

Kossuth Lajos Tudományegyetem

DIPLOMAMUNKA

A $D_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 - D_2(b_0y^2 + b_1y + b_2) = k$

diofantikus egyenlet

effektív és numerikus vizsgálata

Készítette : Tengely Szabolcs (V. matematikus)

Témavezető : Dr. Hajdu Lajos

1999

Köszönetet szeretnék mondani Dr. Győry Kálmán egyetemi tanárnak és Dr. Hajdu Lajos egyetemi tanársegédnek a diplomamunkám elkészítéséhez nyújtott segítségükért.

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	3
2	Algebrai számelméleti alapfogalmak	5
2.1	Algebrai számok	5
2.2	Algebrai bővítések	6
2.3	Algebrai számok magassága, mérete és normája	8
3	Thue-egyenletek	10
3.1	A Baker módszer ismertetése	10
3.2	Példa Thue-egyenlet megoldására	12
4	Saját eredmények	16
4.1	A $D_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 - D_2(b_0y^2 + b_1y + b_2) = k$ diofantikus egyenletről	16
4.2	Teljes hatványok számtani sorozatokban	20

1 Bevezetés

Dolgozatunkban olyan algebrai számelméleti problémákat tárgyalunk, amelyeket speciális diofantikus egyenletek megoldására lehet visszavezetni. A szóban forgó egyenlettípus Thue norvég matematikusról kapta a nevét. Thue 1909-ben bebizonyította (lásd [30]), hogy az

$$F(x, y) = m$$

diofantikus egyenletnek, ahol F egész együtthatós, legalább harmadfokú, homogén, irreducibilis binér forma, m pedig 0-tól különböző adott egész szám, csak véges sok $x, y \in \mathbb{Z}$ megoldása lehet. Thue bizonyítása azonban ineffektív volt, azaz nem ad algoritmust a megoldások meghatározására. 1968-ban Baker a Thue-egyenletek megoldására explicit felső korlátot adott (lásd [2]), amely csak az F forma fokszámától, együtthatóitól és az adott m -től függ. Ezen korlátot azóta többen is javították, a jelenleg ismert legjobb becslést (lásd [8]) Bugeaud és Győry kapta. Azonban konkrét egyenletek esetében ezen korlátok is túl nagyok ahhoz, hogy a mai igen gyors számítógépek segítségével az összes megoldást meg tudjuk határozni, ezért különböző redukciós eljárásokra van szükség. Először ilyen algoritmust Baker és Davenport adott [4]-ben. A dolgozatban szereplő Thue-egyenletek megoldásához a KANT programcsomagot használtuk (lásd [24]), amely tartalmazza a megoldáshoz szükséges összes bonyolult számításokat. Ez a programcsomag alacsony fokszámú (pl. legfeljebb 10-edfokú), és nem túl nagy együtthatójú Thue-egyenletek összes megoldását rövid időn belül automatikusan szolgáltatja.

Dolgozatban általános eljárást adunk a

$$D_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 - D_2(b_0y^2 + b_1y + b_2) = k$$

diofantikus egyenletcsalád megoldásainak meghatározására, ahol $a_i, b_i, k \in \mathbb{Z}$ és $D_1, D_2 \in \mathbb{N}$ adott számok, $x, y \in \mathbb{Z}$ ismeretlenek. A megoldáshoz Tzanakis egy lemmáját használjuk fel, amely az $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ diofantikus egyenlettel foglalkozik (lásd [32]). Ezen felül megadjuk az összes

$$k, x^2, y^4$$

és

$$k, x^4, y^2$$

típusú számtani sorozatot, ahol x, y 0-tól különböző egész számok, k pedig adott egész szám a $|k| \leq 10$ tulajdonsággal. A szakirodalomban sok eredmény található ebben a témakörben. Legtöbbször a kapcsolódó

$$\begin{aligned} x^4 - Dy^2 &= \pm 1, \\ x^2 - Dy^4 &= \pm 1 \end{aligned}$$

egyenleteket vizsgálták, ahol $D > 0$ adott egész szám, lásd például: [9]-[11],[13]-[21],[25]-[27],[32],[33]. Tzanakis [32]-ben általános módszert adott az

$$x^2 - Dy^4 = k \tag{1.1}$$

alakú egyenletek megoldására konkrét D és k értékek mellett. Dawe és Lal [21]-ben számítógép segítségével a $2 \leq D \leq 43, y \leq 2 \cdot 10^5, |k| \leq 999$ feltételek mellett (1.1) összes megoldását meghatározta. Y. S. Cao [10]-ben $k = -4$ esetén megoldhatósági feltételeket adott (1.1)-re vonatkozóan. Megemlítjük, hogy újabban Bilu és Hanrot [6]-ban módszert dolgoztak ki általánosabb szuperelliptikus egyenletek numerikus megoldására.

2 Algebrai számelméleti alapfogalmak

Az alábbiakban áttekintjük a megoldott problémákhoz szükséges algebrai számelméleti definíciókat és tételeket. A tételek bizonyításai megtalálhatóak a [7],[29] és a [31] könyvekben.

2.1 Algebrai számok

2.1. Definíció. Az $\alpha \in \mathbb{C}$ számot algebrai számnak nevezzük, ha létezik olyan racionális együtthatós

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \neq 0 \quad /a_i \text{ racionális}/$$

polinom, melynek α gyöke.

2.2. Definíció. Az α számot k -adfokú algebrai számnak nevezzük, ha gyöke egy $f_k(x)$ k -adfokú racionális együtthatós polinomnak, de nem gyöke semmilyen $g_l(x)$ racionális együtthatós polinomnak, ha $l < k$.

2.3. Tétel. *Ha α gyöke egy $f_k(x)$ k -adfokú racionális együtthatós polinomnak, de k -nál alacsonyabb fokú racionális együtthatós polinomnak nem gyöke, akkor $f_k(x)$ irreducibilis polinom a racionális számtest felett.*

2.4. Tétel. *Ha α gyöke két k -adfokú racionális együtthatós irreducibilis $f_k(x)$ és $g_k(x)$ polinomnak, akkor*

$$f_k(x) = cg_k(x),$$

ahol c racionális konstans.

2.5. Definíció. Az α szám kanonikus polinomjának nevezzük azt a legalacsonyabb fokú racionális együtthatós polinomot, amelynek α gyöke.

