



Diszkrét matematika

Horváth Gábor/Tengely Szabolcs

Tengely Szabolcs

`tengely@science.unideb.hu`

`http://www.math.unideb.hu/~tengely`





Áttekintés

Skatulyaelv

Permutációk

Távolság

Rendezés

Rekurzió

Indukció





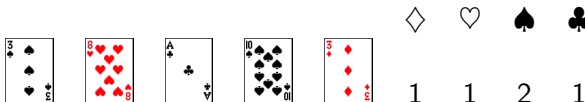
Segít a skatulyaelv!

Az első fontos észrevételhez az úgynevezett skatulyaelv vezet el.
Adott n gyufaszál és m skatulya úgy, hogy $n > m$. A gyufaszálakat elhelyezzük a skatulyákba. Ekkor létezik olyan skatulya, amelyben 1-nél több gyufaszál található.



Segít a skatulyaelv!

Az első fontos észrevételhez az úgynevezett skatulyaelv vezet el.
Adott n gyufaszál és m skatulya úgy, hogy $n > m$. A gyufaszálakat elhelyezzük a skatulyákba. Ekkor létezik olyan skatulya, amelyben 1-nél több gyufaszál található.



Segít a skatulyaelv!

Az első fontos észrevételhez az úgynevezett skatulyaelv vezet el.
Adott n gyufaszál és m skatulya úgy, hogy $n > m$. A gyufaszálakat elhelyezzük a skatulyákba. Ekkor létezik olyan skatulya, amelyben 1-nél több gyufaszál található.

					♦	♥	♠	♣
1	1	1	1	1	1	1	2	1
								
0	1	2	2	2				



Segít a skatulyaelv!

Az első fontos észrevételhez az úgynevezett skatulyaelv vezet el.
Adott n gyufaszál és m skatulya úgy, hogy $n > m$. A gyufaszálakat elhelyezzük a skatulyákba. Ekkor létezik olyan skatulya, amelyben 1-nél több gyufaszál található.

	♦	♥	♠	♣
				
1	1	2	1	
				
0	1	2	2	
				
3	1	0	1	



Segít a skatulyaelv!

Az első fontos észrevételhez az úgynevezett skatulyaelv vezet el.
Adott n gyufaszál és m skatulya úgy, hogy $n > m$. A gyufaszálakat elhelyezzük a skatulyákba. Ekkor létezik olyan skatulya, amelyben 1-nél több gyufaszál található.

	♦	♥	♠	♣
				
1	1	2	1	
				
0	1	2	2	
				
3	1	0	1	

5 lap, 4 szín $\implies$ skatulyaelv: mindig van legalább 2 azonos színű lap!





A szín beazonosítása

A skatulyaelv miatt az 5 lap között mindig van legalább 2 azonos színű.

A segéd az egyiket teszi félre, amit a bűvész meg fog nevezni! A másikat helyezi legfelülre, így a bűvész azonnal tudja az ismeretlen lap színét.





A szín beazonosítása

A skatulyaelv miatt az 5 lap között mindig van legalább 2 azonos színű.

A segéd az egyiket teszi félre, amit a bűvész meg fog nevezni! A másikat helyezi legfelülre, így a bűvész azonnal tudja az ismeretlen lap színét.

A pakliban 52 lap található, 13 $\diamond$, 13 $\heartsuit$, 13 $\spadesuit$ és 13 $\clubsuit$. A bűvész már ismeri a lap színét és abból a színből az egyik lap a kezében van, így 12 lehetőség maradt az ismeretlen lapra.





A szín beazonosítása

A skatulyaelv miatt az 5 lap között mindig van legalább 2 azonos színű.

A segéd az egyiket teszi félre, amit a bűvész meg fog nevezni! A másikat helyezi legfelülre, így a bűvész azonnal tudja az ismeretlen lap színét.

A pakliban 52 lap található, 13 $\diamond$, 13 $\heartsuit$, 13 $\spadesuit$ és 13 $\clubsuit$. A bűvész már ismeri a lap színét és abból a színből az egyik lap a kezében van, így 12 lehetőség maradt az ismeretlen lapra.

A maradék 3 lap segítségével kell meghatározni az ismeretlen lap számát.





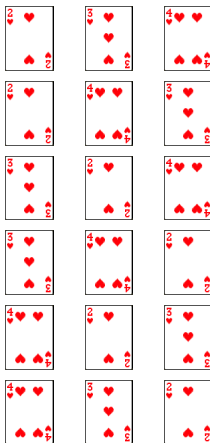
Segítenek a permutációk

A 3 lap sorrendje adhat további információt!

