





Az $x^2 + q^{2m} = 2y^p$ diofantikus egyenletről

Tengely Szabolcs

2006. március 31.



Vizsgált esetek-eredmények

❖ Vizsgált esetek-eredmények

- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek



$$x^2 + q^{2m} = 2y^p \quad (1)$$

végességi állítás.



Vizsgált esetek-eredmények

❖ Vizsgált esetek-eredmények

- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek



$$x^2 + q^{2m} = 2y^p \quad (1)$$

végességi állítás.



fix $y : x^2 + q^{2m} = 2 \cdot 17^p$, teljes megoldás.



Vizsgált esetek-eredmények

❖ Vizsgált esetek-eredmények

- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végtességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek



$$x^2 + q^{2m} = 2y^p \quad (1)$$

végességi állítás.

- fix $y : x^2 + q^{2m} = 2 \cdot 17^p$, teljes megoldás.
- fix $q : x^2 + 3^{2m} = 2y^p$, teljes megoldás

Kapcsolódó eredmények



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények

- ❖ **Kapcsolódó eredmények**

- ❖ Véghességi tétel

- ❖ Jelölések

- ❖ Reducibilitás

- ❖ Egyenletrendszerek

- ❖ A H_p polinom

- ❖ Thue egyenletek

- ❖ Véges sok Thue egyenlet

- ❖ Rögzített y

- ❖ Rögzített q

- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet

- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$

- ❖ A $k = 0$ eset

- ❖ A $k = m$ eset

- ❖ "Kis" prímek

- ❖ "Nagy" prímek

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.

Kapcsolódó eredmények



❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.
- Le (2003): $x^2 + p^2 = y^n$, teljes megoldás ($p < 100$).

Kapcsolódó eredmények



❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.
- Le (2003): $x^2 + p^2 = y^n$, teljes megoldás ($p < 100$).
- Pink (2004): $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$, korlát n -re.

Kapcsolódó eredmények

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:

$p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.
- Le (2003): $x^2 + p^2 = y^n$, teljes megoldás ($p < 100$).
- Pink (2004): $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$, korlát n -re.
- Cohn (1996): $x^2 + 1 = 2y^n$, teljes megoldás.



Kapcsolódó eredmények

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.
- Le (2003): $x^2 + p^2 = y^n$, teljes megoldás ($p < 100$).
- Pink (2004): $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$, korlát n -re.
- Cohn (1996): $x^2 + 1 = 2y^n$, teljes megoldás.
- Pink, Tengely (2000): $x^2 + a^2 = 2y^n$, korlátok, teljes megoldás $1 \leq a \leq 1000$ és $3 \leq n \leq 80$ esetén.



Kapcsolódó eredmények

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

- Luca (2002): $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, teljes megoldás.
- Le (2003): $x^2 + p^2 = y^n$, teljes megoldás ($p < 100$).
- Pink (2004): $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$, korlát n -re.
- Cohn (1996): $x^2 + 1 = 2y^n$, teljes megoldás.
- Pink, Tengely (2000): $x^2 + a^2 = 2y^n$, korlátok, teljes megoldás $1 \leq a \leq 1000$ és $3 \leq n \leq 80$ esetén.
- Tengely (2004): $x^2 + a^2 = 2y^n$, teljes megoldás $3 \leq a \leq 501$, algoritmus.



Végességi tétel

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ **Végességi tétel**

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

Tétel. Csak véges sok (x, y, m, q, p) megoldása létezik (1)-nek, ahol $\gcd(x, y) = 1, m, x, y \in \mathbb{N}$ és $3 < p, q$ páratlan prímek, úgy, hogy y nem írható fel két egymást követő négyzetszám összegeként.



Végességi tétel

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ **Végességi tétel**

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

Tétel. Csak véges sok (x, y, m, q, p) megoldása létezik (1)-nek, ahol $\gcd(x, y) = 1, m, x, y \in \mathbb{N}$ és $3 < p, q$ páratlan prímek, úgy, hogy y nem írható fel két egymást követő négyzetszám összegeként.

