

Debreceni Egyetem
Természettudományi és Technológiai Kar
Matematikai Intézet

Szakdolgozat

Lánctörtek és alkalmazásaik

készítette:

Szabó Mariann

témavezető: Dr. Tengely Szabolcs

Debrecen, 2013.

TARTALOMJEGYZÉK

Tartalomjegyzék	i
1 Bevezető	2
2 Lánc törtek	3
2.1. A lánc törtek története	3
2.2. Racionális számok lánc törtjei	5
2.3. A $\sqrt{d}$ alakú számok lánc törtjei	12
3 Pell-egyenletek	16
3.1. Pell-egyenletek	16
4 Feladatok	21
4.1. Feladatok	21
Irodalomjegyzék	29

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretném megköszönni a családomnak és a páromnak a folyamatos támogatást, biztatást, segítséget és türelmet, amit egyetemi éveim alatt kaptam.

1. BEVEZETŐ

Szakdolgozatom témája a lánc törtek és azok gyakorlati alkalmazásai. A 2.1. fejezetben a lánc törtek valamint első- és másodfokú határozatlan egyenletek eredetéről, történetéről ejtek szót. A 2.2. fejezetben bevezetem a lánc tört fogalmát, két lánc tört előállítási módszert mutatok be, illetve a lánc törtek egyértelműségére vonatkozólag ismertetek néhány tulajdonságot. Megadom a kezdőszület fogalmát is. A 2.3. fejezetben a végtelen egyszerű lánc törteket és periódikus lánc törteket ismertetem. Bemutatom a periódikus lánc törtek és másodfokú egyenletek kapcsolatát. Majd pedig a $\sqrt{d}$ alakú lánc törtek néhány tulajdonságát vázoló fel.

A 3. fejezetben a Pell-egyenletek definíciója után az egyenlet lánc törtekkel való megoldhatóságát és annak tulajdonságait mutatom be.

A 4. fejezetben néhány olyan feladatot ismertetek, amelyek megoldásához felhasználhatók a lánc törtek és a Pell-egyenletek.

Szakdolgozatomban példákat és Maple-ben írt programokat használok a fogalmak teljes körűbb megértéséhez. A Maple egy olyan matematikai szoftvercsomag, mely a matematika minden területén használható különféle számítások, elemzések elvégzésére. Ezenkívül alkalmas dokumentációk készítésére, grafikai ábrázolásra, illetve pénzügyi, statisztikai, fizikai modellezésre is [10].

2. LÁNCTÖRTEK

A 2.1. fejezetben szereplő rövid történeti áttekintéshez az [1], [3], [7] és [8] irodalmat használtam fel.

A 2.2. és a 2.3. fejezetben szereplő definíciók, tételek és bizonyításaik megírásához a [3] és [6] művek nyújtottak segítséget. A fejezetek szemléletesebbé tételéhez példákat és Maple-ben írt programokat használok.

2.1. A lánc törtek története

Első- és másodfokú egyenletekkel már a babiloni birodalom korában foglalkoztak. A III. században Diophantos Arithmetica című tizenhárom kötetes művében szerepelnek első- és másodfokú határozatlan egyenletek. Ő ekkor tört megoldásokat is elfogadott.

Az V. században Arjabhata hindu matematikus és csillagász, a VII. században Brahmagupta foglalkozott határozatlan egyenletekkel. Brahmagupta az $ax + by = c$ alakú elsőfokú diophantoszi egyenlet egész megoldásait kereste (negatívokat is elfogadva), ahol a, b és c is egészek. A megoldások alapja, hogy az $ax + by = 1$ egyenlet egész gyökeit c -vel szorozta meg. Ezután egyre kisebb együtthatójú egyenletté alakítva az eredetit, könnyen leolvashatóvá vált a megoldás. Ez az eljárás az euklideszi algoritmusra vezethető vissza.

A XII. században élt hindu matematikus és csillagász Bháskara adott általános megoldást az elsőfokú kétismeretlenes határozatlan egyenletekre.

A lánc törteket már Arjabhata is ismerte, azonban Fibonacci Liber Abaci című könyvében szereplő jelölés a lánc törtek egy másik írásmódját adja. A könyvben szereplő $\frac{111}{345}$ jelentése a következő volt:

$$\frac{1 + \frac{1}{5}}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Bombelli XVI. századi olasz matematikus L'Algebra Opera című könyvében szereplő közelítések nem megfelelőek, ugyanis a

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + 2 + 2 + 2} \quad \text{értéke} \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}},$$

illetve a

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+6+6+6} \quad \text{jelölés értéke} \quad \sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}}}}.$$

Ezek nem helyes számítások. A helyes közelítés a következőképpen néz ki:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}} \quad \text{illetve} \quad \sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{\ddots}}}.$$

A XVI. században Tartaglia fordította le latinra Diophantos Arithmetica című művét, melyben már szerepelt törtelőállítás:

$$\frac{170}{50} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}.$$

Az 1730-as évek körül Euler dolgozta ki és alapozta meg a lánc törtek elméletét.

1767-ben Lagrange dolgozott ki egy módszert, mellyel lánc törtek segítségével ad közelítést algebrai egyenletek megoldására. Ilyen egyenlet például az $x^2 - dy^2 = 1$ típusú Pell-egyenlet, mellyel többek között Diophantos, Bháskara és Euler is foglalkozott.

Magyar matematikusok közül például Bolyai Farkas foglalkozott a lánc törtekkel. Igazolta, hogy az $x^2 + ax = b$ valós együtthatójú egyenlet egy megoldása az alábbi végtelen lánc tört:

$$x = \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{\ddots}}}.$$

Továbbá bizonyítást adott az alábbi lánc törtre:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{\ddots}}}.$$

2.2. Racionális számok lánc törtjei

2.2.1. Definíció. Véges lánc törtnek nevezzük az alábbi alakú törtet:

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{\ddots a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}},$$

ahol $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{N}$, az a_0 egész szám lehet negatív, ekkor negatív számot állít elő a lánc tört, illetve lehet nulla is, ekkor 0 és 1 közötti számról beszélünk. Továbbá, ha $b_0 = \dots = b_n = 1$, akkor a következő jelölést használva:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}} = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$$

véges egyszerű lánc törttről beszélünk. Az $a_0, \dots, a_n$ számokat a lánc tört jegyeinek nevezzük.

Véges egyszerű lánc tört előállítása az euklideszi algoritmus segítségével történhet:

Az $\frac{a}{b}$ racionális számot akarjuk előállítani. Ekkor $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ és $\text{lko}(a, b) = 1$.

Az algoritmus:

(1. lépés):

$$\begin{aligned} a &= a_0 b + q_1 \\ b &= a_1 q_1 + q_2 \\ q_1 &= a_2 q_2 + q_3 \\ &\vdots \\ q_{n-2} &= a_{n-1} q_{n-1} + q_n \\ q_{n-1} &= a_n q_n, \end{aligned}$$

ahol $q_1, \dots, q_n, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ és $q_1 < q_2 < \dots < q_n$ teljesül.

