

Magyary Zoltán Posztdoktori beszámoló előadás

Tengely Szabolcs

2007. november 9.

Eredmények

❖ Eredmények

- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

- (T.Sz.): On the Diophantine equation $x^2 + q^{2m} = 2y^p$, Acta Arith. 127 (2007) 71–86.
- F. S. Abu Muriefah, F. Luca, S. Siksek, (T.Sz.): On the Diophantine Equation $x^2 + C = 2y^n$, preprint.
- Hajdu L., (T.Sz.): Arithmetic progressions of squares, cubes and n -th powers, közlésre benyújtva.
- S. Laishram, T. N. Shorey, (T.Sz.): Squares in products in arithmetic progression with at most one term omitted and common difference a prime power, közlésre benyújtva.
- (T.Sz.): Note on a paper “An Extension of a Theorem of Euler” by Hirata-Kohno et al., közlésre benyújtva.
- Hajdu L., (T.Sz.), R. Tijdeman: Almost perfect cubes in arithmetic progressions, preprint.
- (T.Sz.): Triangles with two integral sides, közlésre elfogadva.
- Magma kód: IntegralRungePoints.m

Exponenciális egyenletek

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints



$$x^2 + q^{2m} = 2y^p$$

(1)

végességi állítás.

Exponenciális egyenletek

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints



$$x^2 + q^{2m} = 2y^p \tag{1}$$

végességi állítás.

Tétel. *Csak véges sok (x, y, m, q, p) megoldása létezik (1)-nek, ahol $\gcd(x, y) = 1, m, x, y \in \mathbb{N}$ és $3 < p, q$ páratlan prímek, úgy, hogy y nem írható fel két egymást követő négyzetszám összegeként.*

Exponenciális egyenletek

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints



$$x^2 + q^{2m} = 2y^p \tag{1}$$

végességi állítás.

Tétel. *Csak véges sok (x, y, m, q, p) megoldása létezik (1)-nek, ahol $\gcd(x, y) = 1, m, x, y \in \mathbb{N}$ és $3 < p, q$ páratlan prímek, úgy, hogy y nem írható fel két egymást követő négyzetszám összegeként.*

- fix $y : x^2 + q^{2m} = 2 \cdot 17^p$, teljes megoldás.

Exponenciális egyenletek

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints



$$x^2 + q^{2m} = 2y^p \tag{1}$$

végességi állítás.

Tétel. *Csak véges sok (x, y, m, q, p) megoldása létezik (1)-nek, ahol $\gcd(x, y) = 1, m, x, y \in \mathbb{N}$ és $3 < p, q$ páratlan prímek, úgy, hogy y nem írható fel két egymást követő négyzetszám összegeként.*

- fix $y : x^2 + q^{2m} = 2 \cdot 17^p$, teljes megoldás.
- fix $q : x^2 + 3^{2m} = 2y^p$, teljes megoldás.

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Példák y két egymást követő négyzetszám összege esetre:

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Példák y két egymást követő négyzetszám összege esetre:

y	p	q
5	5	79
5	7	307
5	13	42641
5	29	1811852719
5	97	2299357537036323025594528471766399
13	7	11003
13	13	13394159
13	101	224803637342655330236336909331037067112119583602184017999
25	11	69049993
25	47	378293055860522027254001604922967
41	31	4010333845016060415260441

Kapcsolódó eredmények

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.

Kapcsolódó eredmények

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.
- Le (2003): $x^2 + p^2 = y^n$, teljes megoldás ($p < 100$).

Kapcsolódó eredmények

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ **Kapcsolódó eredmények**
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.
- Le (2003): $x^2 + p^2 = y^n$, teljes megoldás ($p < 100$).
- Pink (2004): $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$, korlát n -re.

Kapcsolódó eredmények

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ **Kapcsolódó eredmények**
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.
- Le (2003): $x^2 + p^2 = y^n$, teljes megoldás ($p < 100$).
- Pink (2004): $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$, korlát n -re.
- Cohn (1996): $x^2 + 1 = 2y^n$, teljes megoldás.

Kapcsolódó eredmények

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ **Kapcsolódó eredmények**
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.
- Le (2003): $x^2 + p^2 = y^n$, teljes megoldás ($p < 100$).
- Pink (2004): $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$, korlát n -re.
- Cohn (1996): $x^2 + 1 = 2y^n$, teljes megoldás.
- Pink, Tengely (2000): $x^2 + a^2 = 2y^n$, korlátok, teljes megoldás $1 \leq a \leq 1000$ és $3 \leq n \leq 80$ esetén.

