Elemi matematika (algebra és számelmélet)

I

Elsőfokú (paraméteres) egyenletek, egyenletrendszerek

1. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán, ahol p valós paraméter!
$$5x + p + 8 = p(x + 2)$$

2. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán, ahol p valós paraméter!
$$p^2 - 6px - p + 3 = -9x$$

3. Oldja meg (és tárgyalja az a, b valós paraméterek értékére) az alábbi egyenletet!
$$\frac{4ax + 1}{b} - 5 = \frac{3x}{b}$$

4. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!
$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 52 \\ 2(5x - 1) + 3(4 - y) &= 26 \end{aligned}$$

5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a természetes számok körében!
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 5z &= 27 \\ x + y + z &= 11 \end{aligned}$$

6. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!
$$\begin{aligned} \frac{1}{x - 2y} - \frac{2}{2x - y} &= 3 \\ \frac{-2}{x - 2y} + \frac{5}{2x - y} &= -5 \end{aligned}$$

7. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!
$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{3} - \frac{y - 3}{4} &= 3 \\ \frac{3}{x + 2} - \frac{1}{y - 3} &= 0 \end{aligned}$$

8. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán, ha a valós paraméter!
$$\begin{aligned} ax + y &= a^2 \\ x + ay &= 1 \end{aligned}$$

9. Négy valós szám összege 64. Ha az első számból elveszünk hármat, a másodikhoz hozzáadunk hármat, a harmadikat szorozzuk hárommal, a negyediket pedig osztjuk hárommal, akkor egyenlő számokat kapunk. Határozza meg ezeket a számokat!

10. Az iskola tanulóinak 9%-a sportol: a fiúknak 15%-a, a lányoknak 5%-a. Az iskolában összesen 800 gyerek tanul. Hány fiú és hány lány jár az iskolába?

11. Egy osztály tanulói matematikadolgozatot írtak, melynek során három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladatot összesen 22-en oldották meg, közülük a második feladatot is megoldotta 16 tanuló. Azok, akik mindhárom feladatot megoldották, háromszor annyian voltak, mint akiknek csak az első feladat sikerült. Azok, akik csak az első két feladatot tudták megoldani, két és félszer annyian voltak, mint akik csak az elsőt és a harmadikat. Hány tanuló oldotta meg mindhárom feladatot?

II

Másodfokú (paraméteres) egyenletek, egyenletrendszerek

1. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x^2-x}{x^2-2x+1} = \frac{x^2+1}{1-x^2}$$

2. Oldja meg az alábbi egyenletet, ahol a p paraméter valós számot jelöl!

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{p}{x^2+2x} + \frac{1}{2x-x^2} = 0$$

   Van-e olyan p valós szám, amely esetén két különböző gyöke van az egyenletnek?
   Van-e olyan p valós szám, amely esetén nincs gyöke az egyenletnek?

3. Mekkora az alábbi, valós számok halmazán értelmezett egyenlet gyökei különbségének az abszolútértéke?

$$x^2 + 2(1-p^2)x + p^4 = 2p^2 + 8$$

4. Bizonyítsa be, hogy az alábbi egyenlet gyökeinek különbsége k minden értékére ugyanakkora!

$$5x^2 - 2(5k+3)x + 5k^2 + 6k + 1 = 0$$

5. Ha egy kétjegyű számot elosztunk a számjegyeinek szorzatával, akkor a hányados öt lesz, a maradék kettő. Ha ugyanezt a (kiindulási) számot csökkentem a számjegyek felcseréléséből keletkezett számmal, akkor a különbség 45 lesz. Melyik ez a szám?

6. Két szám számtani közepe 24-gyel kisebb az egyik számnál, szorzatuk 18-ad része pedig 12-vel nagyobb a másik számnál. Melyek ezek a számok?

7. Két osztály színházba ment ugyanazon a hétvégén. Az egyik osztály 31250 Ft-ot fizetett a jegyekért. A másik osztályból 3-mal kevesebben mentek el, de ők 30 Ft-tal többet fizettek egy jegyért, így összesen 28160 Ft-ba került a jegyük. Hány jegyet vettek az egyes osztályok és darabonként milyen áron? (A jegyek helytől függetlenül azonos árban voltak.)

8. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned} x+y+z &= -2 \\ xy+z &= -3 \\ 3xyz &= 6 \end{aligned}$$

9. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned} x^2 &= 2y+8 \\ y^2 &= 2x+8 \end{aligned}$$

10. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned} 2x &= 12-y \\ 2\sqrt{x} &= y \end{aligned}$$

11. Mely a valós számokra van pontosan egy valós megoldása a következő egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} x - y &= a(1 + xy) \\ 2 + x + y + xy &= 0 \end{aligned}$$

12. Két várost egy 195 km hosszú vasútvonal köt össze. Ezen a vonalon személyvonattal is és gyorsvonattal is el lehet jutni egyik városból a másikba. A személyvonat átlagsebessége 18 km/h-val kisebb a gyorsvonaténál, menetideje így 45 perccel több. Határozza meg a vonatok átlagsebességét!