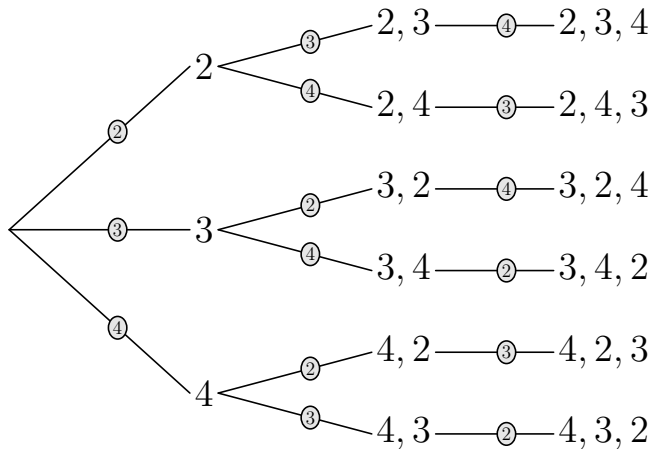


Segítenek a permutációk

A 3 lap sorrendje adhat további információt!



Segítenek a fa gráfok





Kevés az információ?!

- Az ismeretlen lap színe ismert.
- 12 lap közül kell tudni kiválasztani.
- A maradék 3 lapot 6 féle sorrendbe állíthatjuk.
- Nincs elég információ?!





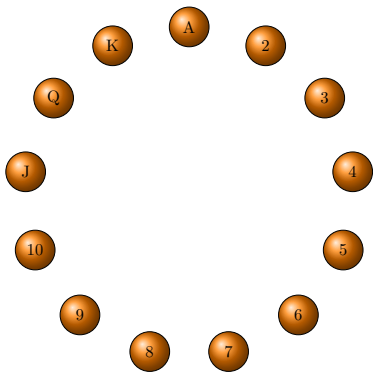
Kevés az információ?!

- Az ismeretlen lap színe ismert.
- 12 lap közül kell tudni kiválasztani.
- A maradék 3 lapot 6 féle sorrendbe állíthatjuk.
- Nincs elég információ?!
- A segéd választja ki a 2 azonos színű lapból melyik lesz a titkos lap és melyiket látja a bűvész!
- Hogyan használjuk ki ezt a lehetőséget?





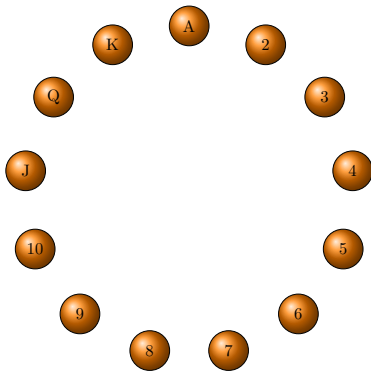
A lapok távolsága



- A lapokat egy körben helyezzük el:
 $A, 2, 3, \dots, J, Q, K$.
- Lapok távolsága: az óramutató irányában tett lépések száma.
- Például:
 $A - 6$ távolság 5 ,
 $6 - A$ távolság 8 .



A lapok távolsága



- A lapokat egy körben helyezzük el:
 $A, 2, 3, \dots, J, Q, K$.
- Lapok távolsága: az óramutató irányában tett lépések száma.
- Például:
 $A - 6$ távolság 5 ,
 $6 - A$ távolság 8 .
- Két lap között a távolságok minimuma legfeljebb 6 .





A négy lap rendezése

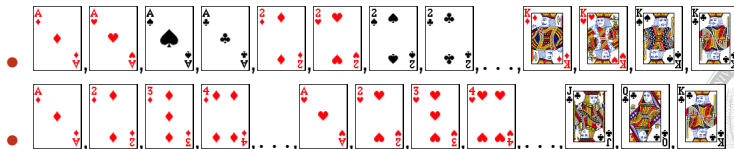
- A legfelső lap adja meg a szint és a két azonos színűből az kerül felülre, amelytől a másik 6-nál nem nagyobb távolságra helyezkedik el.
- A maradék 3 lapot úgy rendezi a segéd, hogy az megadja a két lap minimális távolságát a körön.
- **Megegyezés szükséges a lapok értékét illetően!**



A négy lap rendezése

- A legfelső lap adja meg a színt és a két azonos színűből az kerül felülre, amelytől a másik 6-nál nem nagyobb távolságra helyezkedik el.
- A maradék 3 lapot úgy rendezi a segéd, hogy az megadja a két lap minimális távolságát a körön.
- **Megegyezés szükséges a lapok értékét illetően!**

Két természetes választás:



A négy lap rendezése

Példák:



Távolságok: $\spadesuit 3 - \spadesuit 10 = 7$ és $\spadesuit 10 - \spadesuit 3 = 6$, azaz a legfelső lap a $\spadesuit 10$ és a maradék 3 lappal a 6-os távolságot kell megadni.