(2. lépés):

Elosztva az egyenlőségeket rendre $b, q_1, \dots, q_n$ -nel:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a_0 + \frac{q_1}{b} &= a_0 + \frac{1}{\frac{b}{q_1}} \\
\frac{b}{q_1} &= a_1 + \frac{q_2}{q_1} &= a_1 + \frac{1}{\frac{q_1}{q_2}} \\
\frac{q_1}{q_2} &= a_2 + \frac{q_3}{q_2} &= a_2 + \frac{1}{\frac{q_2}{q_3}} \\
&\vdots \\
\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} &= a_{n-1} + \frac{q_n}{q_{n-1}} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{q_{n-1}}{q_n}} \\
\frac{q_{n-1}}{q_n} &= a_n.
\end{aligned}$$

(3. lépés):

Egymást követő helyettesítésekkel megkapjuk az $\frac{a}{b}$ lánc tört alakját:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{q_1}{q_2}}} = \dots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Példa:

1.) pozitív eset:

a $\frac{148}{17}$ egyszerű lánc tört alakja az előző eljárás alapján:

$$\begin{aligned}
148 &= 8 \cdot 17 + 12 \\
17 &= 1 \cdot 12 + 5 \\
12 &= 2 \cdot 5 + 2 \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1
\end{aligned}$$

ezután:

$$\begin{aligned}
\frac{148}{17} &= 8 + \frac{12}{17} = 8 + \frac{1}{\frac{17}{12}} \\
\frac{17}{12} &= 1 + \frac{5}{12} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} \\
\frac{12}{5} &= 2 + \frac{2}{5} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{2}} \\
\frac{5}{2} &= 2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

majd helyettesítésekkel:

$$\frac{148}{17} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{12}{5}} = \dots = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}, \quad \text{azaz} \quad \frac{148}{17} = \langle 8, 1, 2, 2, 2 \rangle$$

2.) negatív eset:

$$\frac{-127}{19} = -7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6}} = \langle -7, 3, 6 \rangle$$

3.) 0 és 1 közötti eset:

$$\frac{5}{21} = 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}} = \langle 0, 4, 5 \rangle$$

Az eljárás visszafelé is működik, azaz egy lánc törtet vissza tudunk fejteni racionális számmá. A visszafejtés egyszerű számolással végezhető.

Egy másik lánc tört előállítás módszere a következő algoritmus alkalmazása:

Jelölje $x_0 = [x_0] + \{x_0\}$ az átalakítani kívánt $\frac{a}{b}$ racionális számot. Tehát bontsuk fel $\frac{a}{b}$ -t egész- és törtrész összegére. Továbbá legyen $a_0 = [x_0]$. Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok meghatározásához hajtsuk végre az $x_i = \frac{1}{\{x_{i-1}\}}$, $a_i = [x_i]$, $i = 0, \dots, n$ algoritmust, tehát x_i az x_{i-1} törtrészének a reciproka lesz. Az algoritmus addig folytatódik, amíg x_n egész lesz. A kapott a_i számokból a 2.2.1. definíció alapján felírható a lánc tört.

Példa:

1.)

$$x_0 = \frac{148}{17} = 8 + \frac{12}{17}, \quad a_0 = 8$$

$$x_1 = \frac{1}{\frac{12}{17}} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}, \quad a_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}, \quad a_2 = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}, \quad a_3 = 2$$

$$x_4 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = 2 + 0, \quad a_4 = 2$$

$$\frac{148}{17} = \langle 8, 1, 2, 2, 2 \rangle$$

2.)

$$x_0 = \frac{-127}{19} = -6 - \frac{13}{19} = -7 + \frac{6}{19}, \quad a_0 = -7$$

$$x_1 = \frac{1}{\frac{6}{19}} = \frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6}, \quad a_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{1} = 6 + 0, \quad a_2 = 6$$

$$\frac{-127}{19} = \langle -7, 3, 6 \rangle$$

3.)

$$x_0 = \frac{5}{21} = 0 + \frac{5}{21}, \quad a_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{\frac{5}{21}} = \frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}, \quad a_1 = 4$$

$$x_2 = \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{1} = 5 + 0, \quad a_2 = 5$$

$$\frac{5}{21} = \langle 0, 4, 5 \rangle$$

Negatív számnál, mint a **2.)** példában, arra kell figyelni, hogy itt is összeg formájában adjuk meg az x_0 -t.

A két módszer nyilvánvaló hasonlóságot mutat. A második módszer tekinthető az első rövidített változatának, ugyanis ott azonnal a (2. lépés)-sel kezdünk.

Mindkét módszerrel ugyanazt a lánc tört alakot kaptuk. Igaz-e tehát, hogy egy racionális számnak egy lánc tört alakja létezik, és egy lánc tört egy racionális számot reprezentál? Vegyük a példában szereplő $\frac{148}{17}$:

$$\langle 8, 1, 2, 2, 2 \rangle = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = \langle 8, 1, 2, 2, 1, 1 \rangle.$$

Az emeletes törtek kiértékelésével mindkét esetben $\frac{148}{17}$ -et kapunk. Így tehát több lánc tört alak is megadható ugyanazon számhoz. Ezért, ha kikötjük, hogy egy lánc tört utolsó számjegye nem

lehet 1, akkor egyértelművé tettük, hogy egy racionális számnak egy lánc tört alakja létezik és ez megfordítva is igaz.

Általánosan: $a_n = (a_n - 1) + 1$ miatt:

$$\frac{a}{b} = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1 \rangle,$$

ezért kikötve, hogy $a_n \neq 1$ az $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ egyértelmű.

A 2.1. ábrán a Maple programon keresztül szemléltetem a fentieket:

<pre>[> with(numtheory): > szám:=148/17; = > cfrac(szám); = > lánctört1:=cfrac(szám, 'quotients'); = > lánctört2:=[8,1,2,2,1,1]; > CFRAC(lánctört2); = > cfrac(lánctört1); = > cfrac(lánctört2);</pre>	$\text{szám} := \frac{148}{17}$ $8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$ $\text{lánctört1} := [8, 1, 2, 2, 2]$ $\text{lánctört2} := [8, 1, 2, 2, 1, 1]$ $8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}$ $\frac{148}{17}$ $\frac{148}{17}$	(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)
--	--	--

2.1. ábra.

A **cfrac** eljárás kiírja a **szám** lánc tört alakját. Majd a **cfrac** eljárás **quotients** paramétere egy listában adja meg a lánc tört másik írásmódját. Ezt a listát elneveztem **lánctört1**-nek. Megadtam egy másik lánc törtet a **lánctört2** listában. Az $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1 \rangle$ egyenlőség miatt **lánctört1** = **lánctört2** teljesül. A **CFRAC** függvény a listában lévő számokat jeleníti meg lánc törtként. Végül újra a **cfrac** eljárást használtam ahhoz, hogy a két listában szereplő számok alapján megkapjam a megfelelő lánc tört értékét. Mindkét esetben a $\frac{148}{17}$ kaptam vissza, tehát a **lánctört1** és **lánctört2** is ugyanannak a racionális számnak a lánc tört alakja.