2.6. Tétel. *Az összes algebrai számok testet alkotnak.*

2.7. Definíció. Az α számot algebrai egész számnak nevezzük, ha α kanonikus polinomjában minden együttható racionális egész, és főegyütthatója 1.

2.8. Tétel. *Tetszőleges α algebrai szám előállítható egy algebrai egész szám és egy racionális egész szám hányadosaként.*

2.9. Tétel. *Az összes algebrai egész számok gyűrűt alkotnak.*

2.10. Definíció. Egy α algebrai szám kanonikus polinomjának gyökei az α szám konjugáltjainak nevezzük.

2.11. Tétel. *Algebrai egész szám konjugáltja is algebrai egész szám.*

2.2 Algebrai bővítések

2.12. Definíció. Ha az Ω test tartalmazza a k testet, mint résztestet, akkor azt mondjuk, hogy az Ω testbővítése a k -nak. Jelölés: Ω/k .

2.13. Definíció. Ha K olyan részteste az Ω -nak amely tartalmazza a k testet, azaz $k \subset K \subset \Omega$, akkor K -t közbenső testnek nevezzük.

2.14. Definíció. A K/k bővítést végesnek nevezzük, ha K mint vektortér a k felett véges dimenziós. Ezt a dimenziót nevezzük a bővítés fokának, és $(K : k)$ -val jelöljük. A K mint vektortér a k felett egy bázisát a K/k bővítés bázisának nevezzük.

2.15. Tétel. *Legyen K_0 a K/k bővítés közbenső teste. Ekkor ha a K/K_0 és K_0/k bővítések végesek, akkor a K/k bővítés is véges, és*

$$(K : k) = (K : K_0)(K_0 : k).$$

2.16. Definíció. Legyen Ω/k a k test bővítése. Az $\alpha \in \Omega$ számot algebrainak nevezzük a k test felett, ha gyöke valamely $f(t) \in k[t]$ nemnulla polinomnak.

2.17. Definíció. Az Ω/k bővítést algebrainak nevezzük, ha minden $\alpha \in \Omega$ algebrai k felett.

2.18. Tétel. *Minden véges bővítés algebrai.*

Most rátérünk a racionális számtest bővítéseinek tárgyalására.

2.19. Definíció. Legyen ϑ egy n -edfokú nem racionális algebrai szám. Az $\mathbb{Q}$ racionális számtestnek a ϑ által generált $\mathbb{Q}(\vartheta)$ n -edfokú egyszerű algebrai bővítésén azon

$$\frac{f(\vartheta)}{g(\vartheta)} \quad g(\vartheta) \neq 0$$

alakú elemek összességét értjük, amelyek úgy keletkeznek, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok egymástól függetlenül végigfutnak az összes racionális együtthatós polinomok gyűrűjén.

2.20. Tétel. *A racionális számtest egyszerű algebrai bővítésének elemei számtestet alkotnak.*

2.21. Tétel. *Az $\mathbb{Q}(\vartheta)$ n -edfokú számtest tetszőleges α eleme egyértelműen*

$$\alpha = c_0 + c_1\vartheta + \dots + c_{n-1}\vartheta^{n-1}$$

alakban állítható elő, ahol a c_i számok racionálisak. (Ezt nevezzük az α szám kanonikus előállításának.)

2.22. Definíció. Az $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ $\mathbb{Q}(\vartheta)$ -beli elemeket a racionális számtest felett lineárisan függetleneknek nevezzük, ha racionális együtthatós lineáris kombinációjukkal a 0 csak triviálisan állítható elő.

2.23. Tétel. Az n -edfokú $\mathbb{Q}(\vartheta)$ -ban léteznek lineárisan független elemek, és ezek maximális száma n . Ha

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n$$

lineárisan független elemek maximális rendszere, akkor ezek lineáris kombinációjaként az $\mathbb{Q}(\vartheta)$ minden eleme egyértelműen előállítható.

2.24. Tétel. Az $\mathbb{Q}(\vartheta)$ test minden eleme algebrai szám.

2.25. Tétel. Legyen $\mathbb{Q}(\vartheta)$ a racionális test egy n -edfokú egyszerű algebrai bővítése, és legyen

$$\alpha \in \mathbb{Q}(\vartheta)$$

az $\mathbb{Q}(\vartheta)$ -nak egy tetszőleges n -edfokú eleme. Ekkor $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\vartheta)$.

2.3 Algebrai számok magassága, mérete és normája

2.26. Definíció. Legyen α algebrai szám, amelynek definiáló polinomja:

$$a_0x^d + \dots + a_d,$$

ahol $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_0 > 0$, $(a_0, \dots, a_d) = 1$. Ekkor az α szám magasságát a $H(\alpha) = \max(|a_0|, \dots, |a_d|)$ képlettel értelmezzük. Az α szám foka pedig $\deg(\alpha) = d$.

2.27. Definíció. Jelölje $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_d$ az α szám konjugáltjait. Az α mérete:

$$\overline{|\alpha|} = \max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i|.$$

Ekkor igazak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} \overline{|\alpha|} &\leq \deg(\alpha)H(\alpha), \\ |\alpha| &\geq (\deg(\alpha)H(\alpha))^{-1}. \end{aligned}$$

2.28. Definíció. Legyen $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$ n -edfokú algebrai számtest. Tekintsük az $\alpha = r(\vartheta)$ kanonikus előállítását. Behelyettesítve ϑ konjugáltjait, kapjuk az $\alpha^{(j)} = r(\vartheta_j)$ ($j = 1, \dots, n$) számokat, amelyeket az α szám $\mathbb{Q}(\vartheta)$ -ra vonatkozó relatív konjugáltjainak nevezzük.

A következő tétel a relatív és a közönséges konjugáltak kapcsolatát adja meg.

2.29. Tétel. Legyen α k -adfokú eleme az n -edfokú $\mathbb{Q}(\vartheta)$ számtestnek. Ekkor $k \mid n$ és α relatív konjugáltjai sorrendtől eltekintve megegyeznek α konjugáltjaival, mindegyiket n/k -szor véve.

