Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

Szakdolgozat

Sajátértékek és sajátvektorok

készítette:

Seres Lilla Anna

témavezető: Dr. Tengely Szabolcs

Debrecen, 2014

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék **i**

1 Lineáris algebrai alapfogalmak **5**

2 Bináris rekurzió **11**

3 Inhomogén rekurzív egyenletrenszer **15**

4 Lineáris differenciál egyenletrenszer **19**

5 Sage implementáció **23**

Irodalomjegyzék **27**

Köszönetnyilvánítás

Ez úton szeretném meg köszönni családomnak, hogy hozzájárultak a tanulmányaim sikeres befejezéséhez türelmükkel és támogatásukkal.

Bevezető

A szakdolgozat a sajátértékek, sajátvektorok kiszámítását mutatja be, különböző típusokon keresztül.

Az elméleti háttérhez Matthews [1] könyvét használtam fel, amely a lineáris algebra alapfogalmait mutatja be. Minden fejezetben az adott probléma elméleti bemutatása mellett gyakorlati példán illusztráljuk a módszer működését.

Az első fejezet a lineáris algebrai alapfogalmakat tartalmazza. Ebben a fejezetben két példa alapján ismertetem a sajátértékek, sajátvektorok kiszámítását adott $n \times n$-es mátrix segítségével és meghatározom a mátrix n-edik hatványát.

A második fejezetben a bináris rekurzióról ejtek szót, melynek általános alakja: $a_n = ua_{n-1} + va_{n-2}$, ha $n \geq 2$, ahol adottak a a_0, a_1, u, v elemek. Ebben a részben az a_n értékét határozom meg.

A harmadik fejezetben az inhomogén rekurzív egyenletrendszer általános alakjára keresek megoldást, a megadott elemek segítségével. A két adott egyenletrendszer: $ax_n + by_n + c = x_{n+1}$ és $dx_n + ey_n + f = y_{n+1}$, ahol adottak a a, b, c, d, e, f, x_0 és y_0 értékek.

A negyedik fejezetben a lineáris differenciál egyenletrendszer szerepel. Általános alakját határozom meg, amely : $\frac{dx}{dt} = ax + by$ és $\frac{dy}{dt} = cx + dy$ egyenletek, ahol $x(0), y(0), a, b, c,$ és d értékek adottak.

Az ötödik fejezet a Sage implementáció, ahol interaktív applikációt készítettem az előző fejezetekben szereplő példákhoz a Sage [4] online verziójával. Ebben a részben a Sage lineáris algebrai eljárásait a [3] internetes oldalt felhasználva, még a programozási eszközöket a [2] internetes oldalt követve készítettem el a Sage applikációkat.

1. Lineáris algebrai alapfogalmak

1.1. Definíció. A négyzetes mátrix egy olyan mátrix, melyben a sorok és oszlopok száma megegyezik.

1.2. Definíció. Legyen A komplex négyzetes mátrix. A $\lambda \in \mathbb{C}$ számot, $X \neq 0$ oszlopvektort az A mátrix sajátértékének, sajátvektorának nevezzük,akkor ha teljesül, hogy $AX = \lambda X$. Az X-et sajátvektornak nevezzük megfelelő λ sajátértékre.

1.3. Definíció. A $det(A - XE) = 0$ egyenletet az A mátrix karakterisztikus egyenletének, a $det(A - XE)$ polinomot az A mátrix karakterisztikus polinomjának nevezzük. Az A mátrix karakterisztikus polinomját gyakran jelölik $ch_A(\lambda)$ ként. Ennélfogva az A sajátértékei a karakterisztikus polinomjának a gyökei.