III

Exponenciális és logaritmikus egyenletek

1. Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$5^{3x} + 9 \cdot 5^x + 27 \cdot 5^{-3x} = 64 - 27 \cdot 5^{-x}$$

2. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$3^{2x^2+2x-12} = 9^{\frac{x-2}{x+3}}$$

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

   (a) $\lg(x+7) + \lg(3x+1) = 2$

   (b) $2^x = 3^{2x+1}$

4. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

   (a) $0,5^{2-\log_{0,5} x} = 3$, ahol $x > 0$ és $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $7 + 6\log_x(1/2) = \log_2 x$, ahol $1 < x \leq 2$ és $x \in \mathbb{R}$.

5. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$(x-2) \cdot \lg(x^2 - 8) = 0$$

6. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$6 \cdot \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = \left(x^2\right)^{\log_3 x} - 6075$$

7. A p, q, r pozitív számokról tudjuk, hogy összegük 222, $\lg p$ és $\lg r$ számtani közepe $\lg q$, illetve $\lg \frac{r}{p} = 2$. Melyek ezek a számok?

8. A p valós paraméter mely értékei mellett oldható meg az egyenlet? Mi a megoldás?

$$\log_{p^2-x^2}(p^2x^2 - 1) = 1$$

9. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} &= 200 \\ 5^{2\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} &= 689 \end{aligned}$$

10. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y valós számok!

$$\begin{aligned} 10^y &= x - 3 \\ \lg(x^2 - 4x + 3) &= 2y + 1 \end{aligned}$$

11. Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} \lg(x+y) &= 2\lg x \\ \lg x &= \lg 2 + \lg(y-1) \end{aligned}$$

IV

Gyökös kifejezéseket tartalmazó egyenletek

1. Milyen valós x-ekre értelmezhetők az alábbi kifejezések?

$$\sqrt{x^2-10x+25} \quad \frac{1}{x^2-4x-21} \quad \frac{1}{\sqrt{-x^2+9x-18}}$$

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}=2$$

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\sqrt{x+2}=-x$$

4. Igazolja, hogy csak egyetlen megoldása van az alábbi egyenletnek!

$$\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$$

5. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+10}-\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-11}$$

6. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=5$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y-5} &= -2x+11\\ \sqrt{x-y+5} &= 3\end{aligned}$$

8. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned}2\sqrt{y-6x} &= x+3\\ \sqrt{y-1} &= x+2\end{aligned}$$

9. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{6x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{6x}} &= \frac{5}{2}\\ y-x &= 44\end{aligned}$$

V

Abszolútértékes egyenletek

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

   (a)
   $$x^2 = |x-6|$$
   (b)
   $$x^2 - |x| = 6$$
   (c)
   $$|x - |x|| = 2x + 1$$

2. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

   (a) $|\frac{|x|-1}{3|x|+2}| = 6$

   (b) $|x-4| + |5x-20| + |2x+3| = 51$

3. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
   $$||||x|-3|-2|-1| = 4$$

4. Határozza meg, hogy a p valós paraméter különböző értékeire hány megoldása lesz az alábbi egyenletnek a valós számok halmazán!
   $$|||2x-1|-2|-1| = p$$
   Mely valós értékek elégítik ki az egyenletet a p paraméter azon értéke(i) mellett, amikor az egyenletnek páratlan sok megoldása van?

5. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

   (a) $||x-2|-5| = 1$

   (b) $|||x|-3|-2| = 4$

6. Milyen $p > 0$ paraméter esetén van az alábbi egyenletnek pontosan egy valós gyöke?
   $$x \cdot |\ x - 2p\ | - p - 1 = 0$$

7. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert!
   $$\begin{aligned} |\ x-1\ | + |\ y-5\ | &= 1 \\ y &= 5 + |\ x-1\ | \end{aligned}$$

8. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert!
   $$\begin{aligned} |\ x+1\ | + |\ y-1\ | &= 5 \\ |\ x+1\ | &= 4y-4 \end{aligned}$$

9. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!
   $$\begin{aligned} \sqrt{x^2-2x+1} + 1 &= 2y \\ |\ x\ | &= 1 - y^2 \end{aligned}$$

VI

Trigonometrikus egyenletek

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

   (a)
   $$\cos 2x + 4\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$$

   (b)
   $$2\sin^2 x - \cos x = 2 \qquad (\text{a } [-\pi, \pi] \text{ halmazon oldja meg})$$

   (c)
   $$2\cos^3 x - 5\cos^2 x - 3\cos x = 0$$

   (d)
   $$\sin x - \cos^2 x = -1$$

2. Oldja meg az egyenletet a valós számpárok halmazán!
   $$\sin(x+y) + \cos(x-2y) = 2$$

3. Határozza meg az α valós paraméter értékét úgy, hogy a
   $$4x^2 - 4(\sin\alpha + \cos\alpha)x + 1 + \sin\alpha = 0$$
   egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke legyen!

4. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!
   $$6\sin x - 8\cos x = 5$$

5. Hány (x, y) rendezett valós számpár megoldása van az alábbi egyenletrendszernek, ha x és y is a $[0, 2\pi]$ zárt intervallum elemei?
   $$\begin{aligned} \sin x \cdot \cos y &= 0 \\ \sin x + \sin^2 y &= 1/4 \end{aligned}$$

6. Oldja meg az $0 < x < \frac{\pi}{2}$ halmazon az alábbi egyenletet!
   $$\tan x + \tan^2 x + \cot x + \cot^2 x = 4$$

7. Mely valós p paraméter esetén van az alábbi egyenletnek megoldása, amelyre $x \in (0, \pi)$ teljesül?
   $$\sin 3x = p \sin x$$

8. Oldja meg a következő egyenletrendszert!
   $$\begin{aligned} xy &= 1 \\ x + y - \cos^2 z &= -2 \end{aligned}$$

VII

Egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek

1. Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtenséget?

$$(x-1)^3-(x+1)^3>-8$$

2. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

   (a)
   $$\sqrt{x^2-3x}\cdot\log_{0.1}(x+2)<0.$$

   (b)
   $$0,5x+\sqrt{x+3}\leq 2,5$$

3. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

   (a)
   $$\lg x<2$$

   (b)
   $$4x<5-x^2$$

   (c)
   $$0,5^{|x-3|}<0,25$$

4. Oldja meg x-re a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket, ahol p valós paraméter!

   (a)
   $$6p+x\geq 7\sqrt{px}$$

   (b)
   $$(p+3)\sqrt{5-x}-2<0$$

5. Az a valós paraméter mely értékeire lesz a következő egyenlőtlenség-rendszernek egy valós számpár a megoldása, és ezekre az értékekre mi az egyenlet megoldása?

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2x &\leq 1\\ x-y+a &= 0\end{aligned}$$

6. Határozza meg a két egyenlőtlenség közös megoldásait a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned} 3x+5 &> 3-\frac{4x-19}{7}\\ |x+3| &\leq 8\end{aligned}$$

7. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$2\sqrt{|1-2x|}\geq 1+x$$

8. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget! A $[-1, 1]$ intervallum része-e a megoldásnak?

$$3^{2x} < 7 \cdot 3^x + 9 \cdot \log_3 9$$

9. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned} 4\cos x &\le 3 + \cos 2x \\ 2\sin x &\le 5 + \cos 2x \end{aligned}$$

10. Állítsuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendbe, majd bontsuk rendre 1-gyel növekvő elemszámú csoportokra, a felbontást az alábbi módon kezdve:

$$(1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10), \ldots$$

   (a) A 100-adik csoportnak melyik szám az első eleme?

   (b) Az 1851 hányadik csoport hányadik eleme?

VIII

Magasabbfokú egyenletek

1. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$x\left(\frac{x-3}{3}\right)^2+\frac{1}{3}(x-2)(x+2)=\frac{1+(x-1)^3}{9}$$

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-7}=0$$

3. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$x^3-6x^2+12x+19=0$$

4. Oldja meg az egyenletet a valós számpárok halmazán!

$$4x^4-12x^2y+10y^2+5=0$$

5. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz az alábbi egyenletnek pontosan két valós megoldása?

$$x^4+(p+1)x^2+p^2+2p+\frac{1}{4}=0$$

6. Mely pozitív egész x-ekre teljesül az alábbi egyenlőség?

$$x^3-12x^2+17x+30=0$$

7. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$13\sqrt{5}\cdot x+3\sqrt{5}\cdot x^4=10\sqrt{5}\cdot x^3$$

8. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=82$$

9. Határozza meg azt a legalacsonyabb fokú egész együtthatós egyenletet, amelynek az egyik gyöke $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

10. Határozza meg a következő egyenlet valós gyökeit!

$$2x^4+4x^3+3x^2+x-1=0$$

IX

Kombinatorika I

1. Egy könyvespolcra 50 könyv fér, amiből a 20 verseskönyvet egymás mellé szeretnénk rakni. Hányféleképpen lehetséges ez?

2. A tombolán 50 jegyet adtak el. A sorsoláson először 3 egyforma kisebb nyereményt sorsoltak ki, majd a megmaradt számok között 2 egyforma nagyobb nyereményt, végül az ezután megmaradt számok között a főnyereményt. A nyerő tombolajegyek hányféle változata lehetséges?

3. A könyvtár egyik olvasója 2 könyvet választ a polcról. Ezek sorrendjét is megkülönböztetve, 2862 lehetősége van az olvasmányai megválasztására. Hány könyv van ezen a polcon?

4. Az osztálykiránduláson egy öttagú csoportot bíznak meg a reggeli beszerzésével.

   (a) Az öt tanulóból hányféleképpen állítható össze az a csoport, amelyik a boltba megy? (A tagok száma 1-től 5-ig bármennyi lehet.)

   (b) Ha az ötből csak hárman mehetnek a boltba, akkor hányféle csoport alakulhat?

   (c) Áginál van a pénz, ezért neki feltétlenül a háromtagú csoportban kell lennie. Így hányféle csapat jöhet létre?

5. Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő szombat délutánonként együtt teniszeznek. Mikor megérkeznek a teniszpályára, mindegyik fiú kezet fog a többiekkel.

   (a) Hány kézfogás történik egy-egy ilyen közös teniszezés előtt?

   (b) Legutóbb Dani és Ernő együtt érkezett a pályára, a többiek különböző időpontokban érkeztek. Hány különböző sorrendben érkezhettek ezen alkalommal?