Kapcsolódó eredmények

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ **Kapcsolódó eredmények**
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.
- Le (2003): $x^2 + p^2 = y^n$, teljes megoldás ($p < 100$).
- Pink (2004): $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$, korlát n -re.
- Cohn (1996): $x^2 + 1 = 2y^n$, teljes megoldás.
- Pink, Tengely (2000): $x^2 + a^2 = 2y^n$, korlátok, teljes megoldás $1 \leq a \leq 1000$ és $3 \leq n \leq 80$ esetén.
- Tengely (2004): $x^2 + a^2 = 2y^n$, teljes megoldás $3 \leq a \leq 501$, algoritmus.

F. S. Abu Muriefah, F. Luca, S. Siksek, Sz. Tengely

Tétel. *Legyen C pozitív egész ($C \equiv 1 \pmod{4}$ és $C = cd^2$). Tegyük fel, hogy (x, y) megoldása a következő egyenletnek*

$$x^2 + C = 2y^p, \quad x, y \in \mathbb{Z}^+, \quad \gcd(x, y) = 1, \quad (2)$$

ahol $p \geq 5$ prím. Ekkor

- (i) $x = y = C = 1$, vagy
- (ii) p osztója a $\mathbb{Q}(\sqrt{-c})$ ideálosztály számának, vagy
- (iii) $p = 5$ és $(C, x, y) = (9, 79, 5), (125, 19, 3), (125, 183, 7), (2125, 21417, 47)$, vagy
- (iv) $p \mid (q - (-c|q))$, ahol q páratlan prím $q \mid d$ és $q \nmid c$, $(c|q)$ jelöli a Legendre szimbólumot).

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Következmény. Legyenek $q_1, \dots, q_k$ különböző prímek, amelyekre $q_i \equiv 1 \pmod{4}$. Tegyük fel, hogy $(x, y, p, a_1, \dots, a_k)$ megoldása az alábbi diofantikus egyenletnek

$$x^2 + q_1^{a_1} \dots q_k^{a_k} = 2y^p, \text{ ahol}$$

$$x, y \in \mathbb{Z}^+, \quad \gcd(x, y) = 1, \quad a_i \geq 0, \quad p \geq 5 \text{ prím.}$$

Ekkor

- (i) $x = y = 1$ és $a_i = 0$, vagy
- (ii) p osztója a $\mathbb{Q}(\sqrt{-c})$ ideálosztály számának valamilyen négyzetmentes c -re, ahol $c \mid q_1 q_2 \dots q_k$, vagy
- (iii) $p = 5$ és $(\prod q_i^{a_i}, x, y) = (125, 19, 3), (125, 183, 7), (2125, 21417, 47)$, vagy
- (iv) $p \mid (q_i^2 - 1)$ valamilyen i -re.

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Tétel. Az $x^2 + C = 2y^n$ egyenlet x, y relatív prím megoldásai az $n \geq 3$ és $C \equiv 1 \pmod{4}$, $1 \leq C < 100$ feltételek mellett:

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Tétel. Az $x^2 + C = 2y^n$ egyenlet x, y relatív prím megoldásai az $n \geq 3$ és $C \equiv 1 \pmod{4}$, $1 \leq C < 100$ feltételek mellett:

$$\begin{aligned}
 1^2 + 1 &= 2 \cdot 1^n, & 79^2 + 9 &= 2 \cdot 5^5, & 5^2 + 29 &= 2 \cdot 3^3, & 117^2 + 29 &= 2 \cdot 19^3, \\
 993^2 + 29 &= 2 \cdot 79^3, & 11^2 + 41 &= 2 \cdot 3^4, & 69^2 + 41 &= 2 \cdot 7^4, & 171^2 + 41 &= 2 \cdot 11^4, \\
 1^2 + 53 &= 2 \cdot 3^3, & 25^2 + 61 &= 2 \cdot 7^3, & 51^2 + 61 &= 2 \cdot 11^3, & 37^2 + 89 &= 2 \cdot 9^3.
 \end{aligned}$$

Multi-Frey módszer

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

$$2y^p + t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2} z^p = x^2, \tag{3}$$

ahol $(t_1, t_2) \in \{(17, 1), (3, 11)\}$ és $\beta_i < p$.