1.4. Definíció. Egységmátrixnak nevezzük az olyan $n \times n$-es négyzetes mátrix, melynek főátlójában 1-ek, a többi helyen 0-k szerepelnek. Az egységmátrixot gyakran I_n-nel, E_n-vel vagy ha n adott, akkor I-vel vagy E-vel jelölik

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Definíció. A determináns egy $n \times n$ típusú mátrixhoz rendelt szám

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$D = |A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,\dots,i_n)} (-1)^{I(i_1,\dots,i_n)} \alpha_{1i_1} \cdots \alpha_{ni_n}$$

n-ed rendű determináns. Ahol $I(i_1, \dots, i_n)$ jelöli az $(i_1, ..., i_n)$ permutációban lévő inverziók számát.

A determináns néhány tulajdonsága:

1. Ha egy sor minden eleme nulla, akkor a determináns érteke is nulla.
2. Ha két sort megcserélünk a determináns előjelet vált.
3. Ha $A_i = \lambda A_j$, akkor a determináns nulla.
4. Ha két sor megegyezik akkor $D = 0$.

Legyen A 2×2-es mátrix, λ_1, λ_2 egymástól különböző sajátértékei A-nak, valamint X_1, X_2 a megfelelő sajátvektorai. Legyen P egy mátrix, melynek oszlopai rendre X_1, X_2. Akkor P invertálható és

$$P^{(-1)}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ez alapján A^n kiszámítására alkalmazzuk a következő eljárást:

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Ekkor a $(P^{-1}AP)$-ből n db van, és az egymás mellett álló P^{-1} és P szorzata az egységvektort adja így ezek kiesnek. Ebből következik, hogy:

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Kisebb rendezés után az A^n az alábbi módon kapjuk:

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Példa: legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix.

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}.$$

$\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X_1 + X_2 = 0}$$

$$X_2 = s \Longrightarrow X_1 = -s$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -2$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X_1 - 2X_2 = 0}$$

$$X_2 = t \Longrightarrow X_1 = 2t$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Így a P mátrix:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

inverze pedig:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Majd összeszorozzuk a mátrixokat így egy diagonális mátrixot kapunk:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Most kiszámoljuk A^n-t:

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1^n) + \frac{2}{3}(-2^n) & -\frac{2}{3}(1^n) + \frac{2}{3}(-2^n) \\ -\frac{1}{3}(1^n) + \frac{1}{3}(-2^n) & \frac{2}{3}(1^n) + \frac{1}{3}(-2^n) \end{pmatrix}.$$

Legyen A $n \times n$-es mátrix, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ egymástól különböző sajátértékei A-nak, valamint $X_1, \ldots, X_n$ a megfelelő sajátvektorai. Legyen P egy mátrix, melynek oszlopai rendre $X_1, \ldots, X_n$. Akkor P invertálható és

$$P^{(-1)}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Példa: legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ mátrix.

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6)$$

$$-(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6) = (-1-\lambda)(-2-\lambda)(-3-\lambda) = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}.$$

A sajátvektorokat az előző példához hasonlóan számolhatjuk:

1. $\lambda_1 = -1$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda_2 = -2$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\lambda_3 = -3$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Így a P mátrix:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

inverze pedig:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Majd összeszorozzuk a mátrixokat így egy diagonális mátrixot kapunk:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kiszámoljuk A^n-t:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 1^n + 3^n & (-1)^n - 3^n \\ 1^n - 2^n & (-1)^n + 2^n + 3^n & 1^n - 2(2^n) - 3^n \\ 1^n - 2^n & (-1)^n + 2^n & 1^n - 2(2^n) \end{pmatrix}.$$

2. Bináris rekurzió

A rekurzió általános alakja:

az a_0, a_1 adott elemek, valamint az u és v is adott

$$a_n = ua_{n-1} + va_{n-2}, \text{ ha } n \geq 2.$$

A rekurzió átírható mátrixos alakba:

$$\begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az A mátrix :

$$A = \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megnézzük, hogy az A mátrix diagonális mátrix-e. Ha az akkor folytathatjuk a feladatot. Az

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

felírható az A mátrix segítségével, az alábbi alakban:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Most az adott kezdőértékből álló vektorral és az A mátrixszal fejezzük ki az $n = 1, n = 2, \ldots, n = n$ esetekben:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A \left(A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \right) = A^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Ez így megy tovább egészen:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(n-1) & a_{12}(n-1) \\ a_{21}(n-1) & a_{22}(n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{pmatrix}.$$