   (c) A fiúk mindig páros mérkőzéseket játszanak, ketten kettő ellen. (Egy páron belül a játékosok sorrendjét nem vesszük figyelembe, és a pálya két térfelét nem különböztetjük meg.) Hány különböző mérkőzés lehetséges?

6. Öt egyetemista: Bence, Kati, Márti, Pali és Zoli nyáron munkát szeretne vállalni egy üdülőhelyen. A helyi újságban több megfelelőnek látszó munkahelyet is találtak, mégpedig a következőket: három éttermet, amelyekbe csak fiúkat, két fodrászatot, amelyekbe csak lányokat vesznek fel és két fagyizót, amelyekbe viszont alkalmaznak fiúkat és lányokat is. (Egyik munkahelyen sincs létszámkorlátozás.)

   (a) Hányféleképpen helyezkedhet el az öt fiatal, ha mind az öten egymástól függetlenül döntenek az állásokról, és minden fiatal csak egy állást vállal? Az azonos típusú munkahelyeket is megkülönböztetjük.

   (b) Hányféleképpen helyezkedhet el az öt fiatal, ha a 2 lány nem akar ugyanazon a munkahelyen dolgozni, és a 3 fiú közül is bármelyik kettő különböző munkahelyre szeretne menni?

   (c) Bence, Kati, Pali és Zoli asztaliteniszben körmérkőzést akarnak játszani. (A körmérkőzés azt jelenti, hogy mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést játszik.) Az első este csak három mérkőzést játszanak le.
   Hányféle lehet a három mérkőzésben a játékosok párosítása, ha tudjuk, hogy négyük közül pontosan két játékos két-két mérkőzést játszott?

7. Egyszerre feldobunk hat, különböző színű szabályos dobókockát. Hányféleképpen dobhatunk egy dobással legalább 34-et?

8. Hány olyan tízjegyű pozitív szám van, amelynek minden számjegye a $\{0, 8\}$ halmaz eleme? Továbbá, írja fel a 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és 8-as számjegyeket tartalmazza!

9. Adott két párhuzamos egyenes, e és f. Kijelölünk e-n öt, f-en pedig négy különböző pontot.
   Hány (e-től és f-től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont? Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?

10. Hatjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen hatjegyű számjegy képezhető?

X

Kombinatorika II

1. Egy kis boltban három különböző ízesítésű csokoládé kapható: epres, málnás és narancsos. Ha összesen öt tábla csokoládét akarunk ebben a boltban vásárolni, és csak az ízesítéseket vesszük figyelembe, akkor hány különböző lehetőségünk van?

2. Hányféleképpen lehet a cirkuszban két oroszlánt, három zebrát és négy elefántot úgy sorba állítani, hogy oroszlán és zebra ne kerüljön egymás mellé. (Az azonos fajú állatokat nem különböztetjük meg.)

3. Hány olyan ötjegyű szám van, amely az 1-es és 2-es számjegyet is tartalmazza?

4. Egy szabályos játékkocka két oldalára 0-át, két oldalára 2-est, két oldalára 4-est írunk. A dobókockát ötször egymás után feldobjuk, és a dobások eredményét rendre feljegyezzük.
   (a) Hányféle számötöst jegyezhetünk fel?
   (b) Hányféle számötös esetében lehet a dobott pontok összege 10?

5. Adott az $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz.
   (a) Adja meg az A halmaz háromelemű részhalmazainak a számát!
   (b) Az A halmaz elemeiből hány olyan öttel osztható hatjegyű szám írható fel, amelyben a számjegyek nem ismétlődhetnek?
   (c) Az A halmaz elemeiből hány olyan hatjegyű szám írható fel, amely legalább egy egyest tartalmaz?

6. Hat úszó: A, B, C, D, E és F indul a 100 méteres pillangóúszás döntőjében. Egy fogadóirodában ennek a döntőnek az első, a második és a harmadik helyezettjére lehet tippelni egy szelvényen. Az a fogadószelvény érvényes, amelyen megnevezték az első, a második és a harmadik helyezettet. Ha a fogadó valamelyik helyezésre nem ír tippet, vagy a hat induló nevén kívül más nevet is beír, vagy egy nevet többször ír be, akkor szelvénye érvénytelen. Holtverseny nincs, és nem is lehet rá fogadni.
   (a) Hány szelvényt kell kitöltenie annak, aki minden lehetséges esetre egy-egy érvényes fogadást akar kötni?
   (b) A döntő végeredménye a következő lett: első az A, második a B, harmadik a C versenyző.
   Ha egy fogadó az összes lehetséges esetre egy-egy érvényes szelvénnyel fogadott, akkor hány darab legalább egytalálatos szelvénye lett? (Egy szelvényen annyi találat van, ahány versenyző helyezése megegyezik a szelvényre írt tippel.)

7. Határozza meg, hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amelynek számjegyei között nem szerepel a 0, de szerepel legalább egyszer az 1.

8. Egy kockával öt egymás utáni dobásból álló dobássorozatokat dobunk. Hány olyan dobássorozat van, amelyben éppen egy 1-es és egy 2-es dobás fordul elő (a sorozaton belül a dobások sorrendjét is figyelembe vesszük)?