Megjegyzés. Példák y két egymást követő négyzetszám összege esetre:

y	p	q
5	5	79
5	7	307
5	13	42641
5	29	1811852719
5	97	2299357537036323025594528471766399
13	7	11003
13	13	13394159
13	101	224803637342655330236336909331037067112119583602184017999
25	11	69049993
25	47	378293055860522027254001604922967
41	31	4010333845016060415260441

Jelölések

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ **Jelölések**

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

$$\delta_4 = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{if } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

$$\delta_8 = \begin{cases} 1 & \text{ha } p \equiv 1 \text{ vagy } 3 \pmod{8}, \\ -1 & \text{ha } p \equiv 5 \text{ vagy } 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

$$y = u^2 + v^2,$$

$$x = \Re((1+i)(u+iv)^p) =: F_p(u, v),$$

$$q^m = \Im((1+i)(u+iv)^p) =: G_p(u, v).$$

Reducibilitás

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ Jelölések

❖ **Reducibilitás**

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:

$p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

$$\begin{array}{l|l} (u - \delta_4 v) & F_p(u, v), \\ (u + \delta_4 v) & G_p(u, v). \end{array}$$

Reducibilitás

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ Jelölések

❖ **Reducibilitás**

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned}(u - \delta_4 v) & \mid F_p(u, v), \\ (u + \delta_4 v) & \mid G_p(u, v).\end{aligned}$$

Példa: $p = 5$.

$$F_5(u, v) = (u - v)(u^4 - 4u^3v - 14u^2v^2 - 4uv^3 + v^4),$$

$$G_5(u, v) = (u + v)(u^4 + 4u^3v - 14u^2v^2 + 4uv^3 + v^4).$$



Egyenletrendszerek

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

Létezik $k \in \{0, 1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} u + \delta_4 v &= q^k, \\ H_p(u, v) &= q^{m-k}, \end{aligned} \tag{2}$$

vagy

$$\begin{aligned} u + \delta_4 v &= -q^k, \\ H_p(u, v) &= -q^{m-k}, \end{aligned} \tag{3}$$

ahol $H_p(u, v) = \frac{G_p(u, v)}{u + \delta_4 v}$.

Megjegyzés. A tétel rossz esete $k = 0$ -nál van, ekkor y két egymást követő négyzetszám összege!



A H_p polinom

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

A $H_p(\pm q^k - \delta_4 v, v)$ polinom foka $p - 1$ és

$$H_p(\pm q^k - \delta_4 v, v) = \pm \delta_8 2^{\frac{p-1}{2}} p v^{p-1} + q^k p \hat{H}_p(v) + q^{k(p-1)},$$

ahol $\hat{H}_p \in \mathbb{Z}[X]$. A $H_p(X, 1) \in \mathbb{Z}[X]$ polinom irreducibilis,

$$H_p(X, 1) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^{p-1} \left(X - \tan \frac{(4k+3)\pi}{4p} \right),$$

ahol $k_0 = \left[\frac{p}{4} \right] \pmod{4}$.

Példa:

$$H_5(\pm q^k - \delta_4 v, v) = -20v^4 + 5q^k(8v^3 - 4v^2 q^k) + q^{4k}.$$

$$H_5(X, 1) = X^4 + 4X^3 - 14X^2 + 4X + 1 \text{ irreducibilis:}$$

$$H_5(X - 1, 1) = X^4 - 20X^2 + 40X - 20 \text{ teljesíti Eisenstein}$$

irreducibilitási kritériumát.



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

(2)-(3):

$$\pm \delta_8 2^{\frac{p-1}{2}} p v^{p-1} + q^k p \hat{H}_p(v) + q^{k(p-1)} = \pm q^{m-k}$$

Így a következő esetek léphetnek fel:



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

(2)-(3):

$$\pm \delta_8 2^{\frac{p-1}{2}} p v^{p-1} + q^k p \hat{H}_p(v) + q^{k(p-1)} = \pm q^{m-k}$$

Így a következő esetek léphetnek fel:

● $p = q, k = m - 1,$



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

(2)-(3):

$$\pm \delta_8 2^{\frac{p-1}{2}} p v^{p-1} + q^k p \hat{H}_p(v) + q^{k(p-1)} = \pm q^{m-k}$$

Így a következő esetek léphetnek fel:

- $p = q, k = m - 1,$
- $p \neq q, k = 0$ vagy $k = m.$



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

(2)-(3):

$$\pm \delta_8 2^{\frac{p-1}{2}} p v^{p-1} + q^k p \hat{H}_p(v) + q^{k(p-1)} = \pm q^{m-k}$$

Így a következő esetek léphetnek fel:

- $p = q, k = m - 1,$
- $p \neq q, k = 0$ vagy $k = m.$

Azaz:

$$H_p(u, v) = \pm p,$$

$$H_p(u, v) = \pm 1.$$

Thue egyenletek!