A sorrend a következő: $1 = \clubsuit A < 2 = \diamondsuit 3 < 3 = \heartsuit 8$

$\clubsuit A, \diamondsuit 3, \heartsuit 8$	1,2,3	1
$\clubsuit A, \heartsuit 8, \diamondsuit 3$	1,3,2	2
$\diamondsuit 3, \clubsuit A, \heartsuit 8$	2,1,3	3
$\diamondsuit 3, \heartsuit 8, \clubsuit A$	2,3,1	4
$\heartsuit 8, \clubsuit A, \diamondsuit 3$	3,1,2	5
$\heartsuit 8, \diamondsuit 3, \clubsuit A$	3,2,1	6

A négy lapot a segéd a következő sorrendbe rakja:

$\spadesuit 10, \heartsuit 8, \diamondsuit 3, \clubsuit A$.





Távolságok: $\spadesuit 4 - \spadesuit 9 = 5$ és $\spadesuit 9 - \spadesuit 4 = 8$.

$1 = \clubsuit 5 < 2 = \clubsuit J < 3 = \heartsuit Q$ és $\heartsuit Q, \clubsuit 5, \clubsuit J \Rightarrow 5$

A lapok sorrendje ebben az esetben tehát: $\spadesuit 4, \heartsuit Q, \clubsuit 5, \clubsuit J$.





Távolságok: $\spadesuit 4 - \spadesuit 9 = 5$ és $\spadesuit 9 - \spadesuit 4 = 8$.

$1 = \clubsuit 5 < 2 = \clubsuit J < 3 = \heartsuit Q$ és $\heartsuit Q, \clubsuit 5, \clubsuit J \Rightarrow 5$

A lapok sorrendje ebben az esetben tehát: $\spadesuit 4, \heartsuit Q, \clubsuit 5, \clubsuit J$.

Adódik egy másik lehetőség is!

Távolságok: $\clubsuit 5 - \clubsuit J = 6$ és $\clubsuit J - \clubsuit 5 = 7$.

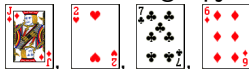
$1 = \spadesuit 4 < 2 = \spadesuit 9 < 3 = \heartsuit Q$ és $\heartsuit Q, \spadesuit 9, \spadesuit 4 \Rightarrow 6$

Egy másik lehetséges megoldás: $\clubsuit 5, \heartsuit Q, \spadesuit 9, \spadesuit 4$.



A megfejtés menete

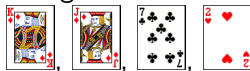
A bűvész megkapja a következő 4 lapot:



- Ekkor a bűvész már ismeri a színt: $\diamond$.
- $\heartsuit 2, \clubsuit 7, \diamond 6 \Rightarrow 1, 3, 2 \Rightarrow 2$.
- 2 lépést kell tenni a $\diamond J$ lapról.
- Az ismeretlen lap: $\diamond K$.



A segéd a következő lapokat adja a bűvésznek:



- Ekkor a bűvész már ismeri a színt: $\diamond$.
- $\diamond J, \clubsuit 7, \heartsuit 2 \Rightarrow 3, 2, 1 \Rightarrow 6$.
- 6 lépést kell tenni a $\diamond K$ lapról.
- Az ismeretlen lap: $\diamond 6$.





Hanoi tornyai

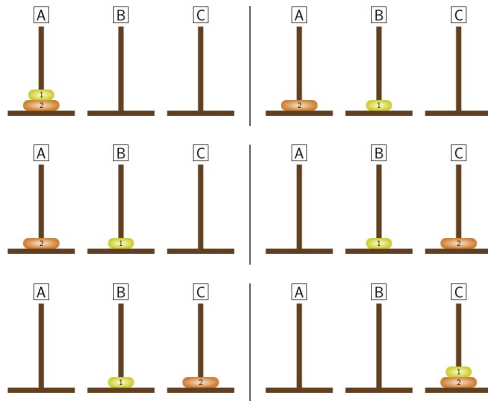
Edouard Lucas 1883-ban kitalált egy matematikai puzzle játékot. Adott 3 rúd, az elsőn n db korong. Az összes korongot a harmadik rúdra át kell pakolni úgy, hogy közben:

- egy lépésben csak egy korongot szabad áthelyezni,
- minden lépésnél csak a rúdon legfelül lévő korong mozgatható,
- nagyobb korongot kisebbre helyezni tilos.