A szorzás elvégzése után megkapjuk az a_n értékét:

$$a_n = a_{11}(n-1)a_1 + a_{12}(n-1)a_0.$$

Példa: az adott elemeket a következőképpen válaszuk:$u = 3, v = -2, a_1 = 4, a_0 = 5$. Tehát az A mátrix :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megnézzük, hogy az A mátrix diagonális lesz-e:

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

$\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X_1 - X_2 = 0}$$

$$X_2 = s \Longrightarrow X_1 = s$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -2$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X_1 - 2X_2 = 0}$$

$$X_2 = t \Longrightarrow X_1 = 2t$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Így a P mátrix:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

inverze pedig:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Majd összeszorozzuk a mátrixokat így egy diagonális mátrixot kapunk:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Most kiszámoljuk A^n-t, valamint A^{n-1}-t:

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -(1)^n + 2(2^n) & 2(1^n) - 2(2^n) \\ -(1)^n + 2^n & 2(1^n) - 2^n \end{pmatrix}.$$

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} -(1)^{n-1} + 2(2^{n-1}) & 2(1^{n-1}) - 2(2^{n-1}) \\ -(1)^{n-1} + 2^{n-1} & 2(1^{n-1}) - 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ha elkezdjük behelyettesítjük az a_0, a_1 értékeket és ezeket megszorozzuk az A megfelelő hatványával akkor megkaphatjuk az a_i-et, ahol $i = 2, \ldots, n$. Például:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = 2.$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1)^{n-1} + 2(2^{n-1}) & 2(1^{n-1}) - 2(2^{n-1}) \\ -(1)^{n-1} + 2^{n-1} & 2(1^{n-1}) - 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_n = (-(1)^{n-1} + 2(2^{n-1}))4 + (2(1^{n-1}) - 2(2^{n-1}))5 = 4(-(1)^{n-1} + 2(2^{n-1})) + 10(1^{n-1} - 2^{n-1}).$$

3. Inhomogén rekurzív egyenletrenszer

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer általános alakja: az x_0 és y_0 adott kezdőértékek

$$\begin{aligned} ax_n + by_n + c &= x_{n+1} \\ dx_n + ey_n + f &= y_{n+1}. \end{aligned}$$

Ekkor az előző egyenletekből egy mátrixot és három vektort kapunk, amelyeket az alábbi módon jelölünk:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}, X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Az A mátrixnál megvizsgáljuk azt hogy diagonális lesz-e. Ha igen folytatjuk a feladatot. A két egyenletet a kapott vektorokkal és mátrixszal leírhatjuk egy egyenletbe:

$$X_{n+1} = AX_n + B.$$

A fenti egyenletbe beírjuk a kapott vektorokat és mátrixot:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_n + by_n \\ dx_n + ey_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_n + by_n + c \\ dx_n + ey_n + f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ez alapján:

$$X_1 = AX_0 + B,$$

$$X_2 = AX_1 + B = A(AX_0 + B) + B = A^2X_0 + AB + B,$$

$$X_3 = AX_2 + B = A(A^2X_0 + AB + B) + B = A^3X_0 + A^2B + AB + B.$$

Itt:

$$A^2B + AB + B = (A^2 + A + I_2)B.$$

Ez alapján kapunk egy logikai menetet($(\sum_{k=0}^{n} A^k)B$) és így megtudjuk adni az X_n-t:

$$X_n = A^n X_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \ldots + A + I_2)B.$$

Ahol A^n az alábbi módon nézz ki:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{pmatrix}.$$