2.2.1. Tétel. *Két lánc törtet akkor mondunk egyenlőnek, ha értékük ugyanaz a szám.*

Bizonyítás. ([6] alapján:) A két lánc törtet jelölje $\langle a_0, a_1, \dots, a_s \rangle$ és $\langle b_0, b_1, \dots, b_t \rangle$. Az előzőek miatt feltesszük, hogy $a_s \neq 1$ és $b_t \neq 1$. A tétel akkor lesz igaz, ha a két lánc tört azonos számú tagból áll, tehát $s = t$ és megfelelő tagjaik egyenlőek, azaz $a_i = b_i$, $i = 0, \dots, s$. Legyenek:

$$\begin{aligned} m_0 &= \langle a_0, a_1, \dots, a_s \rangle, & n_0 &= \langle b_0, b_1, \dots, b_t \rangle \\ m_1 &= \langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle, & n_1 &= \langle b_1, b_2, \dots, b_t \rangle \\ &\vdots & &\vdots \\ m_{s-1} &= \langle a_{s-1}, a_s \rangle, & n_{t-1} &= \langle b_{t-1}, b_t \rangle \\ m_s &= \langle a_s \rangle, & n_t &= \langle b_t \rangle, \end{aligned}$$

ahol $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t \in \mathbb{N}$, $m_0, \dots, m_s, n_0, \dots, n_t \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\begin{aligned} m_0 &= a_0 + \frac{1}{m_1}, & n_0 &= b_0 + \frac{1}{n_1} \\ m_1 &= a_1 + \frac{1}{m_2}, & n_1 &= b_1 + \frac{1}{n_2} \\ &\vdots & &\vdots \\ m_{s-1} &= a_{s-1} + \frac{1}{m_s}, & n_{t-1} &= b_{t-1} + \frac{1}{n_t} \\ m_s &= a_s, & n_t &= b_t. \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy belássuk $a_i = b_i$, $i = 0, \dots, s$ vegyük először m_0 -t és n_0 -t. Tegyük fel, hogy $m_0 = n_0$, ez akkor teljesül, ha $a_0 = b_0$ és $m_1 = n_1$. Az $m_1 = n_1$ viszont akkor teljesül, ha $a_1 = b_1$ és $m_2 = n_2$. Ezt folytatva $s + 1$ lépés után azt kapjuk, hogy mivel $m_s = n_t$, ezért $a_s = b_t$. Továbbá a feltétel szerint $a_s \neq 1$ és $b_t \neq 1$ miatt az is teljesül, hogy $s = t$. $\square$

2.2.2. Definíció. Jelölje α az $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ lánc törtet és legyenek $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Ekkor az α kezdőszeleteit az alábbi lánc törtök adják:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \langle a_0 \rangle = \frac{p_0}{q_0} \\ \alpha_1 &= \langle a_0, a_1 \rangle = \frac{p_1}{q_1} \\ \alpha_2 &= \langle a_0, a_1, a_2 \rangle = \frac{p_2}{q_2} \\ &\vdots \\ \alpha_n &= \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \frac{p_n}{q_n} = \alpha. \end{aligned}$$

α k -adik kezdőszeletét jelölje: $\alpha_k = \langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle = \frac{p_k}{q_k}$.

Megjegyzés. A nevezők által alkotott sorozat növekvő, azaz: $q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 \dots < q_n$.

A p_k, q_k meghatározása történhet a lánc tört visszafejtésével, vagy az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1 \\ p_1 &= p_0 a_0 + 1, & q_1 &= a_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ p_k &= p_{k-1} a_k + p_{k-2}, & q_k &= q_{k-1} a_k + q_{k-2} \\ & k = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Példa:

az $\alpha = \frac{148}{17}$ kezdőszeletei:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \langle 8 \rangle = 8, & \text{vagy} \quad \frac{p_0}{q_0} &= \frac{a_0}{1} = \frac{8}{1} \\ \alpha_1 &= \langle 8, 1 \rangle = 9, & \text{vagy} \quad \frac{p_1}{q_1} &= \frac{p_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{9}{1} \\ \alpha_2 &= \langle 8, 1, 2 \rangle = \frac{26}{3}, & \text{vagy} \quad \frac{p_2}{q_2} &= \frac{p_1 a_2 + p_0}{q_1 a_2 + q_0} = \frac{26}{3} \\ \alpha_3 &= \langle 8, 1, 2, 2 \rangle = \frac{61}{7}, & \text{vagy} \quad \frac{p_3}{q_3} &= \frac{p_2 a_3 + p_1}{q_2 a_3 + q_1} = \frac{61}{7} \\ \alpha_4 &= \langle 8, 1, 2, 2, 2 \rangle = \frac{148}{17}, & \text{vagy} \quad \frac{p_4}{q_4} &= \frac{p_3 a_4 + p_2}{q_3 a_4 + q_2} = \frac{148}{17} \end{aligned}$$

2.2.2. Tétel. Irracionális α és racionális $\frac{a}{b}$ esetén, ahol $b \geq 1$, $\text{lnko}(a, b) = 1$ és

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$$

teljesül, akkor $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{a}{b} = \alpha_k = \frac{p_k}{q_k}.$$

Bizonyítás. ([3] alapján:) Jelölje az α lánc tört alakjának k -adik kezdőszeletét $\frac{p_k}{q_k}$, továbbá feltesszük, hogy teljesülnek a feltételek $\frac{a}{b}$ -re, de ez nem kezdőszelete az α lánc törtnek, vagyis $\frac{a}{b} \neq \frac{p_k}{q_k}$. A q_n sorozat szigorúan monoton növekvő tulajdonsága miatt, pontosan egy $k \in \mathbb{N}$ szám létezik, amire $q_k \leq b < q_{k+1}$. Erre a k -ra teljesül a következő:

$$|q_k \alpha - p_k| \leq |b \alpha - a| = b \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b},$$

amiből adódik:

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{2bq_k}.$$

A feltétel szerint $\frac{a}{b} \neq \frac{p_k}{q_k}$, és a $bp_k - aq_k$ különbség egész és nem egyenlő nullával, ezért $1 \leq |bp_k - aq_k|$. Következésképpen:

$$\frac{1}{bq_k} \leq \left| \frac{bp_k - aq_k}{bq_k} \right| = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \frac{p_k}{q_k} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2bq_k} + \frac{1}{2b^2}.$$

Tehát az

$$\frac{1}{bq_k} < \frac{1}{2bq_k} + \frac{1}{2b^2}$$

egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $b < q_k$, ez pedig ellentmond k választásának. $\square$

2.3. A $\sqrt{d}$ alakú számok lánc törtjei

2.3.1. Definíció. Legyen $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N}$, ekkor végtelen lánc törtnek nevezzük az alábbi alakú törtet:

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{\ddots}}}$$

Ha $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = 1$, akkor végtelen egyszerű lánc törttről beszélünk, melynek jelölése:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle.$$

2.3.2. Definíció. Egy végtelen egyszerű lánc törtet periódikusnak nevezzük, ha benne valamely lánc törtjegyek sorozata közvetlenül egymás után ismétlődik, azaz:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots a_m + \frac{1}{g_1 + \frac{1}{\ddots g_n + \frac{1}{g_1 + \frac{1}{\ddots g_n + \frac{1}{g_1 + \frac{1}{\ddots}}}}}}}} = \langle a_0, a_1, \dots, a_m, g_1, \dots, g_n, g_1, \dots, g_n, g_1, \dots \rangle$$

alakú egyszerű végtelen lánc tört periódikus, ahol a $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{N}$ sorozat lesz a periódus, n pedig a periódus hossza. Jelölés:

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_m, \overline{g_1, \dots, g_n} \rangle.$$

Az is megengedett, hogy a periódus rögtön az első lánc törtjeggyel kezdődjön, ekkor a lánc tört $\langle \overline{g_1, \dots, g_n} \rangle$ alakú és tisztán periódikusnak nevezzük.