Ivorra, Kraus (2006): Frey görbék

$$E_1 : \quad Y^2 = X^3 + 2xX^2 + 2y^pX,$$

$$E_2 : \quad Y^2 = X^3 + 2xX^2 + t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2} y^p X.$$

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Az $x^2 + 3^{\alpha_1} 11^{\alpha_2} = 2y^p$ egyenlet esetében $N(E_1)_p = N(E_2)_p = 2^7 \cdot 3 \cdot 11$. A módszer segítségével azt kapjuk, hogy p "kicsi", kivéve a következő párokat:

$(f_1, f_{10}), (f_2, f_{11}), (f_3, f_{16}), (f_4, f_{19}), (f_5, f_{20}),$
 $(f_6, f_7), (f_7, f_6), (f_8, f_9), (f_9, f_8), (f_{10}, f_1),$
 $(f_{11}, f_2), (f_{12}, f_{13}), (f_{13}, f_{12}), (f_{14}, f_{15}), (f_{15}, f_{14}),$
 $(f_{16}, f_3), (f_{17}, f_{18}), (f_{18}, f_{17}), (f_{19}, f_4), (f_{20}, f_5),$

$f_1 \mapsto 4224A1$	$f_2 \mapsto 4224B1$	$f_3 \mapsto 4224C1$	$f_4 \mapsto 4224D1$
$f_5 \mapsto 4224E1$	$f_6 \mapsto 4224F1$	$f_7 \mapsto 4224G1$	$f_8 \mapsto 4224H1$
$f_9 \mapsto 4224I1$	$f_{10} \mapsto 4224J1$	$f_{11} \mapsto 4224K1$	$f_{12} \mapsto 4224L1$
$f_{13} \mapsto 4224M1$	$f_{14} \mapsto 4224N1$	$f_{15} \mapsto 4224O1$	$f_{16} \mapsto 4224P1$
$f_{17} \mapsto 4224Q1$	$f_{18} \mapsto 4224R1$	$f_{19} \mapsto 4224S1$	$f_{20} \mapsto 4224T1$

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Ahol nem kapunk korlátot p -re ott moduló 5,7 és 19 vizsgáljuk 3 kitevőjét.

pár	$\alpha_1 \bmod 4$	$\alpha_1 \bmod 6$	$\alpha_1 \bmod 18$
(f_2, f_{11})	$\{1, 3\}$		$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
(f_3, f_{16})	$\{3\}$		$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
(f_4, f_{19})	$\{1, 3\}$	$\{0, 2, 4\}$	
(f_5, f_{20})	$\{1, 3\}$		$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
(f_6, f_7)	$\{3\}$		$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
(f_8, f_9)	$\{1, 3\}$	$\{0, 2, 4\}$	
(f_{12}, f_{13})	$\{1, 3\}$	$\{0, 2, 4\}$	
(f_{14}, f_{15})	$\{1, 3\}$		$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
(f_{17}, f_{18})	$\{1, 3\}$		$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

Számtani sorozatok

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

L. Hajdu, Sz. Tengely

Tétel. Legyen n prím és $x_1^{l_1}, \dots, x_t^{l_t}, l_i \in \{2, n\}$ egy primitív nem konstans számtani sorozat. Ekkor $t \leq 6$ és ha $t = 6$ akkor

$$(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) = (2, n, n, 2, 2, 2), (2, 2, 2, n, n, 2).$$

Számtani sorozatok

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

L. Hajdu, Sz. Tengely

Tétel. Legyen n prím és $x_1^{l_1}, \dots, x_t^{l_t}, l_i \in \{2, n\}$ egy primitív nem konstans számtani sorozat. Ekkor $t \leq 6$ és ha $t = 6$ akkor

$$(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) = (2, n, n, 2, 2, 2), (2, 2, 2, n, n, 2).$$