9. Állapítsa meg a műveletek elvégzése nélkül, hogy hány tagból áll a hatványozás és összevonás után a következő kifejezés: $(2a - b + 3c)^5$

XI

Kombinatorika III

1. Egy érmével bizonyos számú dobásból álló sorozatokat dobunk. Ha a dobássorozat dobásainak számát 2-vel megnöveljük, a különböző sorozatok száma 384-gyel növekszik. Mennyi dobásból állt az eredeti dobássorozat? (A sorrend is számít.)

2. Két játékos bizonyos számú sakkjátszma lejátszásában egyezik meg. Az egyik játékos utólag kéri, hogy növeljék meg 1-gyel a játszmák számát, mert akkor a győzelmek, döntetlenek és vereségek lehetséges változatainak a száma 9-cel megnőne (az egyes eredmények sorrendjét ennél a megállapításnál nem veszi figyelembe). Hány játszmában állapodtak meg eredetileg?

3. Hányféleképpen tudunk kitölteni egy totószelvényt úgy, hogy az első 13 mérkőzés eredménye közül épp 11-et találjunk el?

4. Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.)

5. Csaba egytől kilencig a számokat felírta egy-egy kártyára. Az első hat kártya felhasználásával $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ két háromjegyű számot készített. Hívjunk egy ilyen számpárt duónak. (Például egy lehetséges duó: $415; 362$.) A hat számból több ilyen duót lehet készíteni. Két duót egyenlőnek tekintünk, ha ugyanaz a két különböző háromjegyű szám alkotja. Például a $415; 362$ és a $362; 415$ duó egyenlők, de a $362; 145$ már egy másik duó. Hány különböző duót lehet a hat számkártyából elkészíteni?

6. A Kovács családban négy embernek kezdődik a keresztneve B betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen. A család tagjairól még a következőket tudjuk:

   - csak Bea és Barbara jár teniszezni is és kerékpározni is;
   - egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem;
   - Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani - sikertelenül.

   (a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak?

   (b) Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.
   Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság?

   (c) Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.
   A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

7. A 11.c osztály a következő tanévre nyolc kötelező olvasmányt kapott. Ezek közül kettő ugyanannak a szerzőnek a munkája, a többi szerzőnek csak egy-egy könyve van az olvasmányok között. Andi még nyáron szeretne elolvasni a nyolc könyv közül hármat. A nyarat a nagyszüleinél tölti, ezért a kiválasztott három könyvet magával viszi.

   (a) Hányféleképpen választhatja ki Andi, hogy melyik három könyvet vigye magával, ha azt szeretné, hogy a három könyv három különböző szerző műve legyen?

   (b) Az osztály tanulói közül hatan: Andi, Barbara, Csilla, Dani, Elek és Feri moziba mennek. Hányféleképpen ülhetnek le hat egymás melletti székre úgy, hogy semelyik két lány ne üljön egymás mellett?

8. Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld. Visszatevés nélkül kihúzunk a dobozból 3 golyót. Hányféleképpen húzhatunk úgy, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű legyen?
   Tegyük fel továbbá, hogy a golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Hányféle húzás létezik visszatevés nélkül úgy, hogy a 3 golyón található szám összege osztható legyen 3-mal?

9. Hányféleképpen foglalhat helyet három fiú és három lány egymás melletti széken úgy, hogy a három lány ne három egymás melletti széken üljön?

10. Egy kutatóintézetben 8 férfi és 9 nő dolgozik főállásban. Egy megbeszélés előtt, amire csak ez a 17 főállású kutató volt hivatalos, a különböző nemű kutatók között 45 kézfogás történt. Tudjuk, hogy minden nő pontosan 5 férfival fogott kezet, és nincs két nő, aki pontosan ugyanazzal az öttel. Lehetséges-e, hogy volt két olyan férfi is, aki senkivel sem fogott kezet?

11. Egy teniszversenyen öt ázsiai és tíz európai versenyző indult. Mindenki mindenkivel játszott. Az ázsiaiak $\frac{4}{3}$-szor annyi mérkőzést nyertek, mint az európaiak. Hány európai győzelem volt?

XII

Kombinatorika IV

1. Mutassa meg, hogy egy 37 fős társaságban biztosan lesz négy olyan ember, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat!

2. Hányan járnak legalább abba az edzőterembe, ahol biztosan van három személy, aki az év azonos napján született?

3. Egy kisvárosban 3800 ember él. Legalább hány emberről mondható el, hogy ugyanakkor van a születésnapjuk?

4. Hat osztálytárs részt vesz a ”találjuk el a célt” versenyben. Mutassuk meg, hogy közülük legalább kettőnek azonos számú találata van, ha a találatok száma összesen 14.

5. Bizonyítsa be, hogy 7 páratlan egész szám között mindig van 2, amelyek különbsége osztható 12-vel!

6. Egy 8×8-as sakktáblára hány bábut kell felrakni, hogy biztosan legyen egy sor vagy egy oszlop, amelyen minimum három bábu áll?

7. Legyen a, b és c három egész szám! Bizonyítsuk be, hogy az $abc(b-a)(c-a)(c-b)$ szorzat osztható 6-tal!

8. Egy iskolában két osztály 66 tanulója kémia, fizika, angol vagy biológia fakultációra jár. A tanulók között nincs olyan öt, aki azonos fakultációra jár és különböző a matematikaosztályzata. Igazolja, hogy található egy osztályból három azonos fakultációra járó és azonos matematikajeggyel rendelkező tanuló!