Példák

Az $n = 1$ eset egyszerű, az első rúdról áthelyezzük a korongot a harmadikra, azaz egy lépésben kész a megoldás. Az $n = 2$ esetben:





Minimum lépésszám

Jelölje T_n az n korong esetében a legkisebb lépésszámot, amivel a probléma megoldható. Az előzőek alapján: $T_0 = 0$, $T_1 = 1$ és $T_2 = 3$. Megmutatjuk, hogy

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1.$$

Megoldás: az A rúdról a felső $n - 1$ korongot T_{n-1} lépésben át tudjuk mozgatni a B rúdra. A legnagyobb korongot áthelyezzük a C rúdra. A B rúdon lévő $n - 1$ korongot pedig T_{n-1} lépésben áthelyezzük a C rúdra. Azaz létezik megoldás legfeljebb $2T_{n-1} + 1$ lépésben.





Minimum lépésszám

Más stratégiát követve a legnagyobb korong átmozgatásához A -ról C -be az $n - 1$ kisebb korongot át kell helyezni A -ról a B rúdra. Ezt legjobb esetben T_{n-1} lépésben tudjuk megtenni. A legnagyobb korong A -ról C -be mozgatása után a kisebb korongokat a B -ről C -re kell átpakolni, amihez legalább T_{n-1} lépés szükséges. Innen

$$T_n \geq 2T_{n-1} + 1.$$

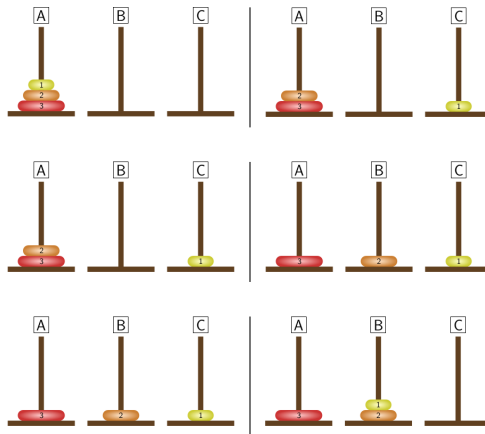
A két egyenlőtlenségből pedig

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

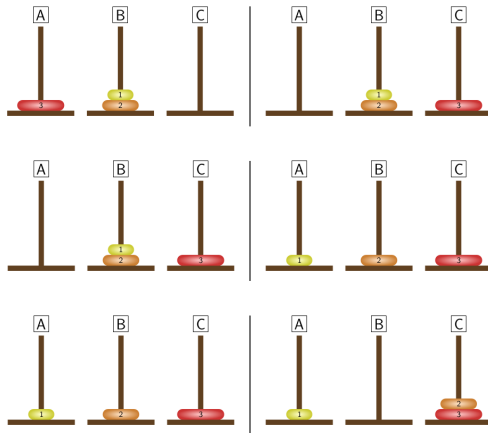
adódik.



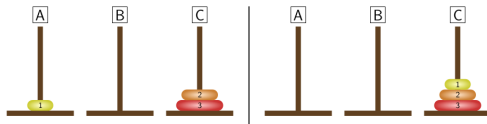
Megoldás $n = 3$ esetében



Megoldás $n = 3$ esetében



Megoldás $n = 3$ esetben



Az alábbi táblázatban találhatóak T_n értékei kis n esetében

n	T_n	n	T_n	n	T_n
0	0	4	15	8	255
1	1	5	31	9	511
2	3	6	63	10	1023
3	7	7	127	11	2047





Formula T_n -re

A táblázat alapján azt sejtjük, hogy

$$T_n = 2^n - 1.$$

Ezt indukcióval igazolhatjuk. Az állítás $n = 0$ esetében igaz, $T_0 = 0$ és a formula alapján $T_0 = 2^0 - 1 = 0$. Hasonlóan $n = 1$ esetében tudjuk, hogy $T_1 = 1$, a formula szerint pedig $T_1 = 2^1 - 1 = 1$. Feltesszük, hogy az állítást már sikerült igazolni valamilyen k egészre, azaz $T_k = 2^k - 1$. Megmutatjuk, hogy $T_{k+1} = 2^{k+1} - 1$. A rekurzív definíció miatt $T_{k+1} = 2T_k + 1$. Kihhasználva az indukciós feltételt

$$T_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Így az állítás igaz minden $n \geq 0$ egész esetében.