Tétel. Legyen $x_1^{l_1}, \dots, x_t^{l_t}, l_i \in \{2, 5\}$ egy primitív nem konstans számtani sorozat. Ekkor $t \leq 4$ és ha $t = 4$ akkor

$$(l_1, l_2, l_3, l_4) = (2, 2, 2, 5), (5, 2, 2, 2).$$

Számtani sorozatok

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

L. Hajdu, Sz. Tengely

Tétel. Legyen n prím és $x_1^{l_1}, \dots, x_t^{l_t}, l_i \in \{2, n\}$ egy primitív nem konstans számtani sorozat. Ekkor $t \leq 6$ és ha $t = 6$ akkor

$$(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) = (2, n, n, 2, 2, 2), (2, 2, 2, n, n, 2).$$

Tétel. Legyen $x_1^{l_1}, \dots, x_t^{l_t}, l_i \in \{2, 5\}$ egy primitív nem konstans számtani sorozat. Ekkor $t \leq 4$ és ha $t = 4$ akkor

$$(l_1, l_2, l_3, l_4) = (2, 2, 2, 5), (5, 2, 2, 2).$$

Tétel. Legyen n prím és $x_1^{l_1}, \dots, x_t^{l_t}, l_i \in \{3, n\}$ egy primitív nem konstans számtani sorozat. Ekkor $t \leq 4$ és ha $t = 4$ akkor

$$(l_1, l_2, l_3, l_4) = (3, 3, n, n), (n, n, 3, 3), (3, n, n, 3), (n, 3, 3, n).$$

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Korábbi eredmények:

- Euler: négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot,

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Korábbi eredmények:

- Euler: négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot,
- Darmon, Merel (1997): $x^n + y^n = 2z^n$,

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Korábbi eredmények:

- Euler: négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot,
- Darmon, Merel (1997): $x^n + y^n = 2z^n$,
- Bennett, Skinner (2004): $x^n + y^n = 2z^2$,

Korábbi eredmények:

- Euler: négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot,
- Darmon, Merel (1997): $x^n + y^n = 2z^n$,
- Bennett, Skinner (2004): $x^n + y^n = 2z^2$,
- Bennett, Vatsal, Yazdani (2004): $x^n + y^n = 2z^3$,

Korábbi eredmények:

- Euler: négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot,
- Darmon, Merel (1997): $x^n + y^n = 2z^n$,
- Bennett, Skinner (2004): $x^n + y^n = 2z^2$,
- Bennett, Vatsal, Yazdani (2004): $x^n + y^n = 2z^3$,
- Hajdu (2004): $x_1^{l_1}, \dots, x_t^{l_t}, 2 \leq l_i \leq L$, ekkor $t < c(L)$,

Korábbi eredmények:

- Euler: négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot,
- Darmon, Merel (1997): $x^n + y^n = 2z^n$,
- Bennett, Skinner (2004): $x^n + y^n = 2z^2$,
- Bennett, Vatsal, Yazdani (2004): $x^n + y^n = 2z^3$,
- Hajdu (2004): $x_1^{l_1}, \dots, x_t^{l_t}, 2 \leq l_i \leq L$, ekkor $t < c(L)$,
- Bruin, Győry, Hajdu, Tengely (2006): $L = 3$ eset megoldása.

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

$$n(n + d) \cdots (n + (k - 1)d) = by^2 \quad (4)$$

Néhány eredmény a témakörből:

- Euler: $b = 1, k = 4,$

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számítási sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

$$n(n + d) \cdots (n + (k - 1)d) = by^2 \quad (4)$$

Néhány eredmény a témakörből:

- Euler: $b = 1, k = 4,$
- Obláth (1950): $b = 1, k = 5,$

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számítási sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

$$n(n + d) \cdots (n + (k - 1)d) = by^2 \quad (4)$$

Néhány eredmény a témakörből:

- Euler: $b = 1, k = 4$,
- Obláth (1950): $b = 1, k = 5$,
- Erdős, Selfridge (1975): $b = d = 1$, tetszőleges hatvány hossz,

$$n(n + d) \cdots (n + (k - 1)d) = by^2 \quad (4)$$

Néhány eredmény a témakörből:

- Euler: $b = 1, k = 4$,
- Obláth (1950): $b = 1, k = 5$,
- Erdős, Selfridge (1975): $b = d = 1$, tetszőleges hatvány hossz,
- Mukhopadhyay és Shorey (2003): $P(b) \leq 3, k = 5$,

$$n(n + d) \cdots (n + (k - 1)d) = by^2 \quad (4)$$

Néhány eredmény a témakörből:

- Euler: $b = 1, k = 4$,
- Obláth (1950): $b = 1, k = 5$,
- Erdős, Selfridge (1975): $b = d = 1$, tetszőleges hatvány hossz,
- Mukhopadhyay és Shorey (2003): $P(b) \leq 3, k = 5$,
- Bennett, Bruin, Győry és Hajdu (2006): $b = 1$ és $6 \leq k \leq 11$.