Thue egyenletek

$$F(x, y) = m, \deg F \geq 3, x, y \in \mathbb{Z}$$

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek**
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek



Thue egyenletek

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$F(x, y) = m, \deg F \geq 3, x, y \in \mathbb{Z}$$

- Thue (1909): véges sok megoldás, ineffektív



Thue egyenletek

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ **Thue egyenletek**
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$F(x, y) = m, \deg F \geq 3, x, y \in \mathbb{Z}$$

- Thue (1909): véges sok megoldás, ineffektív
- Baker (1968): effektív korlát $\max(|x|, |y|)$ -ra



Thue egyenletek

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ **Thue egyenletek**
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$F(x, y) = m, \deg F \geq 3, x, y \in \mathbb{Z}$$

- Thue (1909): véges sok megoldás, ineffektív
- Baker (1968): effektív korlát $\max(|x|, |y|)$ -ra
- Baker, Feldman, Sprindzuk, Stark, Győry, Papp, Brindza, Evertse, Bugeaud



Thue egyenletek

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ **Thue egyenletek**
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$F(x, y) = m, \deg F \geq 3, x, y \in \mathbb{Z}$$

- Thue (1909): véges sok megoldás, ineffektív
- Baker (1968): effektív korlát $\max(|x|, |y|)$ -ra
- Baker, Feldman, Sprindzuk, Stark, Győry, Papp, Brindza, Evertse, Bugeaud
- Bugeaud, Győry (1996-98): ismert legjobb korlát



Thue egyenletek

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ **Thue egyenletek**
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$F(x, y) = m, \deg F \geq 3, x, y \in \mathbb{Z}$$

- Thue (1909): véges sok megoldás, ineffektív
- Baker (1968): effektív korlát $\max(|x|, |y|)$ -ra
- Baker, Feldman, Sprindzuk, Stark, Győry, Papp, Brindza, Evertse, Bugeaud
- Bugeaud, Győry (1996-98): ismert legjobb korlát
- konkrét egyenletek, redukció: Bilu, Gaál, Hanrot, Mignotte, Pethő, Schulenberg, Stroecker, Tzanakis, Voutier, de Weger



Véges sok Thue egyenlet

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet**
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

Konkrét Thue egyenletnél véges sok $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldás létezik. A problémánkat visszavezettük Thue egyenletekre:

$$H_p(u, v) = \pm p,$$

$$H_p(u, v) = \pm 1.$$

A végességi állításhoz azt kell belátni, hogy véges sok Thue egyenlet léphet fel:
Baker-módszer.



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

Megoldások $3 \leq q^m \leq 501$ esetén:

$$(x, y, q, m, p) \in \{(3, 5, 79, 1, 5), (9, 5, 13, 1, 3), (13, 5, 3, 2, 3), (55, 13, 37, 1, 3), (79, 5, 3, 1, 5), (99, 17, 5, 1, 3), (161, 25, 73, 1, 3), (249, 5, 307, 1, 7), (351, 41, 11, 2, 3), (545, 53, 3, 3, 3), (649, 61, 181, 1, 3), (1665, 113, 337, 1, 3), (2431, 145, 433, 1, 3), (5291, 241, 19, 1, 3), (275561, 3361, 71, 1, 3)\}.$$

Korlátok p -re:

$$\begin{aligned} p &\leq 3803 \text{ ha } u + \delta_4 v = \pm q^m, q^m \geq 503, \\ p &\leq 3089 \text{ ha } p = q, \\ p &\leq 1309 \text{ ha } u + \delta_4 v = \pm q^m, m \geq 40, \\ p &\leq 1093 \text{ ha } u + \delta_4 v = \pm q^m, m \geq 100, \\ p &\leq 1009 \text{ ha } u + \delta_4 v = \pm q^m, m \geq 250. \end{aligned}$$



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ **Véges sok Thue egyenlet**
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

- $p = q, k = m - 1, H_p(u, v) = \pm p, \Rightarrow p \leq 3089$, véges sok Thue egyenlet, véges sok megoldás.



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ **Véges sok Thue egyenlet**
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

- $p = q, k = m - 1, H_p(u, v) = \pm p, \Rightarrow p \leq 3089$, véges sok Thue egyenlet, véges sok megoldás.
- $p \neq q, k = 0$ vagy $k = m, H_p(u, v) = \pm 1$:



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

- $p = q, k = m - 1, H_p(u, v) = \pm p, \Rightarrow p \leq 3089$, véges sok Thue egyenlet, véges sok megoldás.
- $p \neq q, k = 0$ vagy $k = m, H_p(u, v) = \pm 1$:
 - ❖ $k = 0$, ekkor y két egymást követő négyzetszám összege.