Az X_n-re vonatkozó formula indukcióval igazolható,tegyük fel, hogy $X_n = A^n X_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \ldots + A + I_2)B$ teljesül. Most megmutathatjuk, hogy $n+1$-re is teljesül. Az X_{n+1} egyenlő $AX_n + B$-vel, így az X_n helyére beírhatjuk a $A^n X_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \ldots + A + I_2)B$ kifejezést. Majd elvégezzük a műveleteket és megkapjuk az összefüggést:

$$X_{n+1} = A^{n+1} X_0 + (\sum_{k=0}^{n} A^k)B.$$

Példa: legyen adottak az alábbi értékek:$a = -2, b = 3, d = -1, e = 2, c = 2, f = -2, x_0 = 3,$ és $y_0 = 2$. Ekkor:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -2x_n + 3y_n + 2 \\ y_{n+1} &= -x_n + 2y_n - 1. \end{aligned}$$

Ekkor az

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Megnézzük, hogy az A mátrix diagonális lesz-e:

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}.$$

$\lambda_1 = -1$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{-X_1 + X_2 = 0}$$

$$X_2 = s \Longrightarrow X_1 = s$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -1$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{-X_1 + 3X_2 = 0}$$

$$X_2 = t \Longrightarrow X_1 = 3t$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Így a P mátrix:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

inverze pedig:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Majd összeszorozzuk a mátrixokat így egy diagonális mátrixot kapunk:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Most kiszámoljuk A^n-t:

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}1^n + \frac{3}{2}(-1)^n & \frac{3}{2}1^n - \frac{3}{2}(-1)^n \\ -\frac{1}{2}1^n - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{3}{2}1^n + \frac{1}{2}(-1)^n \end{pmatrix},$$

$$A^n = 1^n U + (-1)^n V.$$

Ahol U és V a következőképpen alakul:

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix diagonális lesz így folytathatjuk a feladatot.

$$X_1 = AX_0 + B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X_n = A^n X_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \ldots + A + I_2)B$$

$$X_n = (1^n U + (-1)^n V) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(nU + \left(\frac{(-1)^{n-1} - 1)}{2} \right) V \right) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}(-1)^n - 4n - \frac{9}{2} \\ \frac{-3}{2}(-1)^n - 4n + \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Lineáris differenciál egyenletrenszer

Általános alakja:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy,$$

ahol adottak az $x(0), y(0), a, b, c,$ és d értékek. Itt az A és X mátrixok az alábbi módon alakulnak:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}.$$

Az X deriváltját megkaphatjuk az alábbi kifejezésből:

$$X' = AX.$$

Most ellenőrizzük, hogy az A mátrix diagonális lesz-e. Először kiszámoljuk a sajátértékeket, majd a sajátvektorokat a bemutatott módon. Az $X = PY \Rightarrow P^{-1}X = Y$, itt az Y az alábbi módon néz ki: $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Ez alapján teljesül a következő :

$$X' = PY' = AX = A(PY), \text{ valamint } Y' = P^{-1}AP = X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Y.$$

Ekkor $x_1' = \lambda_1 x_1$ és $y_1' = \lambda_2 y_1$. Olyan függvényeket kell kapnunk, melyekre igaz hogy $f' = \lambda_1 f$.A konstans nulla függvényre triviális. Így a t=0:

$$x_1 = x_1(0)e^{\lambda_1 t} \text{ és } y_1 = y_1(0)e^{\lambda_2 t}.$$

Most pedig kiszámoljuk Y:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

Most pedig vissza helyettesítem a kapott értékeket az $x_1 = x_1(0)e^{\lambda_1 t}$ és $y_1 = y_1(0)e^{\lambda_2 t}$ helyre majd ezt újra behelyettesítem az x illetve y helyére.