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számítási sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

$$n + id = a_i x_i^2 \text{ ahol } 0 \leq i < k. \quad (5)$$

Tétel (Hirata-Kohno, Laishram, Shorey, Tijdeman). *Legyen $d > 1$, $P(b) = k$ és $7 \leq k \leq 100$ ekkor a fenti diofantikus egyenletre teljesül, hogy $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ -ra a következő lehetőségek vannak:*

$$\begin{aligned} k = 7 : & \quad (2, 3, 1, 5, 6, 7, 2), (3, 1, 5, 6, 7, 2, 1), (1, 5, 6, 7, 2, 1, 10), \\ k = 13 : & \quad (3, 1, 5, 6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15), \\ & \quad (1, 5, 6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15, 1), \\ k = 19 : & \quad (1, 5, 6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15, 1, 17, 2, 19, 5, 21, 22), \\ k = 23 : & \quad (5, 6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15, 1, 17, 2, 19, 5, 21, 22, 23, 6, 1, 26, 3), \\ & \quad (6, 7, 2, 1, 10, 11, 3, 13, 14, 15, 1, 17, 2, 19, 5, 21, 22, 23, 6, 1, 26, 3, 7). \end{aligned}$$

A kimaradó eseteket és a $k = 5, P(b) = 5$ esetet megoldottam.

Elliptikus Chabauty módszer

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Példa: $(a_0, a_1, \dots, a_6) = (2, 3, 1, 5, 6, 7, 2)$. Ekkor

$$x_4^2 + x_0^2 = 2x_1^2,$$

$$9x_4^2 + x_0^2 = 10x_3^2,$$

$$9x_4^2 - x_0^2 = 2x_6^2.$$

Elliptikus Chabauty módszer

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Példa: $(a_0, a_1, \dots, a_6) = (2, 3, 1, 5, 6, 7, 2)$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_4^2 + x_0^2 &= 2x_1^2, \\ 9x_4^2 + x_0^2 &= 10x_3^2, \\ 9x_4^2 - x_0^2 &= 2x_6^2. \end{aligned}$$

Probléma: meghatározni azon (X, Y) pontokat, amelyekre $X \in \mathbb{Q}$ és $Y \in \mathbb{Q}(i)$.

$$C_\delta : \quad 2\delta(X + i)(3X + i)(9X^2 - 1) = Y^2, \quad (6)$$

ahol $\delta \in \{-4 \pm 2i, -2 \pm 4i, 2 \pm 4i, 4 \pm 2i\}$.

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

δ	görbe	x_4/x_0
$2 - 4i$	$y^2 = x^3 + (-12i - 9)x + (-572i - 104)$	$\{-1, \pm 1/3\}$
$2 + 4i$	$y^2 = x^3 + (12i - 9)x + (-572i + 104)$	$\{1, \pm 1/3\}$
$4 - 2i$	$y^2 = x^3 + (-12i + 9)x + (-104i - 572)$	$\{\pm 1/3\}$
$4 + 2i$	$y^2 = x^3 + (12i + 9)x + (-104i + 572)$	$\{\pm 1/3\}$

Azaz $x_4/x_0 \in \{\pm 1, \pm 1/3\}$. Ezekből adódik: $n = 2, d = 1$.

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

S. Laishram, T. N. Shorey és Sz. Tengely

$$P(x) = \max_p \{p \mid x\},$$

$$\omega(x) = \#\{p : p \mid x, p \text{ prím.}\}$$

Legyen $k \geq 4$, $t \geq k - 2$ és $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_t$, $0 \leq \gamma_i < k$ egészek és $\psi = k - t$.

$$(n + \gamma_1 d) \cdots (n + \gamma_t d) = by^2,$$

ahol $P(b) \leq k$.