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

- $p = q, k = m - 1, H_p(u, v) = \pm p, \Rightarrow p \leq 3089$, véges sok Thue egyenlet, véges sok megoldás.
- $p \neq q, k = 0$ vagy $k = m, H_p(u, v) = \pm 1$:
 - ❖ $k = 0$, ekkor y két egymást követő négyzetszám összege.
 - ❖ $k = m, \Rightarrow p \leq 3803$, véges sok Thue egyenlet, véges sok megoldás.



Rögzített y

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

Ha y rögzített, akkor az $y = u^2 + v^2$ egyenletből véges sok (u, v) párt kapunk.

Meghatározzuk azokat a (q, m_0) párokat, amelyekre:

$$u \pm v = \pm q^{m_0}.$$

Az $x^2 + q^{2m} = 2 \cdot 17^p$ egyenlet esetében: $q = 3$ vagy $q = 5$ és $m = 1$.

$$x^2 + 3^2 = 2 \cdot 17^p,$$

$$x^2 + 5^2 = 2 \cdot 17^p.$$

Megoldás: $(x, y, q, m, p) = (99, 17, 5, 1, 3)$.

Rögzített q

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ **Rögzített q**
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$H_p(X, 1) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^{p-1} \left(X - \tan \frac{(4k+3)\pi}{4p} \right).$$

Körosztási test: $\mathbb{Q}(\zeta_p + \bar{\zeta}_p) \subset \mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}(\zeta_{4p} + \bar{\zeta}_{4p})$.

Fontos: a $H_p(u, v) = \pm 1, \pm p$ Thue egyenletek nem függnek q -től!

Módszerek: Bilu, Hanrot (1999, 2001)

Rögzített q

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$H_p(X, 1) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^{p-1} \left(X - \tan \frac{(4k+3)\pi}{4p} \right).$$

Körosztási test: $\mathbb{Q}(\zeta_p + \bar{\zeta}_p) \subset \mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}(\zeta_{4p} + \bar{\zeta}_{4p})$.

Fontos: a $H_p(u, v) = \pm 1, \pm p$ Thue egyenletek nem függnek q -től!

Módszerek: Bilu, Hanrot (1999, 2001)

- kis résztesteket használva,
- nem alapegységeket használva,
- az előző kettő kombinációja.



Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$x^2 + 3^{2m} = 2y^p. \quad (4)$$



Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$x^2 + 3^{2m} = 2y^p. \quad (4)$$

- Cohn (1993): $x^2 + 3 = y^n$.
- Arif és Muriefah (1998): $x^2 + 3^{2m+1} = y^n$. Megoldás:
 $(x, y, m, n) = (10 \cdot 3^{3t}, 7 \cdot 3^{2t}, 5 + 6t, 3)$.
- Luca (2000): $x^2 + 3^{2m} = y^n$. Megoldás:
 $x = 46 \cdot 3^{3t}, y = 13 \cdot 3^{2t}, m = 4 + 6t, n = 3$.



Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$x^2 + 3^{2m} = 2y^p. \quad (4)$$

- Cohn (1993): $x^2 + 3 = y^n$.
- Arif és Muriefah (1998): $x^2 + 3^{2m+1} = y^n$. Megoldás: $(x, y, m, n) = (10 \cdot 3^{3t}, 7 \cdot 3^{2t}, 5 + 6t, 3)$.
- Luca (2000): $x^2 + 3^{2m} = y^n$. Megoldás: $x = 46 \cdot 3^{3t}, y = 13 \cdot 3^{2t}, m = 4 + 6t, n = 3$.

Az $x^2 + 3^{2m+1} = 2y^p$ egyenlet egyszerűen kezelhető mod 8 :

$$4 \equiv 2y^p \pmod{8}.$$

Speciális eset: $p = q = 3$

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned}x &= F_3(u, v) = (u + v)(u^2 - 4uv + v^2), \\ 3^m &= G_3(u, v) = (u - v)(u^2 + 4uv + v^2).\end{aligned}$$

Speciális eset: $p = q = 3$

❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Végességi tétel

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ **Speciális eset:**
 $p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned}x &= F_3(u, v) = (u + v)(u^2 - 4uv + v^2), \\3^m &= G_3(u, v) = (u - v)(u^2 + 4uv + v^2).\end{aligned}$$

Létezik $k : 0 \leq k \leq m$

$$\begin{aligned}u - v &= \pm 3^k, \\u^2 + 4uv + v^2 &= \pm 3^{m-k}.\end{aligned}$$

Speciális eset: $p = q = 3$

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet

❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$

- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned}x &= F_3(u, v) = (u + v)(u^2 - 4uv + v^2), \\ 3^m &= G_3(u, v) = (u - v)(u^2 + 4uv + v^2).\end{aligned}$$