2.3.1. Tétel. *Periódikus egyszerű lánc törtek másodfokú egyenletek pozitív megoldásait adják.*

Bizonyítás. Jelölje α a periódikus lánc törtet és β a periódust, tehát:

$$\alpha = \langle a_0, a_1, \dots, a_m, \overline{g_1, \dots, g_n} \rangle, \quad \beta = \langle \overline{g_1, \dots, g_n} \rangle.$$

Innen

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots a_m + \frac{1}{\beta}}}.$$

Ebből a β -ra felírható egy $x\beta^2 + y\beta + z = 0$ alakú másodfokú egyenlet, melyből meghatározott pozitív β -t visszahelyettesítve α -ba, α -ra is megadható egy másodfokú egyenlet. Ennek a pozitív megoldása lesz az α . $\square$

Példa:

$$\alpha = \langle 11, 3, 2, \overline{5, 2, 2} \rangle = 11 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\ddots}}}}}}}}}}}},$$

$$\beta = \langle \overline{5, 2, 2} \rangle = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\beta}}}.$$

Innen

$$\alpha = 11 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\beta}}}.$$

A másodfokú egyenlet β -ra:

$$5\beta^2 - 25\beta - 11 = 0 \implies \beta_+ = \frac{25 + 13\sqrt{5}}{10}$$

és ebből

$$\alpha = \frac{729 - 13\sqrt{6}}{62}.$$

A példában szereplő α és β irracionális szám, melyek lánc tört alakja végtelen. A 2.2. fejezet szerint egy racionális szám lánc tört alakja véges és fordítva egy véges egyszerű lánc tört értéke racionális

szám. Irracionális szám esetében a lánc tört alak végtelen és végtelen lánc tört irracionális számot reprezentál.

Irracionális számoknál a lánc tört alak előállítás ugyanúgy végezhető, mint a racionális számoknál, azzal a különbséggel, hogy itt az algoritmus nem ér véget, és a kapott lánc törtjegyek egyértelmű ismétlődésekor felírható a periódus, amennyiben az létezik.

2.3.3. Definíció. Az $\frac{a + b\sqrt{c}}{d}$ alakú valós számokat kvadratikus irracionálisnak nevezzük, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$, $c > 0$ nem négyzetszám.

Az előző példában szereplő α, β számok is kvadratikus irracionálisak.

2.3.2. Tétel. Ha $d = a^2 + 1$ alakú, akkor $\sqrt{d} = \langle a_0, \overline{2a_0} \rangle$, ahol $d \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás. ([6] alapján:) Ha $d = a^2 + 1$ alakban írható, akkor $\sqrt{d}$ lánc tört előállítása a következőképpen történhet:

$$\begin{aligned} (\sqrt{d} - a_0)(\sqrt{d} + a_0) &= 1 \\ \sqrt{d} - a_0 &= \frac{1}{\sqrt{d} + a_0} \\ \sqrt{d} &= a_0 + \frac{1}{2a_0 + (\sqrt{d} - a_0)}. \end{aligned}$$

A $(\sqrt{d} - a_0)$ -t helyettesítjük $\frac{1}{\sqrt{d} + a_0}$ -val, akkor:

$$\sqrt{d} = a_0 + \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{\sqrt{d} + a_0}} = a_0 + \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{2a_0 + (\sqrt{d} - a_0)}}.$$

Itt az előző helyettesítést egymás után végtelen sokszor elvégezve periódikus lánc törtet kapunk, mely így néz ki:

$$\sqrt{d} = a_0 + \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{\ddots}}}}} = \langle a_0, 2a_0, 2a_0, 2a_0, \dots \rangle = \langle a_0, \overline{2a_0} \rangle.$$

□

Példa:

$$\sqrt{37} = \langle 6, \overline{12} \rangle$$

$$\sqrt{50} = \langle 7, \overline{14} \rangle$$

$$\sqrt{122} = \langle 11, \overline{22} \rangle$$

$$\sqrt{10001} = \langle 100, \overline{200} \rangle$$

2.3.3. Tétel. Minden $d \in \mathbb{N}$ nem négyzetszámra fennáll, hogy:

$$\sqrt{d} = \langle a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_3, a_2, a_1, 2a_0} \rangle,$$

ahol $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$.

Példa:

$$\sqrt{12} = \langle 3, \overline{2, 6} \rangle$$

$$\sqrt{419} = \langle 20, \overline{2, 7, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 19, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 7, 2, 40} \rangle$$

$$\sqrt{820} = \langle 28, \overline{1, 1, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, 1, 1, 56} \rangle$$

$$\sqrt{1216} = \langle 34, \overline{1, 6, 1, 3, 4, 2, 1, 1, 4, 17, 4, 1, 1, 2, 4, 3, 1, 6, 1, 68} \rangle$$

Maple programban:

$\left[\begin{array}{l} > \text{with(numtheory):} \\ > \text{sqrt(37)=cfrac(sqrt(37), 'periodic', 'quotients');} \\ & \quad \sqrt{37} = [[6], [12]] \\ & \text{---} \\ > \text{sqrt(50)=cfrac(sqrt(50), 'periodic', 'quotients');} \\ & \quad 5\sqrt{2} = [[7], [14]] \\ & \text{---} \\ > \text{sqrt(122)=cfrac(sqrt(122), 'periodic', 'quotients');} \\ & \quad \sqrt{122} = [[11], [22]] \\ & \text{---} \\ > \text{sqrt(10001)=cfrac(sqrt(10001), 'periodic', 'quotients');} \\ & \quad \sqrt{10001} = [[100], [200]] \\ & \text{---} \\ > \text{sqrt(12)=cfrac(sqrt(12), 'periodic', 'quotients');} \\ & \quad 2\sqrt{3} = [[3], [2, 6]] \\ & \text{---} \\ > \text{sqrt(419)=cfrac(sqrt(419), 'periodic', 'quotients');} \\ & \quad \sqrt{419} = [[20], [2, 7, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 19, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 7, 2, 40]] \\ & \text{---} \\ > \text{sqrt(820)=cfrac(sqrt(820), 'periodic', 'quotients');} \\ & \quad 2\sqrt{205} = [[28], [1, 1, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, 1, 1, 56]] \\ & \text{---} \\ > \text{sqrt(1216)=cfrac(sqrt(1216), 'periodic', 'quotients');} \\ & \quad 8\sqrt{19} = [[34], [1, 6, 1, 3, 4, 2, 1, 1, 4, 17, 4, 1, 1, 2, 4, 3, 1, 6, 1, 68]] \end{array} \right.$	(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)
--	---

2.2. ábra.