2.30. Definíció. Legyen $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$ n -edfokú algebrai számtest. Tekintsük az $\alpha = r(\vartheta)$ kanonikus előállítását. Ekkor az α szám normáján a relatív konjugáltjainak a szorzatát értjük, azaz

$$N(\alpha) = \prod_{j=1}^n r(\vartheta_j).$$

A norma tulajdonságai:

1. Ha α algebrai szám, akkor $N(\alpha) \in \mathbb{Q}$, ha algebrai egész szám akkor pedig $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.
2. A norma totálisan multiplikatív függvény.
3. Ha $\alpha, \beta \in O_K$ és $\alpha \mid \beta$, akkor $N(\alpha) \mid N(\beta)$.
4. $\alpha \in O_K$ és $N(\alpha) = \pm 1$, pontosan akkor ha α egység.

3 Thue-egyenletek

Ebben a fejezetben a Thue-egyenletek megoldásához szükséges tételekről lesz szó.

Legyen $F \in \mathbb{Z}[X, Y]$ legalább harmadfokú irreducibilis binér forma, és $m \neq 0$ racionális egész. Thue-egyenletnek az

$$F(x, y) = m \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

típusú diofantikus egyenleteket nevezzük. Thue 1909-ben bizonyította [30]-ban, hogy az ilyen egyenleteknek csak véges sok megoldásuk van. Azonban eredménye ineffektív volt abban az értelemben, hogy nem szolgáltatott eljárást a konkrét esetekben fellépő megoldások meghatározására.

3.1 A Baker módszer ismertetése

Baker algebrai számok logaritmusainak lineáris formáira vonatkozó eredménye (lásd [1]) új módszert adott bizonyos típusú diofantikus egyenletek vizsgálatához. A jelenleg ismert legjobb effektív becslés algebrai számok logaritmusainak lineáris formáira vonatkozóan Baker és Wüstholz eredménye (lásd [5]). Mivel a tételt a későbbiek folyamán használni fogjuk, így az alábbiakban ismertetjük azt.

Az eredmény megfogalmazáshoz szükségünk van néhány új jelölés bevezetésére. Legyenek $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ olyan nem nulla algebrai számok, melyek magasságai nem haladják meg az $A_1, \dots, A_n$ értékeket, valamint

$$K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ és } [K : \mathbb{Q}] = d.$$

Legyen

$$\Lambda = b_1 \log \alpha_1 + \dots + b_n \log \alpha_n,$$

ahol $b_1, \dots, b_n$ olyan racionális egész számok, amelyek nem mindegyike 0, és

$$\max_{1 \leq j \leq n} |b_j| \leq B.$$

Jelölje továbbá Ω az A_j értékek logaritmusainak szorzatát.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $A \geq e$, $B \geq e$. Ha $\Lambda \neq 0$, akkor a*

$$0 < |\Lambda| < \exp \left\{ -(16nd)^{2(n+2)} \Omega \log B \right\}$$

egyenlőtlenségnek nincs $b_1, \dots, b_n$ racionális egész megoldása.

Ezek után ismertetünk két, a Thue-egyenletek megoldásaira vonatkozó effektív felső becslést adó tételt. Ezek alapja a fent bemutatott Baker-típusú becslés. Az első ilyen tétel Baker eredménye (lásd [2]).

3.2. Tétel. *Az*

$$F(x, y) = b$$

Thue-egyenlet minden x, y egész megoldására fennáll, hogy

$$\max(|x|, |y|) < \exp \left\{ n^{\nu^2} H^{\nu n^3} + (\log |b|)^{2n+2} \right\},$$

ahol $n = \deg(F)$, H az F magassága, azaz F együtthatói abszolút értékeinek maximuma, és $\nu = 128n(n+1)$.

A jelenleg ismert legjobb korlát Bugeaud és Györy nevéhez fűződik, most ezt a tételt ismertetjük.

3.3. Tétel. *Az*

$$F(x, y) = b$$

Thue-egyenlet minden x, y egész megoldására fennáll, hogy

$$\max(|x|, |y|) < \exp \left(cH^{2n-2} (\log H)^{2n-1} \log B \right),$$

ahol $c = 3^{3(n+9)} n^{18(n+1)}$, H az F magasságának egy felső korlátja, és $B = \max(|b|, 3)$.

3.2 Példa Thue-egyenlet megoldására

Ebben a részben bemutatjuk, hogyan is alkalmazható a fent ismertetett módszer Thue-egyenletek esetében. Most Gaál egy cikkét fogjuk követni (lásd [23]).

Megjegyezzük, hogy ha $F \in \mathbb{Z}[x, y]$ egy n -edfokú irreducibilis forma 1 főegyütthatóval akkor az egyenletet az alábbi formában is megadhatjuk:

$$F(X, Y) = N_{K/\mathbb{Q}}(X + \alpha Y) = \prod_{i=1}^n (X + \alpha^{(i)} Y),$$

ahol $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ az $F(X, 1) = 0$ egy gyöke által generált test, és $\alpha^{(i)}$, $(i = 1, \dots, n)$ jelöli ennek az α gyöknek a konjugáltjait. Az egyszerűség kedvéért olyan harmadfokú

$$N_{K/\mathbb{Q}}(x + \alpha y) = 1, \quad x, y \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

Thue-egyenletet tekintünk, ahol $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ totálisan valós harmadfokú test. Jelöljük η_1, η_2 -vel az 1 normájú K -beli alap-egységeket. Legyen x és y tetszőleges, de rögzített megoldása (3.1)-nek, és legyen

$$X = \max(|x|, |y|).$$

Legyen $\beta = x + \alpha y$ és egy $\gamma \in K$ szám konjugáltjait jelölje $\gamma^{(i)}$ $i = 1, 2, 3$. (3.1)-ből következik, hogy β egy egysége K -nak, ezért

$$\beta = \eta_1^{b_1} \eta_2^{b_2} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Legyen $H = \max(|b_1|, |b_2|)$. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy

$$|\beta^{(1)}| \leq |\beta^{(2)}| \leq |\beta^{(3)}|.$$

Kapjuk, hogy

$$|\beta^{(i)}| \geq c_1 X, \quad (i = 2, 3) \quad (3.3)$$

ahol c_1 effektíve kiszámolható pozitív konstans, amely csak az α -tól és a K test paramétereitől függ. (3.1) és (3.3) alapján:

$$|\beta^{(1)}| = \frac{1}{|\beta^{(2)}||\beta^{(3)}|} \leq c_2 X^{-2}. \quad (3.4)$$