Létezik $k : 0 \leq k \leq m$

$$\begin{aligned}u - v &= \pm 3^k, \\ u^2 + 4uv + v^2 &= \pm 3^{m-k}.\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$6v^2 \pm 6(3^k)v + 3^{2k} = \pm 3^{m-k}.$$



Speciális eset: $p = q = 3$

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet

❖ Speciális eset: $p = q = 3$

- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned}x &= F_3(u, v) = (u + v)(u^2 - 4uv + v^2), \\ 3^m &= G_3(u, v) = (u - v)(u^2 + 4uv + v^2).\end{aligned}$$

Létezik $k : 0 \leq k \leq m$

$$\begin{aligned}u - v &= \pm 3^k, \\ u^2 + 4uv + v^2 &= \pm 3^{m-k}.\end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$6v^2 \pm 6(3^k)v + 3^{2k} = \pm 3^{m-k}.$$

Ha $k = 0$ vagy $k = m$, akkor $(x, y) = (\pm 1, 1)$.

Ha $k = m - 1 > 0$, akkor $3 \mid 2v^2 \pm 1$.



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned}u - v &= -3^{m-1}, \\ u^2 + 4uv + v^2 &= -3.\end{aligned}$$



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned}u - v &= -3^{m-1}, \\ u^2 + 4uv + v^2 &= -3.\end{aligned}$$

Parametrizáció:

$$\begin{aligned}u &= \frac{-\varepsilon}{2} \left((2 + \sqrt{3})^{t-1} + (2 - \sqrt{3})^{t-1} \right), \\ v &= \frac{\varepsilon}{2} \left((2 + \sqrt{3})^t + (2 - \sqrt{3})^t \right),\end{aligned}$$

ahol $t \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned} u - v &= -3^{m-1}, \\ u^2 + 4uv + v^2 &= -3. \end{aligned}$$

Parametrizáció:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-\varepsilon}{2} \left((2 + \sqrt{3})^{t-1} + (2 - \sqrt{3})^{t-1} \right), \\ v &= \frac{\varepsilon}{2} \left((2 + \sqrt{3})^t + (2 - \sqrt{3})^t \right), \end{aligned}$$

ahol $t \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
A lineáris egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2} \left((3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{t-1} + (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{t-1} \right) = \pm 3^{m-1}.$$



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned} u - v &= -3^{m-1}, \\ u^2 + 4uv + v^2 &= -3. \end{aligned}$$

Parametrizáció:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-\varepsilon}{2} \left((2 + \sqrt{3})^{t-1} + (2 - \sqrt{3})^{t-1} \right), \\ v &= \frac{\varepsilon}{2} \left((2 + \sqrt{3})^t + (2 - \sqrt{3})^t \right), \end{aligned}$$

ahol $t \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \{-1, 1\}$.
A lineáris egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2} \left((3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{t-1} + (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{t-1} \right) = \pm 3^{m-1}.$$

Rekurzió: $r_0 = r_1 = 3, r_t = 4r_{t-1} - r_{t-2}, t \geq 2$.



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned} u - v &= -3^{m-1}, \\ u^2 + 4uv + v^2 &= -3. \end{aligned}$$

Parametrizáció:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-\varepsilon}{2} \left((2 + \sqrt{3})^{t-1} + (2 - \sqrt{3})^{t-1} \right), \\ v &= \frac{\varepsilon}{2} \left((2 + \sqrt{3})^t + (2 - \sqrt{3})^t \right), \end{aligned}$$

ahol $t \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \{-1, 1\}$.
A lineáris egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2} \left((3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{t-1} + (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{t-1} \right) = \pm 3^{m-1}.$$

Rekurzió: $r_0 = r_1 = 3, r_t = 4r_{t-1} - r_{t-2}, t \geq 2$.

$$\begin{aligned} r_t &\equiv 0 \pmod{27} \iff t \equiv 5 \text{ or } 14 \pmod{18}, \\ r_t &\equiv 0 \pmod{17} \iff t \equiv 5 \text{ or } 14 \pmod{18}. \end{aligned}$$



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

$$\begin{aligned} u - v &= -3^{m-1}, \\ u^2 + 4uv + v^2 &= -3. \end{aligned}$$

Parametrizáció:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-\varepsilon}{2} \left((2 + \sqrt{3})^{t-1} + (2 - \sqrt{3})^{t-1} \right), \\ v &= \frac{\varepsilon}{2} \left((2 + \sqrt{3})^t + (2 - \sqrt{3})^t \right), \end{aligned}$$

ahol $t \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \{-1, 1\}$.
A lineáris egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2} \left((3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{t-1} + (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{t-1} \right) = \pm 3^{m-1}.$$

Rekurzió: $r_0 = r_1 = 3, r_t = 4r_{t-1} - r_{t-2}, t \geq 2$.

$$\begin{aligned} r_t &\equiv 0 \pmod{27} \iff t \equiv 5 \text{ or } 14 \pmod{18}, \\ r_t &\equiv 0 \pmod{17} \iff t \equiv 5 \text{ or } 14 \pmod{18}. \end{aligned}$$

Így két eset marad: $m = 2, k = 1 : (x, y) = (13, 5)$, és $m = 3, k = 2 : (x, y) = (545, 53)$.