9. Egy kerületben 123 ember lakik. Életkoraik összege években 3813. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható a kerületből 100 lakos úgy, hogy életkoraik összege nem kevesebb mint 3100!

10. Bizonyítsa be, hogy pozitív páros n esetén teljesül az alábbi egyenlőség!

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$$

11. Fejezze ki a $p = x + \frac{1}{x}$ paraméter segítségével az alábbi kifejezéseket ($x \neq 0$, $n = 2, 3, 4, 6$)!

$$x^n + \frac{1}{x^n}$$

12. Hány elemnek a másod- és harmadosztályú kombinációira teljesül az alábbi egyenlet?

$$2\binom{x}{2} = \binom{x}{3}$$

13. Teljesülhet-e az alábbi összefüggés három egymást követő binomiális együtthatóra?

$$\frac{1}{\binom{n}{k-1}} + \frac{1}{\binom{n}{k+1}} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

XIII

Gráfelmélet

1. A Pécsre közlekedő vonat első osztályú fülkéjében hatan utaznak egy tudományos konferenciára. A vonat indulása után kiderül, hogy a hat ember között van kettő, aki mindenkit ismer az útitársak közül, a többiek pontosan négy-négy útitársat ismernek régebbről. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

   (a) Szemléltesse gráffal az ismeretségeket!

   (b) Az ismerősök a fülkébe lépve kézfogással köszöntötték egymást. Hány kézfogás történt?

   (c) A hat útitárs három kétágyas szobában nyer elhelyezést. Hányféle szobabeosztást lehet készíteni a hat útitársnak, ha a szobák között nem teszünk különbséget?

2. Ha egy nyolc csúcsból álló egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő. Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

3. Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal "összekötünk" a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

   (a) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf!

   (b) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan!

4. A H halmaz a tízpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik:
   Ha egy (tízpontú egyszerű) gráfnak legfeljebb 8 *éle van, akkor nem tartalmaz kört.*

   (a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

   (b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

   (c) Egy tízpontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. (Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.) Hányféleképpen lehet kiválasztani három élt úgy, hogy azok kört alkossanak?

5. Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)! Válaszait indokolja!

   (a) Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú.

   (b) Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.

   (c) Van olyan fagráf, amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

6. Egy hatfős társaság tagjai A, B, C, D, E és F.
   Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös).
   A válaszként kapott hat szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A-nak legalább annyi ismerőse van, mint B-nek, B-nek legalább annyi ismerőse van, mint C-nek, és így tovább, E-nek legalább annyi ismerőse van, mint F-nek.
   Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket!

7. Egy teljes gráfból 45 élt elhagyva egy fagráfot kaptunk. Hány pontja van ennek a gráfnak? (A teljes gráf olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontját él köti össze.)

8. Döntse el, hogy az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis!
A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van.
B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros.
C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.
D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

9. Öt, egymástól távol eső tanya között kábeleket feszítenek ki, bármely két tanya között legfeljebb egyet.

   (a) Elvileg összesen hány különböző hálózatot lehetséges létrehozni a tanyák között? (A hálózatban a kifeszített kábelek száma 0-tól 10-ig bármennyi lehet. Két hálózatot akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan összeköttetés, amely az egyikben létezik, de a másikban nem.)

   (b) Takarékossági okokból csak 4 kábelt feszítenek ki úgy, hogy a hálózat azért összefüggő legyen. (Összefüggőnek tekintünk egy hálózatot, ha a kábelek mentén bármely tanyáról bármely másikba el lehet jutni, esetleg más tanyák közbeiktatásával.) Hány különböző módon tehetik ezt meg, ha az egyes tanyákat megkülönböztetjük egymástól?

10. A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja!
(1) Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.
(2) Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.

11. Egy héttagú társaságban mindenkit megkérdezve, hogy hány jelenlévőt ismer, az alábbi számokat kapjuk: $3, 5, 6, 2, 5, 3, 4$. Az ismertségek kölcsönösek.
Rajzolja le a társaság legalább egy lehetséges ismertségi gráfját!

12. Az ország 19 legnagyobb városát távközlési kábelekkel akarják összekötni. Bármely két város között legfeljebb egy kábel épülhet.

    (a) Mennyi az a minimális kábelszám, amelynél már bármely két város között kapcsolat létesíthető (nem feltétlenül közvetlen módon)?

    (b) 154 kábelt már kiépítettek. Biztosan használható-e már a rendszer bármely két város között (nem feltétlenül közvetlen módon)?

13. Legyen G egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy G csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3.