Most β konjugáltjainak logaritmusát véve, és felhasználva (3.2)-t kapjuk, hogy:

$$\log |\beta^{(i)}| = b_1 \log |\eta_1^{(i)}| + b_2 \log |\eta_2^{(i)}| \quad (i = 1, 2, 3).$$

Azaz lineáris egyenletrendszert kaptunk b_1, b_2 -re, így a Cramer-szabály segítségével

$$H \leq c_3 \max_{1 \leq i \leq 3} \left| \log |\beta^{(i)}| \right| \leq c_4 \log X. \quad (3.5)$$

A Baker-módszer alkalmazásához szükségünk lesz az úgynevezett Siegel-azonosságra:

$$(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})\beta^{(3)} + (\alpha^{(2)} - \alpha^{(3)})\beta^{(1)} + (\alpha^{(3)} - \alpha^{(1)})\beta^{(2)} = 0.$$

Ezt az azonosságot átalakítva kapjuk, hogy:

$$1 - \frac{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(3)})\beta^{(2)}}{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})\beta^{(3)}} = \frac{(\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)})\beta^{(1)}}{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})\beta^{(3)}}. \quad (3.6)$$

Tekintsük a következő egyenlőtlenségsorozatot:

$$\begin{aligned}
\exp(-c_5 \log H) &< \left| \log \left| \frac{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(3)})}{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})} \right| + b_1 \log \left| \frac{\eta_1^{(2)}}{\eta_1^{(3)}} \right| + b_2 \log \left| \frac{\eta_2^{(2)}}{\eta_2^{(3)}} \right| \right| \\
&\leq 2 \left| 1 - \frac{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(3)})}{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})} \left[\frac{\eta_1^{(2)}}{\eta_1^{(3)}} \right]^{b_1} \left[\frac{\eta_2^{(2)}}{\eta_2^{(3)}} \right]^{b_2} \right| \\
&= 2 \left| 1 - \frac{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(3)})\beta^{(2)}}{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})\beta^{(3)}} \right| = 2 \left| \frac{(\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)})\beta^{(1)}}{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})\beta^{(3)}} \right| \quad (3.7) \\
&\leq c_6 \frac{c_2 X^{-2}}{c_1 X} = c_7 X^{-3} = \exp(c_8 - 3 \log X) \\
&\leq \exp(c_8 - c_9 H) \leq \exp(-c_{10} H).
\end{aligned}$$

Itt az első egyenlőtlenség következik a Baker-bebecslésből, a második a $|\log z| < 2|z - 1|$ egyenlőtlenségből, ez azon komplex számokra teljesül, amelyekre $|z - 1| \leq \frac{1}{3}$. (Ha esetünkben a megfelelő jelöléssel $|z - 1| > \frac{1}{3}$ teljesülne, akkor az alábbiakban kapottnál sokkal jobb becslést nyerünk H -ra). A következő egyenlőség (3.2)-ből, az ezután pedig (3.6)-ból következik. Ezután alkalmaztuk (3.3)-at, (3.4)-et és (3.5)-öt. Az utolsó becslés akkor igaz ha H elég nagy, de ha ez nem teljesül, akkor ismét jobb becslést nyerünk H -ra. Összehasonlítva az egyenlőtlenségek jobb és bal oldalát azt kapjuk, hogy H -ra effektíve kiszámítható pozitív H_B korlát adható. Alkalmazva (3.2)-t, X -re az X_B felső korlátot nyerjük. Megjegyezzük, hogy ebben az egyszerű esetben H_B körülbelül 10^{30} , és X_B ennek exponenciális függvénye.

Az így nyert korlátot a Baker-Davenport redukciós eljárás segítségével le lehet szorítani. Most ezt a módszert mutatjuk be. Az eljárás a következő egyenlőtlenségen alapul:

$$\left| \log \left| \frac{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(3)})}{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})} \right| + b_1 \log \left| \frac{\eta_1^{(2)}}{\eta_1^{(3)}} \right| + b_2 \log \left| \frac{\eta_2^{(2)}}{\eta_2^{(3)}} \right| \right| < \exp(-c_{10} H).$$

Legyen

$$\Theta = \frac{\log \left| \frac{\eta_1^{(2)}}{\eta_1^{(3)}} \right|}{\log \left| \frac{\eta_2^{(2)}}{\eta_2^{(3)}} \right|},$$

és

$$\gamma = -\frac{\log \left| \frac{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(3)})}{(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})} \right|}{\log \left| \frac{\eta_2^{(2)}}{\eta_2^{(3)}} \right|}.$$

Ekkor a fenti egyenlőtlenség az alábbi formába írható:

$$|b_1\Theta + b_2 - \gamma| < K^{-H}, \quad (3.8)$$

ahol K egy effektíve kiszámítható pozitív konstans. A redukációs eljárás alapja az alábbi lemma.

3.4. Lemma. *Legyen Θ, γ adott valós számok, M, B ($B > 6$) adott egészek. Ha létezik q egész úgy, hogy:*

$$\begin{aligned} 1 &\leq q \leq MB \\ \|q\Theta\| &< \frac{2}{MB} \\ \|q\gamma\| &\geq \frac{3}{B} \end{aligned}$$

akkor (3.8)-nak nincs b_1, b_2 megoldása a

$$\frac{\log(MB^2)}{\log K} \leq H \leq M$$

intervallumban, ahol $H = \max(|b_1|, |b_2|)$ és $\|\cdot\|$ jelöli a legközelebbi egésztől mért távolságot.

A lemma felhasználásával a korlátot leszorítjuk (kb. két számjegyre), és ezzel lehetőség van számítógép segítségével meghatározni az összes megoldást.

4 Saját eredmények

Ebben a fejezetben általános eljárást adunk a

$$D_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 - D_2(b_0y^2 + b_1y + b_2) = k$$

diofantikus egyenletcsalád megoldásainak meghatározására, és numerikusan megoldjuk a

$$2x^4 = y^2 + k$$

és

$$2x^2 = y^4 + k$$

diofantikus egyenleteket a $|k| \leq 10$ feltétel mellett, azaz megadjuk az összes k, x^4, y^2 és k, x^2, y^4 alakú számtani sorozatot. Az első probléma megoldásához Tzanakis cikkét használtuk (lásd [32]), míg a második részben Cohen cikkét (lásd [13]).