A $k = 0$ eset

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

- ha $v \equiv 0 \pmod{3}$, akkor $H_p(1 - \delta_4 v, v) \equiv 1 \pmod{3}$,
- ha $v \equiv 1 \pmod{3}$ és $p \equiv 1 \pmod{4}$, akkor $H_p(1 - \delta_4 v, v) \equiv 1 \pmod{3}$,
- ha $v \equiv 1 \pmod{3}$ és $p \equiv 3 \pmod{4}$, akkor $H_p(1 - \delta_4 v, v) \equiv \pm 1 \pmod{3}$,
- ha $v \equiv 2 \pmod{3}$ és $p \equiv 1 \pmod{4}$, akkor $H_p(1 - \delta_4 v, v) \equiv \pm 1 \pmod{3}$,
- ha $v \equiv 2 \pmod{3}$ és $p \equiv 3 \pmod{4}$, akkor $H_p(1 - \delta_4 v, v) \equiv 1 \pmod{3}$.



A $k = 0$ eset

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

- ha $v \equiv 0 \pmod{3}$, akkor $H_p(1 - \delta_4 v, v) \equiv 1 \pmod{3}$,
- ha $v \equiv 1 \pmod{3}$ és $p \equiv 1 \pmod{4}$, akkor $H_p(1 - \delta_4 v, v) \equiv 1 \pmod{3}$,
- ha $v \equiv 1 \pmod{3}$ és $p \equiv 3 \pmod{4}$, akkor $H_p(1 - \delta_4 v, v) \equiv \pm 1 \pmod{3}$,
- ha $v \equiv 2 \pmod{3}$ és $p \equiv 1 \pmod{4}$, akkor $H_p(1 - \delta_4 v, v) \equiv \pm 1 \pmod{3}$,
- ha $v \equiv 2 \pmod{3}$ és $p \equiv 3 \pmod{4}$, akkor $H_p(1 - \delta_4 v, v) \equiv 1 \pmod{3}$.

Így a $H_p(1 - \delta_4 v, v) = 3^m$ egyenletnek nincs megoldása.



$A \ k = m$ eset

Lokális módszer segítségével: $p \equiv 5$ or $11 \pmod{24}$.

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset**
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek



A $k = m$ eset

Lokális módszer segítségével: $p \equiv 5$ or $11 \pmod{24}$.

$$H_p(3^m - \delta_4 v, v) = \delta_8 2^{\frac{p-1}{2}} p v^{p-1} + 3^m p \hat{H}_p(v) + 3^{m(p-1)} = 1.$$

Azaz,

$$\delta_8 2^{\frac{p-1}{2}} p \equiv 1 \pmod{3},$$

innen: $p \equiv 1, 5, 7, 11 \pmod{24}$.

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

A $k = m$ eset

Lokális módszer segítségével: $p \equiv 5$ or $11 \pmod{24}$.

$$H_p(3^m - \delta_4 v, v) = \delta_8 2^{\frac{p-1}{2}} p v^{p-1} + 3^m p \hat{H}_p(v) + 3^{m(p-1)} = 1.$$

Azaz,

$$\delta_8 2^{\frac{p-1}{2}} p \equiv 1 \pmod{3},$$

innen: $p \equiv 1, 5, 7, 11 \pmod{24}$.

Ha $m > 5$, akkor $\pmod{243}$ tekintve az egyenletet:

$$p = 8t + 1 : \quad 2^{4t} (8t + 1) v^{8t} \equiv 1 \pmod{243}.$$

$$p = 8t + 7 : \quad -2^{4t+3} (8t + 7) v^{8t+6} \equiv 1 \pmod{243}.$$

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset**
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek



"Kis" prímek

Nincs megoldás $p < 1000, p \equiv 5 \pmod{24}$ és $p \in \{131, 251, 491, 971\}$ esetén. Ezekben az esetekben van kis résztest a körosztási testeknél: Bilu-Hanrot módszere.