XIV

Prímszám, összetett szám

1. Melyik szám nagyobb és miért?
   (a) 5^{200} vagy 2^{500}
   (b) 101^{20} vagy 10101^{10}
   (c) $\lg^2 15$ vagy $\lg 22$
2. Bizonyítsa be, hogy minden 6-ra végződő négyzetszámban a tízesek helyén páratlan szám áll!
3. Bizonyítsa be, hogy csak egyetlen olyan ikerprím-pár létezik, amelyek összege nem osztható 12-vel!
4. Bizonyítsa be, hogy ha $p > 7$, akkor bármely ikerprímpárral szomszédos három szám szorzata osztható 240-nel!
5. Hány számjegyet tartalmaz a 2^{1000}-en szám?
6. Melyik állítás igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül?
   (a) Létezik két prímszám, amelyek összege 2003.
   (b) Ha 1990 három prímszám összege, akkor e három prímszám egyike 2.
   (c) Ha három prímszám összege 1732, akkor azok szorzata 1464697.
   (d) Létezik olyan prímszám, amely után pontosan 12 összetett szám következik.
7. Oldja meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet, ha $x < y < z$!
$$2^x + 2^y + 2^z = 2336$$
8. Határozza meg azokat a pozitív egész számpárokat, amelyek négyzetének különbsége 105!
9. Mely p prímszámok esetén lesz $p^2 + 3p + 5$ is prímszám?
10. Határozza meg azt a legnagyobb háromjegyű számot, amelynek számjegyei összege prímszám!
11. Határozza meg azt a legnagyobb háromjegyű prímszámot, amelynek számjegyei is prímszámok!
12. Bizonyítsa be, hogy ha p_1 és p_2 prímszámok mindegyike 3-nál nagyobb, akkor $24|p_1^2 - p_2^2$!
13. Bizonyítsa be, hogy minden 3-nál nagyobb prímszám négyzetének négyszereséből 100-at levonva olyan számot kapunk, amely 96-tal osztható!
14. Igazolja, hogy ha n öttel osztható természetes szám, akkor $n + 1$ és $\frac{n}{5}$ relatív prímek!
15. Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az $n^2 - pn$ különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő?

XV

Oszthatóság, számrendszerek

1. (a) Öt egész szám összege 2002. Végződhet-e 5-re az öt szám szorzata?
   (b) Fel lehet-e osztani két csoportba az $1, 2, \cdots, 2002$ számokat úgy, hogy mindkét csoportban páratlan legyen a számok összege?

2. Melyek azok az N kétjegyű pozitív egész számok, amelyekre a következő négy állítás közül pontosan kettő igaz és kettő hamis:
   - Az N osztható 7-tel.
   - Az N a 29 többszöröse.
   - Az $N + 11$ négyzetszám.
   - Az $N - 13$ négyzetszám.

3. Péter és Gábor egyszerre kezdtek el ólomkatonákat gyűjteni. Péter megkérdezte Gábortól, hogy hány katonája van már. Gábor a következőt válaszolta:
   - Ha párosával rakom a polcra őket, akkor egy marad,
   - ha hármasával, akkor kettő,
   - ha négyesével, akkor három,
   - ha ötösével, akkor négy,
   - ha hatosával, akkor öt,
   - ha hetesével, akkor egy sem marad ki.
     A gyűjtemény már meghaladta a százat, de a kétszázat még nem érte el. Hány katonája van Gábornak?

4. Hány olyan szám van, amely a hármas számrendszerben háromjegyű és $\overline{abb}$ alakú? (a és b nem feltétlenül jelölnek különböző számjegyeket)
   Írja fel ezeket a számokat a hármas és tízes számrendszerben!
   Ezek között hány olyan van, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja kétjegyű páros szám?

   Hány olyan, legalább kételemű részhalmaza van a $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaznak, amelyben az elemek szorzata osztható 3-mal?

5. Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.
   (a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk?
   (b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel?
   (c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám!

6. Egy hatjegyű szám utolsó három számjegyét a szám elejére írva az eredeti szám hatszorosát kapjuk. Melyik ez a szám?

7. (a) Határozza meg a c számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{1c28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{93c6}$ nem osztható 36-tal, $\overline{c3c5}$ pedig nem osztható 15-tel! ($pqrs$ azt a négyjegyű számot jelöli, melynek első számjegye p, további számjegyei pedig rendre q, r, s)

(b) Igazolja, hogy nincs olyan n pozitív egész szám, amelyre $4^n + 6n - 1$ osztható 8-cal!

(c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy $4^n + 6n - 1$ minden n pozitív egész szám esetén osztható 9-cel!

8. Határozza meg, hogy mely n természetes szám esetén lesz a

$$S = 2004^n + 2004^{n-1} + \cdots + 2004 + 1$$

kifejezés osztható 2003-mal!

9. Bizonyítsa be, hogy a következő (7-es számrendszerbeli) szám osztható 6-tal!

$$453517_7$$

10. Melyik az a négyjegyű szám, amellyel 25707-et elosztva 32-t, míg 37568-at elosztva 43-at kapunk maradékul?

XVI

Arányosság, százalékszámítás

1. Panni és Kati elvállalta, hogy szövegszerkesztővel legépelik Dani szakdolgozatát. A két lány együttes munkával 12 munkaóra alatt végezne a gépeléssel. Kedden reggel 8 órakor kezdett Panni a munkához, Kati 10 órakor fogott hozzá. Megállás nélkül, ki-ki egyenletes sebességgel dolgozott kedden 14 óráig, ekkor a kéziratnak a 40%-ával végeztek, és abbahagyták a munkát.

   (a) Hány óra alatt gépelné le Panni, illetve Kati a teljes szakdolgozatot (állandó munkatempót, és megszakítás nélküli munkát feltételezve)?