Példa:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + 4y. \end{aligned}$$

Ekkor az A mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Legyen az $x = 3$ és $y = -2$, mikor a $t = 0$. Megnézzük, hogy az A mátrix diagonális lesz-e:

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}.$$

$\lambda_1 = 2$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X_1 + X_2 = 0}$$

$$X_2 = s \Longrightarrow X_1 = -s$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{2X_1 + X_2 = 0}$$

$$X_2 = -2t \Longrightarrow X_1 = t$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Így a P mátrix:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

inverze pedig:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Majd összeszorozzuk a mátrixokat így egy diagonális mátrixot kapunk:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az X mátrix változóinak meghatározásához a következő képlet alkalmazható:

$$X = PY, \text{ ahol } Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x &= -x_1 + y_1 \\ y &= x_1 - 2y_1. \end{aligned}$$

Továbbá az x' és y' deriváltja:

$$x' = 2x_1, \text{ és } y' = 3y_1.$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(0)e^{2t} \\ y_1 &= y_1(0)e^{3t}. \end{aligned}$$

Most az $X = PY$ átrendezésével kiszámíthatjuk az Y értékét:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A kapott értéket behelyettesítjük:

$$x_1 = -4e^{2t}$$
$$y_1 = -e^{3t}$$

$$x = 4e^{2t} - e^{3t}$$
$$y = -4e^{2t} + 2e^{3t}.$$

5. Sage implementáció

Ez a fejezet a bemutatott példák kiszámításához használt programcsomaghoz tartozó kódokat tartalmazza, a programcsomag a Sage [4], amelynek interneten ingyenesen elérhető változatához íródtak a kódok.

Négy interaktív applikációt tartalmaz ez a rész, amelyben megváltoztathatóak az adott kezdőértékek. A megváltoztatott kezdőértékeket a kód újraszámolja és kiírja a megoldás részleteit.

Mátrix n-edik hatványa

```
html('<h3>Adott mátrix n-edik hatványának meghatározása</h3>')
@interact
def _(A=('matrix', matrix(SR,2,2,[-1,-2,-1,0]))):
    html('A rekurzióhoz tartozó $A$ mátrix: $%s$'%latex(A))
    D,P=A.eigenmatrix_right()
    html('Az $A$ mátrix sajátértékei: $%s$ és $%s$'%(latex(D[0,0]),latex(D[1,1])))
    html('sajátérték: $%s$, hozzá tartozó sajátvektor: $%s$'%(latex(D[0,0]),latex(P.column(0))))
    html('sajátérték: $%s$, hozzá tartozó sajátvektor: $%s$'%(latex(D[1,1]),latex(P.column(1))))
    html('A sajátvektorokból álló $P$ mátrix: $%s$'%latex(P))
    html('$P$ inverze: $%s$'%latex(P.inverse()))
    html('Ekkor a $P^{-1}AP$ mátrix diagonális: $%s$'%latex((P^-1*A*P).factor()))
    html('Innen $A^n$ zárt alakja könnyen meghatározható: $A^n=PD^nP^{-1}$')
    n=var('n')
    An=P*matrix(SR,[[D[0,0]^n,0],[0,D[1,1]^n]])*P.inverse()
    html('Az $A$ mátrix $n$-edik hatványa:$%s$'%latex(An.factor()))
```

Adott mátrix n-edik hatványának meghatározása

A

-1	-2
-1	0

A rekurzióhoz tartozó A mátrix: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Az A mátrix sajátértékei: 1 és -2

sajátérték: 1, hozzá tartozó sajátvektor: $(1, -1)$

sajátérték: -2, hozzá tartozó sajátvektor: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

A sajátvektorokból álló P mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

P inverze: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Ekkor a $P^{-1}AP$ mátrix diagonális: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Innen A^n zárt alakja könnyen meghatározható: $A^n = PD^nP^{-1}$