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek



"Kis" prímek

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

Nincs megoldás $p < 1000, p \equiv 5 \pmod{24}$ és $p \in \{131, 251, 491, 971\}$ esetén. Ezekben az esetekben van kis résztest a körosztási testeknél: Bilu-Hanrot módszere.

(Hanrot) Nincs megoldás

$p \in \{59, 83, 107, 179, 227, 347, 419, 443, 467, 563, 587, 659, 683, 827, 947\}$ esetén. A kis résztesteket használó módszer és a nem alapegységeket használó módszer kombinálásával.



"Kis" prímek

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

Nincs megoldás $p < 1000, p \equiv 5 \pmod{24}$ és $p \in \{131, 251, 491, 971\}$ esetén. Ezekben az esetekben van kis résztest a körosztási testeknél: Bilu-Hanrot módszere.

(Hanrot) Nincs megoldás

$p \in \{59, 83, 107, 179, 227, 347, 419, 443, 467, 563, 587, 659, 683, 827, 947\}$ esetén. A kis résztesteket használó módszer és a nem alapegységeket használó módszer kombinálásával.

Tétel. Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ diofantikus egyenlet összes megoldása:

$$(x, y, m, p) = (13, 5, 2, 3), (79, 5, 1, 5), (545, 53, 3, 3).$$



"Nagy" prímek

Baker-módszerrel korlátokat kaptunk p -re. A legkisebb $p \leq 1009$, az 1000-től kisebb prímeket az előzőekben kezeltük. Maradtak a prímek, amelyekre:
 $1000 < p \leq 3803$.

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek



"Nagy" prímek

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

Baker-módszerrel korlátokat kaptunk p -re. A legkisebb $p \leq 1009$, az 1000-től kisebb prímeket az előzőekben kezeltük. Maradtak a prímek, amelyekre:
 $1000 < p \leq 3803$.

$$A5 = L(p, 3, 242),$$

$$A16 = L(p, 3, 136) \cap L(p, 3, 193) \cap L(p, 3, 320) \cap L(p, 3, 697),$$

$$A22 = L(p, 3, 92) \cap L(p, 3, 134) \cap L(p, 3, 661),$$

$$A27 = L(p, 3, 866) \cap L(p, 3, 1417).$$



"Nagy" prímek

- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

Baker-módszerrel korlátokat kaptunk p -re. A legkisebb $p \leq 1009$, az 1000-től kisebb prímeket az előzőekben kezeltük. Maradtak a prímek, amelyekre:
 $1000 < p \leq 3803$.

$$A_5 = L(p, 3, 242),$$

$$A_{16} = L(p, 3, 136) \cap L(p, 3, 193) \cap L(p, 3, 320) \cap L(p, 3, 697),$$

$$A_{22} = L(p, 3, 92) \cap L(p, 3, 134) \cap L(p, 3, 661),$$

$$A_{27} = L(p, 3, 866) \cap L(p, 3, 1417).$$

Itt például A_5 -ben azok a $\pmod{5}$ osztályok vannak, amelyekre (4) megoldható, mivel $\text{ord}_{242} 3 = 5$.
 Ha $A_5 = \{0\}$ és $A_{16} = \{0\}$, akkor $m \equiv 0 \pmod{5 \cdot 16}$ és így $p \leq 1309$. Amennyiben a p prím nagyobb a korlátnál készen vagyunk.



❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Véghességi tétel

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:

$p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

Table 1: "Nagy" prímek levadászása.

p	mod	p	mod	p	mod	p	mod	p	mod
1013	16,27	1571	5,22	1973	16,22	2357	16,22	3011	5,22
1109	16,22	1613	16,22	1979	16,22	2459	16,22	3203	16,22
1181	16,22	1619	16,22	2003	16,22	2477	16,22	3221	16,22
1187	16,22	1667	16,22	2027	16,22	2531	5,22	3323	16,22
1229	16,22	1709	16,22	2069	16,22	2579	16,22	3347	16,22
1259	16,22	1733	16,22	2099	16,22	2693	16,22	3371	5,22
1277	16,22	1787	16,22	2141	16,22	2741	16,27	3413	16,22
1283	16,22	1811	5,22	2237	16,22	2861	16,22	3533	16,22
1307	16,22	1877	16,27	2243	16,22	2909	16,22	3677	16,22
1493	16,22	1931	5,22	2309	16,27	2957	16,22	3701	16,22
1523	16,22	1949	16,22	2333	16,22	2963	16,22		



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Véghességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

Table 1: "Nagy" prímek levadászása.