4.1 A $D_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 - D_2(b_0y^2 + b_1y + b_2) = k$ diofantikus egyenletről

Az alábbiakban általános eljárást adunk a

$$D_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 - D_2(b_0y^2 + b_1y + b_2) = k$$

diofantikus egyenletcsalád megoldásainak meghatározására, ahol $a_i, b_i, k \in \mathbb{Z}$ és $D_1, D_2 \in \mathbb{N}$ adott számok, $x, y \in \mathbb{Z}$ ismeretlenek. A megoldáshoz Tzanakis egy lemmáját használjuk fel, amely az $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ diofantikus egyenlettel foglalkozik (lásd [32]).

4.1. Tétel. *Tekintsük a következő diofantikus egyenletet:*

$$D_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 - D_2(b_0y^2 + b_1y + b_2) = k, \quad (4.1)$$

ahol $a_i, b_i, k \in \mathbb{Z}$ és $D_1, D_2 \in \mathbb{N}$ adott számok, $x, y \in \mathbb{Z}$ ismeretlenek. Ekkor megadhatunk véges sok negyedrendű Thue-egyenletet, amelyek megoldásával meg tudjuk határozni (4.1) összes egész megoldását.

Bizonyítás. Az egyenletet $4b_0$ -al szorozva kapjuk, hogy

$$4b_0D_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 - D_2(2b_0y + b_1)^2 = 4b_0k + 4b_0b_2D_2 - D_2b_1^2.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} 4b_0D_1 &= m_1s_1^2, \\ D_2 &= m_2s_2^2, \\ 4b_0k + 4b_0b_2D_2 - D_2b_1^2 &= m_3z^2, \end{aligned}$$

ahol m_1, m_2, m_3 négyzetmentes egészek. Ekkor

$$m_1(s_1(a_0x^2 + a_1x + a_2))^2 + (-m_2)(s_2(2b_0y + b_1))^2 + (-m_3)z^2 = 0. \quad (4.2)$$

Legyen $(m_1, m_2) = d_1, (m_1, m_3) = d_2, (m_2, m_3) = d_3$ ekkor $(d_1, d_2) = (d_1, d_3) = (d_2, d_3) = 1$, és

$$\begin{aligned} m_1 &= d_1d_2n_1, \\ m_2 &= d_1d_3n_2, \\ m_3 &= d_2d_3n_3, \\ s_1(a_0x^2 + a_1x + a_2)^2 &= d_3X, \\ s_2(2b_0y + b_1)^2 &= d_2Y, \\ z &= d_1Z. \end{aligned}$$

Így (4.2) a következő alakban írható:

$$n_1d_3X^2 + (-n_2d_2)Y^2 + (-n_3d_1)Z^2 = 0, \quad (4.3)$$

ahol az együtthatók négyzetmentesek, és páronként relatív prímek. Ha (4.3)-nak csak a triviális $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ megoldása

van, akkor visszahelyettesítés után egyszerű számolással megkapjuk a megoldásokat x -re és y -ra. Ezután tegyük fel, hogy létezik nem triviális megoldás: (x_1, y_1, z_1) . Ilyen megoldás meghatározására létezik algoritmus: a Dedekind-eljárás (lásd például [22] vagy [28]). Ezekután meg lehet adni a paraméteres megoldást (4.3)-ra (lásd [28]). Azaz léteznek olyan u, v relatív prím egészek, hogy:

$$\begin{aligned} d_4 \frac{X}{Q} &= -n_1 d_3 x_1 u^2 + 2n_2 d_2 y_1 uv - n_2 d_2 x_1 v^2, \\ d_4 \frac{Y}{Q} &= n_1 d_3 y_1 u^2 - 2n_1 d_3 x_1 uv + n_2 d_2 y_1 v^2, \\ \pm d_4 \frac{Z}{Q} &= n_1 d_3 z_1 u^2 - n_2 d_2 z_1 v^2, \end{aligned}$$

ahol d_4 a jobboldalak legnagyobb közös osztója, és

$$Q = (X, Y, Z).$$

Az u^2, uv, v^2 együttthatóinak determinánsát tekintve kapjuk, hogy $d_4 \mid 2n_1 n_2 n_3 d_1 d_2 d_3 z_1^3$. Az első egyenletet d_3 -mal szorozva adódik, hogy:

$$\frac{d_4}{Q} s_1 (a_0 x^2 + a_1 x + a_2)^2 = -n_1 d_3^2 x_1 u^2 + 2n_2 d_2 d_3 y_1 uv - n_2 d_2 d_3 x_1 v^2,$$

ahol d_4 és Q egy-egy véges halmazból kikerülő számok. A fenti egyenletet átalakítva:

$$\begin{aligned} d_4 s_1 (2a_0 x + a_1)^2 - a_1^2 d_4 s_1 + 4a_0 a_2 d_4 s_1 &= \\ = 4a_0 Q (-n_1 d_3^2 x_1 u^2 + 2n_2 d_2 d_3 y_1 uv - n_2 d_2 d_3 x_1 v^2), \end{aligned}$$

és itt felhasználva, hogy $\pm d_4 \frac{Z}{Q} = n_1 d_3 z_1 u^2 - n_2 d_2 z_1 v^2$ adódik, hogy

$$\begin{aligned} d_4 s_1 (2a_0 x + a_1)^2 \pm \frac{Q(-a_1^2 d_4 s_1 + 4a_0 a_2 d_4 s_1)(n_1 d_3 z_1 u^2 - n_2 d_2 z_1 v^2)}{d_4 Z} &= \\ = 4a_0 Q (-n_1 d_3^2 x_1 u^2 + 2n_2 d_2 d_3 y_1 uv - n_2 d_2 d_3 x_1 v^2). \end{aligned}$$