A `cfrac` eljárás `quotients` paramétere egy listában adja meg a láncörtet, míg a `periodic` paraméter a láncört periódusát adja meg a listán belül egy másik listában.

3. PELL-EGYENLETEK

Ebben a fejezetben bemutatom a Pell-egyenletek és a lánc törtek kapcsolatát. Itt is ugyanúgy, mint az eddigiekben definíciók, tételek és bizonyítások, példák, valamint programok segítségével teszem szemléletesebbé a fejezetet. Itt nagyban támaszkodtam a [3] és [6] irodalomra.

3.1. Pell-egyenletek

3.1.1. Definíció. Pell-egyenletnek nevezzük az $x^2 - dy^2 = 1$ egészegyütthatós diofantikus egyenletet, ahol d is egész.

Az egyenlet triviális megoldásai az (x, y) számpárra:

- $d < -1$ esetben: $(\pm 1, 0)$,
- $d = -1$ esetben: $(0, \pm 1)$, vagy $(\pm 1, 0)$,
- $d = 0$ esetben a $(\pm 1, y)$ végtelen sok megoldást kapjuk, ahol az y tetszőleges,
- ha $d > 0$ négyzetszám, azaz $d = a^2$ alakú, akkor az egyenlet $(x - ay)(x + ay) = 1$ alakban írható, így a megoldások: $(\pm 1, 0)$.

A továbbiakban a $d > 0$ és $d \neq a^2$ esettel foglalkozom, ekkor ugyanis végtelen sok nem triviális megoldás létezik, mely megoldásokat a $\sqrt{d}$ lánc tört alakjának kezdőszeletei adják.

3.1.1. Tétel. Az $x^2 - dy^2 = 1$ Pell-egyenlet egy (p, q) megoldása a $\sqrt{d}$ lánc tört egy kezdőszeletének számlálója és nevezője.

Bizonyítás. ([6] alapján:) Legyen (p, q) megoldás, ekkor:

$$\begin{aligned} - p^2 - dq^2 = 1 &\Rightarrow p^2 = dq^2 + 1 \Rightarrow p > q, \\ - p^2 - dq^2 = 1 &\Rightarrow (p - \sqrt{d}q)(p + \sqrt{d}q) = 1 \Rightarrow p - \sqrt{d}q = \frac{1}{p + \sqrt{d}q} \Rightarrow \frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{1}{q(p + \sqrt{d}q)}. \end{aligned}$$

Innen mivel $\sqrt{d} > 1$ és $p > q$, ezért

$$p + \sqrt{d}q > 2q \Rightarrow q(p + \sqrt{d}q) > 2q^2 \Rightarrow \frac{1}{q(p + \sqrt{d}q)} < \frac{1}{2q^2}.$$

Ahonnán kapjuk, hogy

$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{d} \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Ez pedig a 2.2.2. tétel szerint azt jelenti, hogy $\frac{p}{q}$ a $\sqrt{d}$ lánctört egy kezdőszelete. $\square$

3.1.2. Tétel. Legyen $\alpha_k = \frac{p_k}{q_k}$ a $\sqrt{d}$ lánctört alakjának k -adik kezdőszelete, periódusának hossza pedig n . Ekkor

$$p_{jn-1}^2 - dq_{jn-1}^2 = (-1)^{jn}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Bizonyítás. ([3] alapján:) Jelölje most $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_{jn-1}, x_{jn} \rangle$ a $\sqrt{d}$ lánctört alakját, továbbá legyen $j \geq 1$, $x_{jn} = \langle 2a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{jn-1}}, 2a_0 \rangle = a_0 + \sqrt{d}$.

A $\sqrt{d} = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_{jn-1}, x_{jn} \rangle = \frac{p_{jn}}{q_{jn}} = \frac{x_{jn}p_{jn-1} + p_{jn-2}}{x_{jn}q_{jn-1} + q_{jn-2}}$ feltevést alkalmazva és x_{jn} helyébe $a_0 + \sqrt{d}$ -t írva a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\sqrt{d}(a_0q_{jn-1} + q_{jn-2} - p_{jn-1}) = a_0p_{jn-1} + p_{jn-2} - dq_{jn-1}.$$

A bal oldalon irracionális számot kapunk, a jobb oldalon pedig racionálisat. Az egyenlőség ezért nem igaz, így a következők teljesülnek:

$$a_0q_{jn-1} + q_{jn-2} - p_{jn-1} = 0, \quad \text{illetve} \quad a_0p_{jn-1} + p_{jn-2} - dq_{jn-1} = 0.$$

A fenti egyenlőségeket megszorozva p_{jn-1} -gyel, illetve q_{jn-1} -gyel, összeadva, majd rendezve:

$$p_{jn-1}^2 - dq_{jn-1}^2 = p_{jn-1}q_{jn-2} - q_{jn-1}p_{jn-2}.$$

Állítás:

A 2.2.2. definícióban előálló p_k, q_k sorozatokra fenáll $k \geq 2$ esetén:

$$\begin{vmatrix} p_{k-1} & p_k \\ q_{k-1} & q_k \end{vmatrix} = (-1)^k.$$

Ezért a kapott egyenlőség jobb oldala, azaz:

$$p_{jn-1}q_{jn-2} - q_{jn-1}p_{jn-2} = (-1)^{jn-2} = (-1)^{jn},$$

így:

$$p_{jn-1}^2 - dq_{jn-1}^2 = (-1)^{jn}.$$

$\square$

3.1.3. Tétel. Legyen $d \in \mathbb{N}$ nem négyzetszám, $\alpha_k = \frac{p_k}{q_k}$ a $\sqrt{d}$ lánctört alakjának k -adik kezdőszelete és n a lánctört periódusának hossza. Ekkor az $x^2 - dy^2 = 1$ Pell-egyenlet összes pozitív megoldása:

- ha n páros szám, akkor: $(x, y) = (p_{jn-1}, q_{jn-1}), \quad j = 1, 2, \dots,$
- ha n páratlan szám, akkor: $(x, y) = (p_{2jn-1}, q_{2jn-1}), \quad j = 1, 2, \dots$

Bizonyítás. A 3.1.1. tétel alapján egy Pell-egyenlet minden megoldása a $\sqrt{d}$ lánctört alakjának valamely kezdőszelete. $\square$

Az alábbi program megadja egy $\sqrt{d}$ szám kezdőszeleteit. Jelen példában a $\sqrt{41}$ és a $\sqrt{76}$ első 20 kezdőszelete látható:

```
> with(numtheory):
> kezdszelet:=proc(d)
  local L, i, x, y, K;
  L:=cfrac(sqrt(d), 'quotients', 50);
  for i to 20 do
    x:=numer(cfrac(L[1..i]));
    y:=denom(cfrac(L[1..i]));
    K:=[op(K), x/y];
  end do;
  K:=subsop(1=NULL, K);
  print(`Kezdszeletek: `=K);
end proc;
> kezdszelet(41);
Kezdszeletek: = [6, 13/2, 32/5, 397/62, 826/129, 2049/320, 25414/3969, 52877/8258, 131168/20485, 1626893/254078,
3384954/528641, 8396801/1311360, 104146566/16264961, 216689933/33841282, 537526432/83947525, 6667007117/1041211582,
13871540666/2166370689, 34410088449/5373952960, 426792602054/66653806209, 887995292557/138681565378]
```

$$(1)$$

```
> kezdszelet(76);
Kezdszeletek: = [8, 9, 26/3, 35/4, 61/7, 340/39, 1421/163, 7445/854, 8866/1017, 16311/1871, 41488/4759,
57799/6630, 966272/110839, 1024071/117469, 3014414/345777, 4038485/463246, 7052899/809023, 39302980/4508361,
164264819/18842467, 860627075/98720696]
```

$$(2)$$

3.1. ábra.