Tétel. *Legyen $\psi = 1$, $k \geq 7$ és $d \nmid n$. Ekkor a fenti egyenletnek nincs megoldása $\omega(d) = 1$ esetében.*

Tétel. *Legyen $\psi = 0$, $k \geq 11$ és $d \nmid n$. Ekkor a fenti egyenletnek nincs megoldása $\omega(d) = 1$ esetében.*

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

L. Hajdu, R. Tijdeman és Sz. Tengely

$$n(n + d) \dots (n + (k - 1)d) = by^3 \quad (7)$$

ahol $k \geq 3, d > 0, (n, d) = 1, P(b) \leq k, y \neq 0$.

Tétel. *Tegyük fel, hogy (n, d, k, b, y) megoldása (7)-nek $k < 32$ és $P(b) < k$ ha $k = 3$ vagy $k \geq 13$ feltételekkel. Ekkor (n, d, k) a következő lehet:*

$(n, 1, k)$ ahol $-30 \leq n \leq -4$ vagy $1 \leq n \leq 5$,

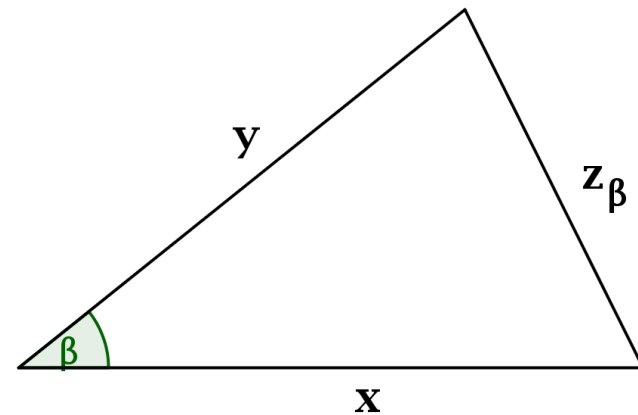
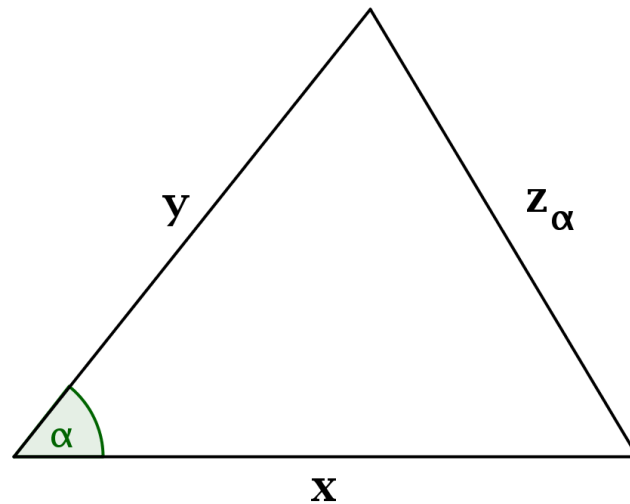
$(n, 2, k)$ ahol $-29 \leq n \leq -3$,

$(-10, 3, 7), (-8, 3, 7), (-8, 3, 5), (-4, 3, 5), (-4, 3, 3), (-2, 3, 3),$

$(-9, 5, 4), (-6, 5, 4), (-16, 7, 5), (-12, 7, 5).$

Probléma háromszögekre

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számítási sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints



Legyen $0 < \alpha, \beta < \pi$. Olyan háromszögeket keresünk, amelyekre $x, y \in \mathbb{N}$ és $z_\alpha, z_\beta \in \mathbb{Q}(\theta)$.

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Koszinusz tételből:

$$x^2 - 2\varphi_1 xy + y^2 = z_\alpha^2,$$

$$x^2 - 2\varphi_2 xy + y^2 = z_\beta^2,$$

ahol $\varphi_1 = \cos(\alpha)$ és $\varphi_2 = \cos(\beta)$.

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Koszinusz tételből:

$$x^2 - 2\varphi_1 xy + y^2 = z_\alpha^2,$$

$$x^2 - 2\varphi_2 xy + y^2 = z_\beta^2,$$

ahol $\varphi_1 = \cos(\alpha)$ és $\varphi_2 = \cos(\beta)$. Összeszorozva az egyenleteket:

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta} : X^4 - 2(\varphi_1 + \varphi_2)X^3 + (4\varphi_1\varphi_2 + 2)X^2 - 2(\varphi_1 + \varphi_2)X + 1 = Y^2.$$

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Bertalan Zoltán: megoldások meghatározása
 $(\alpha, \beta) = (\pi/3, \pi/2)$, $(\alpha, \beta) = (\pi/2, 2\pi/3)$ és $(\alpha, \beta) = (\pi/3, 2\pi/3)$ esetekben. Első két esetben 1 rangú elliptikus görbe (192A1):

x	y	$z_{\pi/3}$	$z_{\pi/2}$
8	15	13	17
1768	2415	2993	3637
10130640	8109409	9286489	12976609
498993199440	136318711969	517278459169	579309170089

Harmadik esetben Mordell egy eredménye alapján nincs megoldás.