Innen átrendezés után:

$$(\alpha_1 x + \alpha_2)^2 = \beta_1 u^2 + \beta_2 uv + \beta_3 v^2.$$

A jobb oldalt teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy :

$$-4\beta_1(\alpha_1 x + \alpha_2)^2 + (2\beta_1 u + \beta_2 v)^2 + (4\beta_1\beta_3 - \beta_2^2)v^2 = 0.$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $4\beta_1\beta_3 - \beta_2^2 = j_1 t_1^2$, $4\beta_1 = j_2 t_2^2$, ahol j_1, j_2 négyzetmentes számok. Legyen $(j_1, j_2) = d_5$, ekkor $j_1 = d_5 k_1$, $j_2 = d_5 k_2$, $2\beta_1 u + \beta_2 v = d_5 \bar{Z}$. Így

$$(-t_2)\bar{X}^2 + t_1\bar{Y}^2 + d_5\bar{Z}^2 = 0, \quad (4.4)$$

ahol $\bar{X} = t_2(\alpha_1 x + \alpha_2)$, $\bar{Y} = t_1 v$ és az együtthatók négyzetmentesek, és páronként relatív prímek. Ha (4.4)-nak csak a triviális $(0, 0, 0)$ megoldása van, akkor $t_2(\alpha_1 x + \alpha_2) = 0$ felhasználásával a megoldások egyszerű számolással adódnak. Tegyük fel ismét, hogy létezik nem triviális megoldás: $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$. Ekkor léteznek olyan a, b relatív prím egész számok melyekkel:

$$d_6 \frac{\bar{X}}{\bar{Q}} = f_1(a, b), \quad (4.5)$$

$$d_6 \frac{\bar{Y}}{\bar{Q}} = f_2(a, b), \quad (4.6)$$

$$\pm d_6 \frac{\bar{Z}}{\bar{Q}} = f_3(a, b), \quad (4.7)$$

ahol d_6 a jobb oldalak legnagyobb közös osztója, és

$$\bar{Q} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}),$$

továbbá f_i , $i = 1, 2, 3$ csak $j_i, t_i, d_5, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ -től függő homogén binér forma. d_6 is egy véges halmazból kikerülő szám, és $\bar{Q} \mid \bar{Y}, \bar{Z}$ miatt

$\overline{Q} \mid 2\beta_1\beta_2t_1$ szintén egy véges halmazból kerül ki. A (4.5) egyenletek alapján:

$$\begin{aligned} u &= g_1(a, b), \\ v &= g_2(a, b), \end{aligned}$$

ahol g_1 és g_2 racionális együtthatós binér formák. Felhasználva, hogy

$$\pm d_4 \frac{Z}{Q} = n_1 d_3 z_1 u^2 - n_2 d_2 z_1 v^2,$$

adódik, hogy

$$\pm d_4 \frac{Z}{Q} = n_1 d_3 z_1 (g_1(a, b))^2 - n_2 d_2 z_1 (g_2(a, b))^2.$$

Az egyenletet átrendezve:

$$F(a, b) = m$$

típusú egyenlethez jutunk, ahol F negyedfokú homogén binér forma, és m adott egész szám. Abban az esetben, ha F irreducibilis és $m \neq 0$, Thue-egyenlethez jutunk, amelyet a KANT programcsomaggal megoldva kapjuk a megoldásokat (a, b) -re és visszahelyettesítés után (x, y) -ra. F reducibilitása esetén egyszerű számolással igen jó korlát nyerhető a -ra és b -re, és $m = 0$ esetében szintén elemi eszközökkel jutunk el a megoldásokhoz. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

4.2 Teljes hatványok számtani sorozatokban

A következő eredmény megadja az összes k, x^2, y^4 és k, x^4, y^2 típusú számtani sorozatot $|k| \leq 10$ feltétel mellett.

4.2. Tétel. Ha $k \in \{-10, \dots, 10\}$, akkor a

$$2x^2 = y^4 + k, \quad (4.8)$$

és

$$2x^4 = y^2 + k \quad (4.9)$$

diofantikus egyenletek összes megoldását az alábbi táblázatok adják:

	$2x^2 = y^4 + k$	$2x^4 = y^2 + k$
k = 8	$(x , y) = (2, 0)$	<i>nincs megoldás</i>
k = 7	$(x , y) = (2, 1), (1562, 47)$	$(x , y) = (2, 5)$
k = 2	$(x , y) = (1, 0), (3, 2)$	<i>nincs megoldás</i>
k = 1	$(x , y) = (1, 1)$	$(x , y) = (1, 1), (13, 239)$
k = 0	$(x, y) = (0, 0)$	$(x, y) = (0, 0)$
k = -1	$(x, y) = (0, 1)$	$(x, y) = (0, 1)$
k = -2	<i>nincs megoldás</i>	$(x , y) = (1, 2)$
k = -4	<i>nincs megoldás</i>	$(x , y) = (2, 6), (0, 2)$
k = -7	<i>nincs megoldás</i>	$(x , y) = (1, 3), (3, 13)$
k = -8	$(x , y) = (2, 2), (478, 26)$	<i>nincs megoldás</i>
k = -9	$(x , y) = (6, 3)$	$(x , y) = (6, 51), (0, 3)$

Csak azokat a k értékeket tüntettük fel, melyekre (4.8) és (4.9) közül legalább az egyik egyenlet megoldható. Mint már említettük (4.8)-at $k = -1$ esetén, illetve (4.9)-et $k = 2$ esetén Z. F. Cao és J. Y. Pan (lásd [11]), míg (4.9)-et $k = 1$ -re Ljunggren (lásd [25]) korábban megoldotta, és $k = -1$ -re is ismert a megoldás (lásd [27], 270. oldal).

Bizonyítás. Legelőször is vegyük észre, hogy csak azon k értékekre kaphatunk megoldást, amelyekre az $u^2 - 2v^2 = -k$ Pell-egyenletnek van egész megoldása. Ennek alapján könnyen ellenőrizhető, hogy a $k \in \{\pm 10, \pm 6, \pm 5, \pm 3\}$ eseteket kizárhatjuk.