Az A mátrix n-edik hatványa: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\,(-2)^{n+1} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\,(-2)^n - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\,(-2)^n - \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\,(-2)^n + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Bináris rekurzió

```
html('<h3>Bináris rekurzió zárt alakjának meghatározása</h3>')
html('Adott az <p>$a_n=ua_{n-1}+va_{n-2}$</p> rekurzív sorozat')
html('$a_0,a_1,u,v$ kezdőértékekkel.')
@interact
def _(a0=('a0',5),a1=('a1',4),u=('u',3),v=('v',-2)):
    html('Meghatározzuk a sorozat zárt alakját lineáris algebrai módszerekkel.')
    A=matrix(SR, [[u,v],[1,0]])
    html('A rekurzióhoz tartozó $A$ mátrix: $%s$'%latex(A))
    M=vector(SR,2,[a1,a0])
    D,P=A.eigenmatrix_right()
    html('Az $A$ mátrix sajátértékei: $%s$ és $%s$'%(latex(D[0,0]),latex(D[1,1])))
    html('sajátérték: $%s$, hozzá tartozó sajátvektor: $%s$'%(latex(D[0,0]),latex(P.column(0))))
    html('sajátérték: $%s$, hozzá tartozó sajátvektor: $%s$'%(latex(D[1,1]),latex(P.column(1))))
    html('A sajátvektorokból álló $P$ mátrix: $%s$'%latex(P))
    html('$P$ inverze: $%s$'%latex(P.inverse()))
    html('Ekkor a $P^{-1}AP$ mátrix diagonális: $%s$'%latex((P^-1*A*P).factor()))
    html('Innen $A^n$ zárt alakja könnyen meghatározható: $A^n=PD^nP^{-1}$')
    n=var('n')
    An=P*matrix(SR,[[D[0,0]^n,0],[0,D[1,1]^n]])*P.inverse()
    html('Az $A$ mátrix $n$-edik hatványa:$%s$'%latex(An.factor()))
    html(r'Az $A^n\left(\begin{array}{c}a_1\\a_0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}a_{n+1}\\a_n\end{array}\right)$
összefüggés alapján adódik a formula az $a_n$ sorozatra:')
    T=expand(An*M).simplify()
    html('<h4>$a_n=%s$</h4>'%latex(T[1].simplify_full()))
```

Bináris rekurzió zárt alakjának meghatározása

Adott az

$a_n = ua_{n-1} + va_{n-2}$

rekurzív sorozat a_0, a_1, u, v kezdőértékekkel.

a0 5

a1 4

u 3

v -2

Meghatározzuk a sorozat zárt alakját lineáris algebrai módszerekkel.

A rekurzióhoz tartozó A mátrix: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Az A mátrix sajátértékei: 1 és 2
sajátérték: 1, hozzá tartozó sajátvektor: $(1, 1)$

sajátérték: 2, hozzá tartozó sajátvektor: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

A sajátvektorokból álló P mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

P inverze: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Ekkor a $P^{-1}AP$ mátrix diagonális: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Innen A^n zárt alakja könnyen meghatározható: $A^n = PD^nP^{-1}$

Az A mátrix n-edik hatványa: $\begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2\,2^n + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$

Az $A^n\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ összefüggés alapján adódik a formula az a_n sorozatra:

$a_n = -2^n + 6$

Inhomogén rekurzív egyenletrendszer

```
html('<h3>Inhomogén rekurzió zárt alakjának meghatározása</h3>')
html('<p>$x_{n+1}=ax_n+by_n+c$</p>')
html('<p>$y_{n+1}=dx_n+ey_n+f$</p>')
html('adott $x_0,y_0$ kezdőértékek mellett.')
@interact
def _(a=('a',-2),b=('b',3),c=('c',2),d=('d',-1),e=('e',2), f=('f',-2),x0=('x0',3),y0=('y0',2)):
    A=matrix(SR, [[a,b],[d,e]])
    html('Az $A$ mátrix: $%s$'%latex(A))
    B=vector(SR,2,[c,f])
    html('A $B$ vektor: $%s$'%latex(B))
    X0=vector(SR,2,[x0,y0])
    html('Az $X_0$ vektor: $%s$'%latex(X0))
    D,P=A.eigenmatrix_right()
    html('Az $A$ mátrix sajátértékei: $%s$ és $%s$'%(latex(D[0,0]),latex(D[1,1])))
    html('sajátérték: $%s$, hozzá tartozó sajátvektor: $%s$'%(latex(D[0,0]),latex(P.column(0))))
    html('sajátérték: $%s$, hozzá tartozó sajátvektor: $%s$'%(latex(D[1,1]),latex(P.column(1))))
    html('A sajátvektorokból álló $P$ mátrix: $%s$'%latex(P))
    html('$P$ inverze: $%s$'%latex(P.inverse()))
    html('Ekkor a $P^{-1}AP$ mátrix diagonális: $%s$'%latex((P^-1*A*P).factor()))
    html('Innen $A^n$ zárt alakja könnyen meghatározható: $A^n=PD^nP^{-1}$')
    n=var('n')
    An=P*matrix(SR,[[D[0,0]^n,0],[0,D[1,1]^n]])*P.inverse()
    html('Az $A$ mátrix $n$-edik hatványa:$%s$'%latex(An.factor()))
    html(r'Az $\left(\begin{array}{c}x_n\\y_n\end{array}\right)=A^n\left(\begin{array}{c}x_0\\y_0\end{array}\right)+(A^{n-
1}+A^{n-2}+\ldots+A+E)B$ összefüggés alapján adódik a formula $x_n$-re és $y_n$-re:')
    k=var('k')
    sumAn=matrix(SR,[[sum(An(n=k)[0,0],k,0,n-1),sum(An(n=k)[0,1],k,0,n-1)],[sum(An(n=k)[1,0],k,0,n-1),sum(An(n=k)[1,1],k,0,n-
1)]])
    XY=expand(An*X0).simplify()+expand(sumAn*B).simplify()
    html('<h4>$x_n=%s$</h4>'%latex(XY[0].simplify_full()))
    html('<h4>$y_n=%s$</h4>'%latex(XY[1].simplify_full()))
```

Inhomogén rekurzió zárt alakjának meghatározása

$x_{n+1}=ax_n+by_n+c$

$y_{n+1}=dx_n+ey_n+f$

adott x_0,y_0 kezdőértékek mellett.

a -2
b 3
c 2
d -1
e 2
f -2
x0 3
y0 2

Az A mátrix: $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
A B vektor: $(2, -2)$
Az X_0 vektor: $(3, 2)$
Az A mátrix sajátértékei: -1 és 1
sajátérték: -1, hozzá tartozó sajátvektor: $\left(1, \frac{1}{3}\right)$
sajátérték: 1, hozzá tartozó sajátvektor: $(1, 1)$
A sajátvektorokból álló P mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$
P inverze: $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
Ekkor a $P^{-1}AP$ mátrix diagonális: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Innen A^n zárt alakja könnyen meghatározható: $A^n=PD^nP^{-1}$
Az A mátrix n-edik hatványa: $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,(-1)^n-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\,(-1)^n+\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}\,(-1)^n-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\,(-1)^n+\frac{3}{2} \end{pmatrix}$
Az $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+(A^{n-1}+A^{n-2}+\ldots+A+E)B$ összefüggés alapján adódik a formula x_n-re és y_n-re:

$x_n=-\frac{3}{2}\,(-1)^n-4\,n+\frac{9}{2}$

$y_n=-\frac{1}{2}\,(-1)^n-4\,n+\frac{5}{2}$

Lineáris differenciálegyenlet rendszer

```
html('<h3>Lineáris differenciálegyenletrendszer megoldása</h3>')
html('Az $x(t)$ és $y(t)$ függvényekre megoldjuk a következő egyenletrendszert:')
html(r'<p>$\frac{dx}{dt}=ax+by$</p>')
html(r'<p>$\frac{dy}{dt}=cx+dy$</p>')
html('adott $x(0),y(0),a,b,c,d$ kezdőértékek mellett.')
@interact
def _(x=('x(0)',3),y=('y(0)',-2),A=('matrix', matrix(SR,2,2,[1,-1,2,4]))):
    X=vector(SR,2,[x,y])
    html('Az $A$ mátrix: $%s$'%latex(A))
    D,P=A.eigenmatrix_right()
    X1=P.inverse()*X
    html('Az $A$ mátrix sajátértékei: $%s$ és $%s$'%(latex(D[0,0]),latex(D[1,1])))
    html('sajátérték: $%s$, hozzá tartozó sajátvektor: $%s$'%(latex(D[0,0]),latex(P.column(0))))
    html('sajátérték: $%s$, hozzá tartozó sajátvektor: $%s$'%(latex(D[1,1]),latex(P.column(1))))
    html('A sajátvektorokból álló $P$ mátrix: $%s$'%latex(P))
    html('$P$ inverze: $%s$'%latex(P.inverse()))
    html('Ekkor a $P^{-1}AP$ mátrix diagonális: $%s$'%latex((P^-1*A*P).factor()))
    html('Alkalmazzuk az $x=%sx_1+%sy_1, y=%sx_1+%sy_1$ helyettesítést'%
(latex(P[0,0]),latex(P[0,1]),latex(P[1,0]),latex(P[1,1])))
    html('Az eredeti rendszerből kapjuk, hogy $x_1\prime=%sx_1$ és $y_1\prime=%sy_1$'%(latex(D[0,0]),latex(D[1,1])))
    html(r'A helyettesítésből adódik, hogy $\left(\begin{array}{c}x_1(0)\\y_1(0)\end{array}\right)=P^{-1}\left(\begin{array}
{c}x(0)\\y(0)\end{array}\right)$')
    html('Azaz $x_1(0)=%s$ és $y_1(0)=%s$'%(latex(X1[0]),latex(X1[1])))
    t=var('t')
    x1t=X1[0]*exp(D[0,0]*t)
    y1t=X1[1]*exp(D[1,1]*t)
    html('A fentiek alapján $x_1=%s$ és $y_1=%s$'%(latex(x1t),latex(y1t)))
    html('A helyettesítésből pedig megkapjuk a megoldást $x$-re és $y$-ra:')
    html('<h4>$x(t)=%s$</h4>'%latex(P[0,0]*x1t+P[0,1]*y1t))
    html('<h4>$y(t)=%s$</h4>'%latex(P[1,0]*x1t+P[1,1]*y1t))
```

Lineáris differenciálegyenletrendszer megoldása

Az $x(t)$ és $y(t)$ függvényekre megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$\frac{dx}{dt}=ax+by$

$\frac{dy}{dt}=cx+dy$

adott $x(0), y(0), a, b, c, d$ kezdőértékek mellett.

x(0) 3

y(0) -2

A 1 -1
2 4

Az A mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Az A mátrix sajátértékei: 3 és 2

sajátérték: 3, hozzá tartozó sajátvektor: $(1, -2)$

sajátérték: 2, hozzá tartozó sajátvektor: $(1, -1)$

A sajátvektorokból álló P mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

P inverze: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ekkor a $P^{-1}AP$ mátrix diagonális: $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Alkalmazzuk az $x = 1x_1 + 1y_1, y = -2x_1 + -1y_1$ helyettesítést

Az eredeti rendszerből kapjuk, hogy $x_1\prime = 3x_1$ és $y_1\prime = 2y_1$

A helyettesítésből adódik, hogy $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$

Azaz $x_1(0) = -1$ és $y_1(0) = 4$

A fentiek alapján $x_1 = -e^{(3\,t)}$ és $y_1 = 4\,e^{(2\,t)}$

A helyettesítésből pedig megkapjuk a megoldást x-re és y-ra:

$x(t) = -e^{(3\,t)} + 4\,e^{(2\,t)}$

$y(t) = 2\,e^{(3\,t)} - 4\,e^{(2\,t)}$

Irodalomjegyzék

[1] K. R. Matthews. *Elementary linear algebra*, 2013. http://www.numbertheory.org/book/mp103.pdf.

[2] M. E. O'Sullivan. San Diego State University. http://www-rohan.sdsu.edu/~mosulliv/sagetutorial/sageprog.html.

[3] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 6.1.1)*. The Sage Development Team. http://www.sagemath.org/doc/constructions/linear_algebra.html.

[4] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 6.1.1)*. The Sage Development Team, 2014. http://www.sagemath.org.