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

Görbék $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ felett.

(α, β)	$\mathcal{E}_{\alpha, \beta}$	Rank	X	p
$(\pi/6, \pi/2)$	$v^2 = u^3 - u^2 - 2u$	1	$\{0, \pm 1\}$	5
$(\pi/6, \pi/3)$	$v^2 = u^3 + (\sqrt{3} - 1)u^2 - u + (-\sqrt{3} + 1)$	1	$\{0\}$	7
$(\pi/5, \pi/2)$	$v^2 = u^3 - u^2 + 1/2(\sqrt{5} - 7)u + 1/2(\sqrt{5} - 3)$	1	$\{0\}$	13
$(\pi/5, \pi/3)$	$v^2 = u^3 + 1/2(\sqrt{5} - 1)u^2 + 1/2(\sqrt{5} - 5)u - 1$	1	$\{0, 1\}$	13
$(\pi/5, 2\pi/5)$	$v^2 = u^3 - 2u - 1$	1	$\{0\}$	7
$(\pi/5, 4\pi/5)$	$v^2 = u^3 + 1/2(-\sqrt{5} + 1)u^2 - 4u + (2\sqrt{5} - 2)$	0	$\{0\}$	-

Amikor $(\alpha, \beta) = (\pi/5, \pi/3)$ a következő megoldást kapjuk:

$$(x, y, z_\alpha) = \left(t, t, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} t \right) \text{ és } (x, y, z_\beta) = (t, t, t),$$

ahol $t \in \mathbb{N}$.

IntegralRungePoints

- ❖ Eredmények
- ❖ Exponenciális egyenletek
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Multi-Frey módszer
- ❖ Számtani sorozatok
- ❖ Elliptikus Chabauty módszer
- ❖ Probléma háromszögekre
- ❖ IntegralRungePoints

F. Beukers, Sz. Tengely: algoritmus Runge típusú egyenletek megoldására, amelyben nem kell algebrai együttthatós Puiseux kifejtéseket használni.

```
tengely@castor ~ $ mc
tengely@castor magma1 $ ./magma
Magma V2.14-2      Fri Nov  9 2007 10:45:17 on castor   [Seed = 977883484]
Type ? for help.  Type <Ctrl>-D to quit.
> load "/home/tengely/magma/IntegralRungePoints.m";
Loading "/home/tengely/magma/IntegralRungePoints.m"
> P<x,y>:=PolynomialRing(Integers(),2);
> f:=y^4+2*y^3-9*x^2*y^2+2*x*y-15*x-7;
> RungeSolve(f);
true -9*x^2*y^2 + y^4
<-1, -1> 4
Reduction is OK at :  -1/18*X[1]^2 + X[1] + X[2] - 3
[ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -27 ]
Vanishing function :  -27*x^3 + y^3
Integral solutions of Res_y(F(x,y),P(x,y))=0 :  []
Special interval :  <0, 1>
Reduction is OK at :  5/18*X[1]^2 + X[1] + X[2] + 3
[ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 27 ]
Vanishing function :  27*x^3 + y^3
Integral solutions of Res_y(F(x,y),P(x,y))=0 :  []
Special interval :  <-1, 0>
Reduction is OK at :  10/27*X[1]^4*X[2] + 7/9*X[1]^4 + 5/3*X[1]^3 - 2/9*X[1]^2*X[2] + X[2]^2
[ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -9/2, 0, 0 ]
Vanishing function :  -9*x*y^2 + 2*y
Integral solutions of Res_y(F(x,y),P(x,y))=0 :  []
Special interval :  <-1, 1>
Solutions in the special interval [ -1, 1 ]
:  [ <-1, -4>, <-1, -1>, <-1, 1>, <-1, 2> ]
-1 1 [ <-1, -4>, <-1, -1>, <-1, 1>, <-1, 2> ]
>
```