p	mod	p	mod	p	mod	p	mod	p	mod
1013	16,27	1571	5,22	1973	16,22	2357	16,22	3011	5,22
1109	16,22	1613	16,22	1979	16,22	2459	16,22	3203	16,22
1181	16,22	1619	16,22	2003	16,22	2477	16,22	3221	16,22
1187	16,22	1667	16,22	2027	16,22	2531	5,22	3323	16,22
1229	16,22	1709	16,22	2069	16,22	2579	16,22	3347	16,22
1259	16,22	1733	16,22	2099	16,22	2693	16,22	3371	5,22
1277	16,22	1787	16,22	2141	16,22	2741	16,27	3413	16,22
1283	16,22	1811	5,22	2237	16,22	2861	16,22	3533	16,22
1307	16,22	1877	16,27	2243	16,22	2909	16,22	3677	16,22
1493	16,22	1931	5,22	2309	16,27	2957	16,22	3701	16,22
1523	16,22	1949	16,22	2333	16,22	2963	16,22		

Néhány prím túlélte...



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset:
 $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

A maradék kilövése: például $p = 2381$ esetében az A_5 , A_{27} és A_{34} -beli információkat használjuk, a kínai maradéktétel segítségével.

$$A_5 = \{0, 1, 4\}, A_{27} = \{0, 14, 15, 17\}, A_{34} = \{0, 10\}.$$



- ❖ Vizsgált esetek-eredmények
- ❖ Kapcsolódó eredmények
- ❖ Végességi tétel
- ❖ Jelölések
- ❖ Reducibilitás
- ❖ Egyenletrendszerek
- ❖ A H_p polinom
- ❖ Thue egyenletek
- ❖ Véges sok Thue egyenlet
- ❖ Rögzített y
- ❖ Rögzített q
- ❖ Az $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$ egyenlet
- ❖ Speciális eset: $p = q = 3$
- ❖ A $k = 0$ eset
- ❖ A $k = m$ eset
- ❖ "Kis" prímek
- ❖ "Nagy" prímek

A maradék kilövése: például $p = 2381$ esetében az A_5 , A_{27} és A_{34} -beli információkat használjuk, a kínai maradéktétel segítségével.

$$A_5 = \{0, 1, 4\}, A_{27} = \{0, 14, 15, 17\}, A_{34} = \{0, 10\}.$$

$$\begin{aligned} \{CRT([a_5, a_{27}, a_{34}], [5, 27, 34]) : a_5 \in A_5, a_{27} \in A_{27}, a_{34} \in A_{34}\} = \\ = \{0, 44, 204, 476, 486, 554, 690, 986, 1394, 1404, 1836, 1880, 1904, \\ 2040, 2390, 2526, 2754, 3230, 3240, 3444, 3716, 3740, 3876, 4226\}. \end{aligned}$$

A legkisebb nem nulla maradék 44, azaz $m \geq 44$, ekkor a korlát $p \leq 1309$, ellentmondás.



❖ Vizsgált
esetek-eredmények

❖ Kapcsolódó
eredmények

❖ Véghességi tétel

❖ Jelölések

❖ Reducibilitás

❖ Egyenletrendszerek

❖ A H_p polinom

❖ Thue egyenletek

❖ Véges sok Thue
egyenlet

❖ Rögzített y

❖ Rögzített q

❖ Az
 $x^2 + 3^{2m} = 2y^p$
egyenlet

❖ Speciális eset:

$p = q = 3$

❖ A $k = 0$ eset

❖ A $k = m$ eset

❖ "Kis" prímek

❖ "Nagy" prímek

Table 2: Maradék prímek levadászása.

p	r_m	CRT	p	r_m	CRT	p	r_m	CRT
1019	384	5,16,27	2267	448	5,16,69	3389	170	5,27,34
1061	176	5,16,39	2339	208	5,16,39	3461	116	5,16,39
1091	580	5,16,27	2381	44	5,27,34	3467	336	5,16,27
1163	586	5,27,34	2411	180	5,16,27	3491	850	5,27,34
1301	416	5,16,39	2549	320	5,16,27	3539	112	5,16,39
1427	270	5,27,34	2699	640	5,16,69	3557	176	5,16,39
1451	340	5,16,27	2789	204	5,27,34	3581	150	5,27,34
1499	112	5,16,39	2819	352	5,16,27	3659	112	5,16,39
1637	121	5,27,34	2837	131	5,27,34	3779	72	5,27,34
1901	304	5,16,39	2843	136	5,27,34	3797	416	5,16,39
1907	102	5,27,34	3083	340	5,27,34	3803	136	5,27,34
1997	170	5,27,34	3251	580	5,16,27			
2213	170	5,27,34	3299	64	5,16,39			