Az alábbi egyenletek nem megoldhatók, mert alkalmas modulus mellett mint kongruenciák sem megoldhatók:

$$\begin{aligned}
2x^4 &= y^2 + 9, \text{ nincs megoldás modulo } 27 \\
2x^4 &= y^2 + 8, \text{ nincs megoldás modulo } 16 \\
2x^4 &= y^2 + 4, \text{ nincs megoldás modulo } 16 \\
2x^4 &= y^2 - 8, \text{ nincs megoldás modulo } 16 \\
2x^2 &= y^4 + 9, \text{ nincs megoldás modulo } 27 \\
2x^2 &= y^4 + 4, \text{ nincs megoldás modulo } 16 \\
2x^2 &= y^4 - 2, \text{ nincs megoldás modulo } 16 \\
2x^2 &= y^4 - 4, \text{ nincs megoldás modulo } 16 \\
2x^2 &= y^4 - 7, \text{ nincs megoldás modulo } 16.
\end{aligned}$$

Rátérünk a megmaradt esetek tárgyalására. Cohen cikkét (lásd [13]) felhasználva a (4.8) és (4.9) egyenleteket Thue-egyenletekre vezetjük vissza, és ezeket a KANT programcsomag segítségével megoldjuk. A módszer működését mindkét esetben egy-egy konkrét egyenleten mutatjuk be.

1. Először a

$$2x^2 = y^4 + 7$$

egyenletet oldjuk meg. [13] alapján kapjuk, hogy:

$$y^2 = \frac{c(u^2 + 8uv + 2v^2)}{h}, \quad (4.10)$$

$$\pm 1 = \frac{c(2v^2 - u^2)}{h}, \quad (4.11)$$

$$x = \frac{c(2u^2 + 2uv + 4v^2)}{h}, \quad (4.12)$$

ahol $u, v, c \in \mathbb{Z}, v > 0, (u, v) = 1, h \in \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$. A (4.11) egyenlet alapján adódik, hogy $c|h$, de mivel h befutja a 28 összes pozitív osztóját, ezért (4.10)-(4.12)-ben h -t c -vel elosztva látható, hogy elegendő a $c = \pm 1$ eseteket vizsgálni.

A $h = 1$ esetben az y^2 -re vonatkozó egyenletet átalakítva kapjuk, hogy

$$14v^2 = (u + 4v)^2 - y^2.$$

A [13]-beli módszert ismételten alkalmazva:

$$u + 4v = \frac{d(15a^2 + 112ab + 210b^2)}{j}, \quad (4.13)$$

$$y = \frac{d(14b^2 - a^2)}{j}, \quad (4.14)$$

$$v = \frac{d(4a^2 + 30ab + 56b^2)}{j}, \quad (4.15)$$

adódik, ahol $a, b, d \in \mathbb{Z}, b > 0, (a, b) = 1, j \in \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$. A d konstans szorzó itt is elhagyható az $(u, v) = 1$ feltétel miatt. A (4.13) és a (4.15) egyenlet segítségével u is kifejezhető az alábbi módon:

$$u = \pm \frac{-a^2 - 8ab - 14b^2}{j}.$$

A (4.11) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\pm j^2 = 31a^4 + 464a^3b + 2604a^2b^2 + 6496ab^3 + 6076b^4.$$

Az így kapott Thue-egyenleteket a j valamennyi értékére a KANT programcsomaggal megoldva, (x, y) -ra a következő szám-párokat kaptuk:

$$(\pm 2, \pm 1), (\pm 1562, \pm 47).$$

A $h = 2$ esetben a $2y^2 = (u + 4v)^2 - 14v^2$ egyenletre alkalmazva Cohen módszerét, ismét vissza tudjuk vezetni a problémát Thue-egyenletekre, de nem kapunk új megoldásokat.

A $h = 4$ esetben a $14v^2 = (u+4v)^2 - (2y)^2$ egyenlethez jutunk, amely megegyezik a $h = 1$ esetben nyert egyenlettel, csak itt y helyett $2y$ -t kell venni. Mivel nem kaptunk páros y -t, ezért itt nincs megoldás.

Vizsgáljuk most meg a $h = 7$ esetet. Ekkor

$$7y^2 = (u + 4v)^2 - 14v^2, \quad (4.16)$$

azaz $7 \mid u + 4v$, innen $u + 4v = 7w$. Az egyszerűsítések után:

$$y^2 = 7w^2 - 2v^2,$$

amely egyenletet modulo 7 tekintve az adódik, hogy $7 \mid y$ és $7 \mid v$, azaz $y = 7Y$, $v = 7V$, és így

$$7Y^2 = w^2 - 14V^2.$$

Az eljárást folytatva, a végtelen leszállás módszerével belátható, hogy (4.16) egyetlen megoldása $(y, u + 4v, v) = (0, 0, 0)$, ami viszont lehetetlen.

Most a $h = 14$ -nél adódó $14y^2 = (u + 4v)^2 - 14v^2$ egyenletet tekintjük. Azonnal látható, hogy $14 \mid u + 4v$ azaz $u + 4v = 14w$, és ebből:

$$y^2 + v^2 = 14w^2.$$

Azonban $14w^2$ prímtényezős felbontásában a 7 páratlan hatványon szerepel, ezért $14w^2$ nem írható fel két négyzettség összegeként.

Végül a $h = 28$ esetet tárgyaljuk. Itt is a végtelen leszállás módszerét fogjuk alkalmazni:

$$28y^2 = (u + 4v)^2 - 14v^2 \implies 14 \mid u + 4v \implies 2y^2 = 14w^2 - v^2.$$

Innen $2 \mid v \Rightarrow v = 2V \implies y^2 = 7w^2 - 2V^2$, erről az egyenletről pedig már a $h = 7$ esetben beláttuk, hogy nem ad megoldást. Ezzel a $2x^2 = y^4 + 7$ egyenlet megoldását befejeztük.

2. A következő egyenlet, amelyet tárgyalunk a

$$2x^4 = y^2 - 9.$$

Itt a [13]-beli paraméteres megoldás az alábbi lesz:

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(u^2 + 2v^2)}{h}, \\ \pm 3 &= \frac{f(2v^2 - u^2)}{h}, \\ x^2 &= \frac{f(2uv)}{h}, \end{aligned}$$

ahol $u, v, f \in \mathbb{Z}$, $v > 0$, $h \in \{1, 2, 4\}$. Az $f|h$ eset az előzőekhez hasonlóan kezelhető, ezért elegendő az $f|3$ esetet vizsgálni. Az f azonban nem lehet ± 1 , mert a

$$\pm 2^\alpha 3 = u^2 - 2v^2, \quad \alpha \in \{0, 1, 2\} \quad (4.17)$$

Pell-egyenleteknek nincs megoldásuk, így szükségképpen $f = \pm 3$.