   (b) Szerdán reggel egyszerre kezdtek hozzá 9 órakor a gépeléshez, és együtt egyszerre fejezték be. Szerdán Panni fél óra ebédszünetet tartott, Kati pedig a délelőtti munkáját egy órányi időtartamra megszakította.
   Hány órakor végeztek a lányok a munkával szerdán?

2. Két kőműves együtt 12 nap alatt húzza fel egy ház falát. Egyikük 8 nap után beteg lett, így a 12. nap végére a munkának csak a 80%-a készült el. Hány nap alatt készül el a fal felhúzásával a két kőműves külön-külön?

3. Egy ékszerész vállalta, hogy elkészít 20 db egyforma tömegű ajándék ãrgyat: egy szobortalapzat kicsinyített mását. Az egyes ajándéktárgyak az alábbi féldrágakövek valamelyikéből készültek: achát, hematit, zöld jade és gránát. A kész ajándéktárgyakat a megrendelő átvételkor egyben lemérte. A 20 tárgy együttes tömege megfelelt a megrendelésnek. Otthon egyenként is megmérte a tárgyakat, és kiderült, hogy a féldrágakövekből készített négyféle ajándéktárgy közül egyik sem a megrendelt tömegű. Az ugyanabból az anyagból készülteket egymással azonos tömegűnek mérte. A három achát tárgy mindegyike 1%-kal kisebb; a hat darab hematit tárgy mindegyike $0,5$%-kal kisebb, a hét zöld jade tárgy mindegyike $1,5$%-kal nagyobb a megrendelésben szerepelt értéknél.
   A gránát tárgyak tömege hány százalékkal tért el a megrendeléstől?

4. Egy színházban a jegyek az I., a II. vagy a III. árkategóriába tartoznak. Az egyik esti előadásra összesen 200 jegyet adtak el. Az eladott jegyek között a III. árkategóriájúak száma a másik két árkategóriába tartozó jegyek együttes számának kétharmada, az I., illetve II. árkategóriájú jegyek számának aránya pedig $9 : 11$ volt. Hány jegyet adtak el az egyes árkategóriákban?

5. Egy külföldi utazás teljes árú vasúti menetjegye tavaly 209 euróba került. A menetjegy árát fél évvel ezelőtt p euróval felemelték, majd a múlt héten p százalékkal csökkentették ($p > 0$). Így a menetjegy ára 189 euró lett. Határozza meg p értékét!

6. A nyomda egy plakátot 14400 példányban állít elő. A költségeket befolyásolni csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

   (a) Mennyi lesz a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségnek az összege, ha a 14400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak?

(b) A 14400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?

7. Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják). Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40000 Ft után október 1-jén újabb 40000 Ft hitelt vett fel.
A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én? (A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.)

Ádám is vett fel hiteleket ettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1000000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.) Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10 befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

8. Egy egyetem 10580 hallgatójának tanulmányi lapjáról összesítették az angol és német nyelvvizsgák számát. Kiderült, hogy a német nyelvvizsgával nem rendelkezők 70%-ának, a német nyelvvizsgával rendelkezők 30%-ának nincs angol nyelvvizsgája. Az angol nyelvvizsgával nem rendelkezők 60%-ának német nyelvvizsgája sincs.

(a) Ezek közül a hallgatók közül hányan rendelkeztek angol és hányan német nyelvvizsgával?

(b) A hallgatók hány százaléka rendelkezett az angol és német nyelvvizsgák mindegyikével?

9. A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az A program 20%-kal több elektromos energiát, viszont 10%-kal kevesebb vizet használ, mint a B program. A B program 30%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ egy mosogatáshoz, mint a C program. Mindhárom program futtatásakor 40 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogatás az A programmal 151 Ft-ba, a B programmal 140 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül a C programmal egy mosogatás?

10. Egy automatából 100 Ft értékű ital kapható, s az automatába csak 100 Ft-os érme dobható be. Az italautomata gyakran hibásan működik. 160 kísérletet végezve azt tapasztaljuk, hogy

- az esetek $18,75\%$-ában az automata elnyeli a pénzt, és nem ad italt;
- 90 esetben visszaadja a 100 forintost, anélkül, hogy italt adna;
- 30 esetben italt is ad és a 100 Ft-os érmét is visszaadja;
- és csak a fennmaradó esetekben működik rendeltetésszerűen.

Várhatóan mennyi lesz a ráfizetése annak, aki 160-szor próbál vásárolni ennél az automatánál?

A feladatokat az alábbi helyekről válogattam:

- Bárd Ágnes et al.: *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2004.
- Kántor Sándorné: *Felvételi feladatok tematikus feldolgozásban.* Studium, Debrecen, 2002. (20+5 próbafelvételi)
- *Matematikai Versenyek 1993-2006.* Református iskolák országos matematika versenye. Debrecen, 2007.
- Kántor Sándorné, Sümegi László: Elemi matematika II, Debrecen, 1996.
- Solt György: *Valószínűségszámítás.* Műszaki Könyvkiadó, 2004.
- Az Oktatási Hivatal honlapján található emelt szintű érettségi feladatok.
- http://www.uni-miskolc.hu/evml/database/downloads/diszkret/segedletek/skatulya-elv-1.pdf
- http://uj.porki.hu/sajat/matek/G10/kombinatorika.pdf