8	"B=" + (x(B))	"B=" + (x(B))	$T8 = "B=1.84"$
28	Szöveg T9	"F=" + (x(F))	"F=" + (x(F))	$T9 = "F=2.2"$

6.2. ábra.

7. ÖSSZEGZÉS

Szakdolgozatom célját, hogy bemutassam a *Geogebra* legfontosabb alkalmazási lehetőségeit a matematikában, sikerült elérnem. Nem a teljességre törekedtem, hanem a felhasználóbarát, olvasóbarát leírásra. Tapasztalatom szerint az idősebb tanárok többségének nincs olyan informatikai tapasztalata, mint a fiatalabbaknak, pedig sokszor jobban szeretnék újításokat, más, esetleg jobb szemléltetést bevezetni az órákra. Ebben nyújt a dolgozat legtöbb segítséget, mivel lépésről lépésre követve a leírást, bárki elkészítheti ezeket az alkalmazásokat. De a dolgozatot azok is nyugodtan olvashatják, akik nem jártasak a matematikában, csak kíváncsiak a programra, mivel minden témakör elején feldolgoztam a témával kapcsolatos elméleti részt is.

Általában egy adott témakörhöz található olyan szoftver, amellyel lehet dolgozni, de azok csak egy bizonyos feladat vagy résztémakör feldolgozásában használható. A dolgozatból az derül ki, hogy a *Geogebra* egy sokoldalú program, amit azzal a céllal fejlesztettek, hogy minél többen és többféleképpen használhassanak. A szerzőkkel könnyen kapcsolatot lehet teremteni, és így még több segítségre tehet szert a felhasználó, és esetleg a program készítők is.

Remélem a program terjesztőjének sikerül elérnie a továbbiakban azt, hogy továbbfejlesszék a programot, talán egy jól működő háromdimenziós verzióval, hogy aki használja minél több örömét lelje benne.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Internet. <http://zeus.nyf.hu/mattan/faliujsag/Haromszoggeometria.pdf>. 2009.
- [2] Hajós György. *Bevezetés a geometriába*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1971.
- [3] Lajkó Károly. *Analízis II*. Debreceni Egyetem, 2003.
- [4] Markus Hohenwarter, fordító: Sulik Szabolcs. *GeoGebra 2.5 kézikönyv*. Geogebra súgó, 2006.
- [5] Dr. Szendrei János. *Algebra és Számelmélet*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1996.
- [6] Dr. Ábrahám István. *Analízis 2*. Mozaik, 2005.