Ekkor $h = 1$ -nél $x^2 = \pm 6uv$, de (4.17) miatt $u = 3a^2$, $v = 2b^2$, így a

$$\pm 1 = 8b^4 - 9a^4,$$

Thue-egyenletekhez jutunk, amelyeket a KANT programcsomagot használva megoldunk. Azt kapjuk, hogy $u = 3, v = 2$, így $x = \pm 6, y = \pm 51$.

A $h = 2$ esetben $x^2 = 3uv$, ezért $u = 3a^2, v = b^2$, szintén (4.17) miatt. A $h = 1$ -nél alkalmazott eljárást megismételve az itt nyert

$$\pm 2 = 2b^4 - 9a^4$$

Thue-egyenletekre, az $u = 0, v = 1$ megoldást kapjuk, vagyis ekkor $x = 0, y = \pm 3$.

Befejezésül nézzük a $h = 4$ esetet. Ekkor (4.17) miatt

$$x^2 = \frac{\pm 3uv}{2} \implies u = 3a^2, v = 2b^2,$$

de mivel a

$$\pm 4 = 8b^4 - 9a^4$$

Thue-egyenleteknek nincs megoldásuk, ezért itt nem kapunk új x, y értékeket. Ezzel a $2x^4 = y^2 - 9$ egyenlet minden megoldását meghatároztuk.

Mint említettük, a további (4.8) és (4.9) alakú egyenleteket hasonlóan oldhatjuk meg, mint a fenti $2x^2 = y^4 + 7$ és $2x^4 = y^2 - 9$ egyenletet. $\square$

Irodalomjegyzék

- [1] A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I,II,III,IV *Mathematika* **13** (1967), 102-107, 220-228, **15** (1968) 204-216.
- [2] A. Baker, Contributions to the theory of diophantine equations, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **A 263** (1968), 173-208.
- [3] A. Baker, Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **65** (1969), 439-444.

- [4] A. Baker, H. Davenport, The equations $3x^2 - 2 = y^2$ and $8x^2 - 7 = z^2$, *Quart. J. Math. Oxford* **20** (1969), 129-137.
- [5] A. Baker, G. Wüstholz, Logarithmic forms and group varieties, *J. reine angew. Math.* **442** (1993), 19-62.
- [6] Y. F. Bilu, G. Hanrot, Solving superelliptic Diophantine equations by Baker's method, *Composito Math.* **112** (1998), 273-312.
- [7] Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich, Number Theory, *Academic Press, New York* (1966).
- [8] Y. Bugeaud, K. Györy, Bounds for the solutions of Thue-Mahler equations and norm form equations, *Acta Arith.* **74** (1996), 273-292.
- [9] Z. F. Cao, On the Diophantine equation $x^{2n} - Dy^2 = 1$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **98** (1986), 11-16.
- [10] Y. S. Cao, On the Diophantine equation $x^2 = Dy^4 + 4$, *Heilongjiang Daxue Ziran Kexue Xuebao* **7** (1990), 20-23.
- [11] Z. F. Cao, J. Y. Pan, The Diophantine equation $x^{2p} - Dy^2 = 1$ and the Fermat quotient $Q_p(m)$, *J. Harbin Inst. Tech.* **25** (1993), 119-121.
- [12] M. Cipu, Diophantine equations with at most one positive solution, *Manuscripta Math.* **93** (1997), 349-356.
- [13] E. L. Cohen, On the Diophantine Equation $x^2 - Dy^2 = nz^2$, *J. Number Theory* **40** (1992), 86-91.
- [14] J. H. E. Cohn, Eight Diophantine equations, *Proc. London Math. Soc.* **16** (1966), 153-166.

- [15] J. H. E. Cohn, The diophantine equation $Y^2 = Dx^4 + 1$, *J. London Math. Soc.* **42** (1967), 475-476.
- [16] J. H. E. Cohn, The Diophantine equation $x^4 - Dy^2 = 1$, *Q. J. Math. Oxford II.* **26** (1975), 279-281.
- [17] J. H. E. Cohn, The Diophantine equation $y^2 = Dx^4 + 1$ II., *Acta Arith.* **28** (1975), 273-275.
- [18] J. H. E. Cohn, The diophantine equation $y^2 = Dx^4 + 1$ III., *Math. Scandinav* **42** (1978), 180-188.
- [19] J. H. E. Cohn, The diophantine equation $x^4 + 1 = Dy^2$, *Math. Comp.* **66** (1997), 1347-1351.
- [20] J. H. E. Cohn, The diophantine equation $x^4 - Dy^2 = 1$ II., *Acta Arith.* **78** (1997), 401-403.
- [21] J. Dawe, M. Lal, Solutions of the diophantine equation $x^2 - Dy^4 = k$, *Math. Comp.* **22** (1968), 679-682.
- [22] L. E. Dickson, Introduction to the Theory of Numbers, *Dover Publ., New York* (1957).
- [23] I. Gaál, On the resolution of some diophantine equations, *Computational Number Theory, Walter de Gruyter, Berlin-New York* (1991), 261-280.
- [24] Kant-Group, KASH Reference Manual, *Technische Universität Berlin* (1995).
- [25] W. Ljunggren, Zur Theorie der Gleichung $x^2 + 1 = Dy^4$, *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo* **5** (1942).
- [26] L. Maohua, On the Diophantine equation $D_1x^4 - D_2y^2 = 1$, *Acta Arith.* **76** (1996) 1-9.

- [27] L. J. Mordell, Diophantine equations, *Academic Press* (1969).
- [28] T. Nagell, Introduction to Number Theory, *Chelsea Publ. Co., New York* (1964).
- [29] T. N. Shorey, R. Tijdeman, Exponential diophantine equations, *Cambridge University Press* (1986).
- [30] A. Thue, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. reine angew. Math.* **135** (1909), 284-305.
- [31] Turán P., Gyarmati E., Számelmélet, *Nemzeti Tankönyvkiadó*, (1994).
- [32] N. Tzanakis, On the Diophantine equation $x^2 - Dy^4 = k$, *Acta Arith.* **46** (1986), 257-269.
- [33] W. S. Zhu, Necessary and sufficient conditions for the solvability of the Diophantine equation $x^4 - Dy^2 = 1$, *Acta Math. Sinica* **28** (1985), 681-683.