A következő ábra az $x^2 - dy^2 = 1$ Pell-egyenlet megoldásait mutatja, amikor a periódus kicsi, illetve nagy:

```

> with(numtheory):
> megold:=proc(d)
  local L, n, i, x, y, M;
  L:=cfrac(sqrt(d), 'quotients', 50);
  n:=nops(cfrac(sqrt(d), 'periodic', 'quotients')[2]);
  print(`Periódushossz` =n);
  for i to 50 do
    x:=numer(cfrac(L[1..i]));
    y:=denom(cfrac(L[1..i]));
    if eval(x^2-d*y^2)=1 then
      M:=[op(M), [x,y]];
    end if;
  end do;
  M:=subsop(1=NULL, M);
  print(`Megoldások: `=M);
end proc;
> megold(41);

                               Periódushossz = 3
Megoldások: = [[2049, 320], [8396801, 1311360], [34410088449, 5373952960],
[141012534067201, 22022457918720], [577869330197301249, 90248027176961600],
[2368108374136006451201, 369836393348730718080], [9704507539340024239720449,
1515589449695071305730240], [39769069528107045198367948801,
6210885195014008862151805440]]
> megold(76);

                               Periódushossz = 12
Megoldások: = [[57799, 6630], [6681448801, 766414740], [772362118440199,
88596011107890], [89283516160768675201, 10241521691283453480]]

```

3.2. ábra.

A `megold` eljárás meghatározza az egyenlet megoldásait adott d szám esetében. Példámban először a $d = 41$ -et, majd a $d = 76$ -ot vizsgáltam. A lánc törték hosszát 50 számjegyre adtam meg, ugyanígy a lehetséges megoldások számát is. A periódus hosszából látszik, hogy minél hosszabb a periódus annál ritkábban jutunk megoldáshoz. Továbbá 3.1.3. tétel alapján, ha a periódushossz páros, akkor a kezdőszeletek közül minden $(jn - 1)$ -edik elégíti ki a Pell-egyenletet, ha pedig a periódushossz páratlan, akkor a $(2jn - 1)$ -edik kezdőszeletek alkotják a megoldásokat. A 3.1. ábrát összevetve a 3.2. ábrával látható, hogy a példában szereplő $\sqrt{76}$ esetében, ahol $n = 12$, a 11., 23., 35., 47., ... kezdőszeleteket, illetve a $\sqrt{41}$ -nél, ahol $n = 3$, az 5., 11., 17., 23., 29., 35., ... kezdőszeletek kerestük.

A következő példaprogram azt mutatja, hogy mely kezdőszeleteknél fordul elő az $x^2 - dy^2 = -1$ eset, a $\sqrt{29}$ első 30 kezdőszeletét vizsgálva, ahol $n = 5$:

```

> with(numtheory):
> vizsgál:=proc(d)
    local L, n, i, x, y;
    L:=cfrac(sqrt(d), 'quotients', 50);
    n:=nops(cfrac(sqrt(d), 'periodic', 'quotients')[2]);
    print(`Periódushossz` =n);
    for i to 30 do
        x:=numer(cfrac(L[1..i]));
        y:=denom(cfrac(L[1..i]));
        if eval(x^2-d*y^2)=1 or eval(x^2-d*y^2)=-1 then
            print([x,y] - `>eredmény`=(x^2-d*y^2));
        end if;
    end do;
end proc:
> vizsgál(29);

```

Periódushossz = 5
 [70, 13] — >eredmény = -1
 [9801, 1820] — >eredmény = 1
 [1372210, 254813] — >eredmény = -1
 [192119201, 35675640] — >eredmény = 1
 [26898060350, 4994844413] — >eredmény = -1
 [3765920568201, 699313893460] — >eredmény = 1

(1)

3.3. ábra.

Valóban a $(jn - 1)$ -edik, azaz a 4., 9., 14., 19., 24., 29., ... kezdőszeleteknél felváltva kapunk 1-et és -1 -et. Ahhoz, hogy csak 1-et kapjunk megoldásnak, tehát teljesüljön a Pell-egyenlet páratlan periódushossznál, a $(2jn - 1)$ -edik kezdőszeletek lesznek a keresett számpárok. A $\sqrt{29}$ esetében tehát a 9., 19., 29., ... kezdőszeletek.

4. FELADATOK

Ehhez a fejezethez érdekes feladatokat ([2], [4], [5], [9]) kerestem, melyek megoldása a lánc-törtekhez, illetve Pell-egyenletekhez kapcsolódik.

4.1. Feladatok

1. feladat: A Fibonacci-számok előállítása lánc-törtek segítségével [4]:

A Fibonacci-számok, vagyis a $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$ sorozat a következőképpen áll elő:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = F_0 + F_1 = 1, \quad F_3 = F_1 + F_2 = 2, \quad \dots, \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \dots$$

Állítsuk elő az $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ -et lánc-tört alakban ($n = 2, 3, \dots$)!

$$\begin{aligned} \frac{F_2}{F_1} &= \frac{1}{1} = \langle 1 \rangle &&= \langle 1 \rangle \\ \frac{F_3}{F_2} &= \frac{2}{1} = \langle 2 \rangle &&= \langle 1, 1 \rangle \\ \frac{F_4}{F_3} &= \frac{3}{2} = \langle 1, 2 \rangle &&= \langle 1, 1, 1 \rangle \\ \frac{F_5}{F_4} &= \frac{5}{3} = \langle 1, 1, 2 \rangle &&= \langle 1, 1, 1, 1 \rangle \\ \frac{F_6}{F_5} &= \frac{8}{5} = \langle 1, 1, 1, 2 \rangle &&= \langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle \\ \frac{F_7}{F_6} &= \frac{13}{8} = \langle 1, 1, 1, 1, 2 \rangle &&= \langle 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle \\ \frac{F_8}{F_7} &= \frac{21}{13} = \langle 1, 1, 1, 1, 1, 2 \rangle &&= \langle 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle \\ &\vdots && \end{aligned}$$

Amellett, hogy szemmel láthatóan érdekes lánc törteket kaptunk, elmondható az is, hogy az $\langle 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, 1, 1 \rangle, \dots$, lánc törtekből álló sorozat visszafejtésével mind a számlálóban, mind a nevezőben a Fibonacci-számokat kapjuk. Előbbi esetben F_2 -től kezdődve, míg utóbbi esetben F_1 -gyel kezdve a sorozatot. Vagyis egy n db 1-ből álló lánc tört kezdőszeleteinek nevezője megadja az $F_1, F_2, \dots, F_n$ Fibonacci-számokat.

Hasonlóan érdekes lánc tört alakokat kapunk az $\frac{F_n}{F_{n+2}}$ felírásakor ($n = 0, 1, \dots$):

$$\begin{aligned} \frac{F_0}{F_2} &= \frac{0}{1} = \langle 0 \rangle &&= \langle 0 \rangle \\ \frac{F_1}{F_3} &= \frac{1}{2} = \langle 0, 2 \rangle &&= \langle 0, 2 \rangle \\ \frac{F_2}{F_4} &= \frac{1}{3} = \langle 0, 3 \rangle &&= \langle 0, 2, 1 \rangle \\ \frac{F_3}{F_5} &= \frac{2}{5} = \langle 0, 2, 2 \rangle &&= \langle 0, 2, 1, 1 \rangle \\ \frac{F_4}{F_6} &= \frac{3}{8} = \langle 0, 2, 1, 2 \rangle &&= \langle 0, 2, 1, 1, 1 \rangle \\ \frac{F_5}{F_7} &= \frac{5}{13} = \langle 0, 2, 1, 1, 2 \rangle &&= \langle 0, 2, 1, 1, 1, 1 \rangle \\ \frac{F_6}{F_8} &= \frac{8}{21} = \langle 0, 2, 1, 1, 1, 2 \rangle = \langle 0, 2, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ebben az esetben a $\langle 0, 2, 1, 1, \dots, 1 \rangle$ lánc tört kezdőszeleteinek számlálója lesz a Fibonacci sorozat.

A 4.1. ábrán szereplő **fib** eljárás meghatározza az első n db Fibonacci-számot a $\langle 0, 2, 1, 1, \dots, 1 \rangle$ lánc tört segítségével, ahol a lánc törtjegyek száma n . Most $n = 20$, így a program a $\langle 0, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$ lánc tört kezdőszeleteinek számlálójából állítja össze a keresett számokat:

```
[> with(numtheory):
> fib:=proc(n)
    local L, M, i, j, x;
    L:=[0,2];
    for i to n-2 do
        L:=[op(L), 1];
    end do;
    for j to n do
        x:=numer(cfrac(L[1..j]));
        M:=[op(M), x];
    end do;
    M:=subsop(1=NULL, M);
    print(`Fibonacci-számok: `=M);
end proc;
> fib(20);
Fibonacci-számok: = [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,
2584, 4181]
```

(1)

4.1. ábra.

2. feladat: A szarvasmarhák problémája [2], [5], [9]:

A feladat Arkhimédészről származik (i.e. III. század). A feladatban az adott csordához tartozó szarvasmarhák számát keressük. A csorda fehér, fekete, barna és tarka bikákból illetve tehenekből áll, melyek darabszámára különböző kitételek vannak: minden szín esetében a bikák száma több, mint a tehenéké; a fehér bikák száma megegyezik a feketék számának felével és egyharmadával és még a barnák számának összegével; Hasonló kitételek vannak a többi bikákra és tehenekre vonatkozólag is. Ezenkívül azt tudjuk még, hogy a fehér és fekete bikák számának összege négyzetszám, illetve a barna és tarka bikák számának összege háromszögszám.

Jelölés:

E : fehér bikák, F : fekete bikák, G : barna bikák, H : tarka bikák

e : fehér tehenek, f : fekete tehenek, g : barna tehenek, h : tarka tehenek.

A feltételek tehát:

$$E > e, F > f, G > g, H > h$$

$$E = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) F + G$$

$$F = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) H + G$$

$$H = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) E + G$$

$$e = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(F + f)$$

$$f = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(H + h)$$

$$h = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(G + g)$$

$$g = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(E + e)$$

$E + F$: négyzetszám, azaz m^2 alakú

$G + H$: háromszögyszám, azaz $\frac{n(n+1)}{2}$ alakú.

A hét egyenletből álló egyenletrendszer megoldása, ahol $k \in \mathbb{N}$:

$$E = 10\,366\,482k, \quad e = 7\,206\,360k$$

$$F = 7\,460\,514k, \quad f = 4\,893\,246k$$

$$G = 4\,149\,387k, \quad g = 5\,439\,213k$$

$$H = 7\,358\,060k, \quad h = 3\,515\,820k$$

Eddig a csorda tehát $50\,389\,082k$ szarvasmarhából áll.

Most figyelembe véve a két utolsó feltételt:

$$m^2 = E + F = 10\,366\,482k + 7\,460\,514k = 17\,826\,996k = 2^2 \cdot \underbrace{3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657}_v \cdot k = 2^2 vk,$$

miel az $E + F$ négyzetszám, ezért $k = vy^2$ alakú, ahol $y \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{n(n+1)}{2} = G + H = 4\,149\,387k + 7\,358\,060k = 11\,507\,447k = \underbrace{7 \cdot 353 \cdot 4657}_w \cdot k = wk,$$

miel a $G + H$ háromszögyszám, ezért $(2n+1)^2 = 8wk + 1$

$$\implies \underbrace{(2n+1)^2}_x - 8wvy^2 = 1 \implies x^2 - 410\,286\,423\,278\,424y^2 = 1$$

A kapott Pell-egyenlet megoldható, a $\sqrt{d} = \sqrt{410\,286\,423\,278\,424}$ szám lánc tört alakjára megkereshető az a kezdőselejt, amely eleget tesz az egyenletnek. Ezzel pedig már meghatározható a megoldás: $7,76 \cdot 10^{206\,544}$.

E megoldás mind a 206 545 számjegyenek megadása csak a XX. században sikerült. Addig, a XIX. században, a számjegyek számát, néhány kezdő és végső számjegyet tudtak megadni.

Meyer, német matematikus, például 1867-ben próbálkozott a fenti Pell-egyenlet megoldásával, de 240 lépés után sem sikerült megtalálnia a $\sqrt{d}$ lánc tört periódusát, így feladta. A keresett periódus hossza 203 254.

Amthor tudott először megoldást adni a feladatra 1880-ban. Ő határozta meg a számjegyek számát és az első 3 számjegyet. Megoldásának alapja, hogy a $d = 410\,286\,423\,278\,424$ számot $(2 \cdot 4657)^2 \cdot d'$ alakban írta, ahol $d' = 4\,729\,494$ nem négyzetszám és a $\sqrt{d'}$ lánc tört periódusa csak 92 hosszúságú. Továbbá, mivel az $(x, y) = x + y\sqrt{d}$ számpár az $x^2 - dy^2 = 1$ Pell-egyenlet megoldása, akkor az $(x, 2 \cdot 4657 \cdot y) = x + 2 \cdot 4657 \cdot y\sqrt{d'}$ számpár az $x^2 - d'y^2 = 1$ Pell-egyenlet megoldása. Amthor tehát először megoldotta a $x^2 - d'y^2 = 1$ Pell-egyenletet, majd azt a legkisebb n -edik megoldást kereste, melyben az y osztható $2 \cdot 4657$ -tel. Ekkor ugyanis az $(x + 2 \cdot 4657 \cdot y\sqrt{d'})^n = x + y\sqrt{d}$ összefüggés teljesül. Azt kapta, hogy az $n = 2329$, ezzel pedig eljutott az eredeti Pell-egyenlet megoldásához.

Lenstra, holland matematikus, Amthor megoldását felhasználva a feladat összes lehetséges megoldását egy képlet segítségével adta meg 2002-ben:

$$E + F + G + H + e + f + g + h = 50\,389\,082 \cdot k_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ahol } k_i = \frac{(u^{4658 \cdot i} - u^{-4658 \cdot i})^2}{368\,238\,304},$$

$$\text{és } u = 300\,426\,607\,914\,281\,713\,365 \cdot \sqrt{609} + 84\,129\,507\,677\,858\,393\,258 \cdot \sqrt{7766}.$$

Amthor számolása alapján $u^2 = x + y\sqrt{d'}$ az $x^2 - d'y^2 = 1$ Pell-egyenlet megoldása.

A legkisebb megoldást $i = 1$ esetben kapjuk, azaz a csorda legkevesebb $7,76 \cdot 10^{206\,544}$ darab szarvasmarhából áll.

A 3.2. ábrán látható **megold** eljárást felhasználva az alábbi program a fenti képletek alapján számolja ki a csorda legkisebb számát. A $d = 4\,729\,494$ esetben megadja a Pell-egyenlet első (x, y) megoldását, ebből meghatározza azt az u számot, melyet a Lenstra - féle képletbe helyettesítve megkapjuk a végeredményt.

```

> with(numtheory):
> Digits:=20;
                                Digits := 20
(1)
> megold:=proc(d)
  local L, n, i, k, l, x, y, M, u;
  L:=cfrac(sqrt(d), 'quotients', 100);
  n:=nops(cfrac(sqrt(d), 'periodic', 'quotients')[2]);
  print(`Periódushossz` =n);
  for i to 100 do
    x:=numer(cfrac(L[1..i]));
    y:=denom(cfrac(L[1..i]));
    if eval(x^2-d*y^2)=1 then
      M:=[op(M), [x,y]];
      u:=factor(sqrt(x+y*sqrt(d)));
      k:=(u^4658-u^(-4658))^2/368238304;
      l:=evalf(50389082*k);
    end if;
  end do;
  M:=subsop(1=NULL, M);
  print(`(x,y):` =M);
  print(`u: `=u);
  print(`A szarvasmarhák száma: `=l);
end proc;
> megold(4729494);
                                Periódushossz = 92
(x,y): = [[109931986732829734979866232821433543901088049,
50549485234315033074477819735540408986340]]
u: = 300426607914281713365  $\sqrt{609}$  + 84129507677858393258  $\sqrt{7766}$ 
A szarvasmarhák száma: = 7.7602714064868171318  $10^{206544}$ 
(2)

```

4.2. ábra.

3. feladat: A ház probléma [9]:

A feladatban egy utcában keresünk egy házat a következő információk alapján: az utcában legalább 200 és legfeljebb 500 ház áll, melyek számozása 1-től kezdődik és egyesével növekszik; továbbá az utca elejétől a keresett házig vett házszámok összege megegyezik a keresett háztól az utca végéig vett házszámok összegével.

Jelölje k a keresett házszámot, h pedig az utcában lévő házak számát. Ekkor a feladat szerint:

$$200 \leq k, h \leq 500$$

$$1 + 2 + \dots + k = k + \dots + h$$

$$\frac{k(k+1)}{2} = \frac{h(h+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}$$

$$k^2 + k = h^2 + h - k^2 + k$$

$$2k^2 = h^2 + h.$$

A kapott egyenlet átalakítható Pell-egyenletté:

$$(2h+1)^2 - 2(2k)^2 = 1$$

$$x = 2h+1, y = 2k \implies x^2 - 2y^2 = 1.$$

Ezt pedig már meg tudjuk oldani lánc törtek segítségével. Itt $d = 2$, azaz a $\sqrt{2}$ kezdőseleitei közül kapjuk a megoldást x -re és y -ra, melyekből könnyen meghatározható a k és h , vagyis a keresett házszám és az utcában lévő házak száma.

Itt szintén a 3.2. ábrán lévő **megold** eljárást alkalmaztam, illetve kibővítettem az adott feltételekkel, hogy az alábbi módon határozzam meg a feladat megoldását:

```
[> with(numtheory):
> házprobléma:=proc(d)
  local min, max, L, i, x, y, a, b, M, N;
  min:=200; max:=500;
  L:=cfrac(sqrt(d), 'quotients', 50);
  for i to 50 do
    x:=numer(cfrac(L[1..i]));
    y:=denom(cfrac(L[1..i]));
    if eval(x^2-d*y^2)=1 then
      b:=(x-1)/2;
      a:=y/2;
      if a>=min and a<=max and b>=min and b<=max then
        M:=[op(M), a];
        N:=[op(N), b];
      end if;
    end if;
  end do;
  M:=subsop(1=NULL, M);
  N:=subsop(1=NULL, N);
  print(`Az utcában lév házak száma: `=N);
  print(`A keresett házszám: `=M);
end proc;
> házprobléma(2);
```

Az utcában lév házak száma: = [288]
A keresett házszám: = [204]

(1)

4.3. ábra.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Dr. Lénárdi László Sain Márton. *Matematikatörténeti feladatok*, page 38. Tankönyvkiadó, 1982.
- [2] H. W. Lenstra Jr. Solving the Pell Equation. <http://www.ams.org/notices/200202/fea-lenstra.pdf>, 2002.
- [3] Klukovits Lajos. Számelmélet és alkalmazásai - segédanyag. http://www.math.u-szeged.hu/~klukovit/Hallgatoknak/Szamelm/_szamelm1112.html, 2011.
- [4] Dr. Ron Knott. An Introduction to Continued Fractions. <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTR0.html>, 2013.
- [5] Kovács Lehel István. Érdekes informatikai feladatok - XXI. rész. *Firka*, 17. évf. 2007-2008. 4. sz., 2008. http://epa.oszk.hu/00200/00220/00053/pdf/firka_EPA00220_2007_2008_04_152-157.pdf.
- [6] Maurer I. Gyula. *Tizedes törtek és lánc törtek*, pages 74–190. Dacia Könyvkiadó, 1981.
- [7] Sain Márton. *Matematikatörténeti ABC*, pages 12–17, 31, 41, 44–50, 56, 74, 148, 191. Tankönyvkiadó, 1974.
- [8] Szabó Péter Gábor. Bolyai Farkas számelméleti vonatkozású kéziratok hagyatéka. *Természet Világa*, 2003. I. különszám, 2003. <http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/kulonszamok/k0301/szabo.html>.
- [9] Szalay László. A ház probléma. <http://titanic.nyme.hu/~laszsalay/housepr.pdf>, 2007.
- [10] <http://www.maplesoft.com/>.