# Függvényvizsgálat (minta)

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$

(a) Értelmezési tartomány:

$x+2 \neq 0$, azaz $x \neq -2$

Tehát $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}} = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$.

(b). A függvény grafikonjának metszéspontjai a koordináta-tengelyekkel:

$(0;y)$: $f(0) = \dfrac{e^0}{0+2} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \boxed{\left(0; \frac{1}{2}\right)}$

$(x;0)$: $0 = f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$ egyetlen $x \in \mathbb{R}$ esetén sem

teljesül, mert $\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0$.

(c) Határértékek:

$\lim\limits_{x \to -2} e^x = e^{-2} > 0$, $\lim\limits_{x \to -2} (x+2) = (-2)+2 = 0$,

továbbá $x+2 \begin{cases} > 0, & \text{ha } x > -2, \\ < 0, & \text{ha } x < -2, \end{cases}$

így $\boxed{\lim\limits_{x \to -2-} f(x)} = \lim\limits_{x \to -2-} \dfrac{e^x}{x+2} \boxed{= -\infty}$

és $\boxed{\lim\limits_{x \to -2+} f(x)} = \lim\limits_{x \to -2+} \dfrac{e^x}{x+2} \boxed{= +\infty}$;

továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty \quad [\neq 0]$$

miatt $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+2} = 0}$;

valamint

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty = \lim_{x\to+\infty}(x+2),$$

így a hányadosra a L'Hôpital-szabályt alkalmazzuk:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x+2} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty}.$$

(d) Deriváltak:

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}};$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{[e^x(x+1) + e^x\cdot 1](x+2)^2 - e^x(x+1)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} =}$$

$$\boxed{= \frac{(x+2)e^x[(x+2)^2 - 2(x+1)]}{(x+2)^4} = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}}.$$

(e) Deriváltak zérushelyei:

$$0 = f'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} \iff 0 = x+1 \iff x = -1$$

Tehát $f'$ egyetlen zérushelye $x_1 = -1$.

$$0 = f''(x) = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3} \iff 0 = x^2+2x+2.$$

Viszont $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

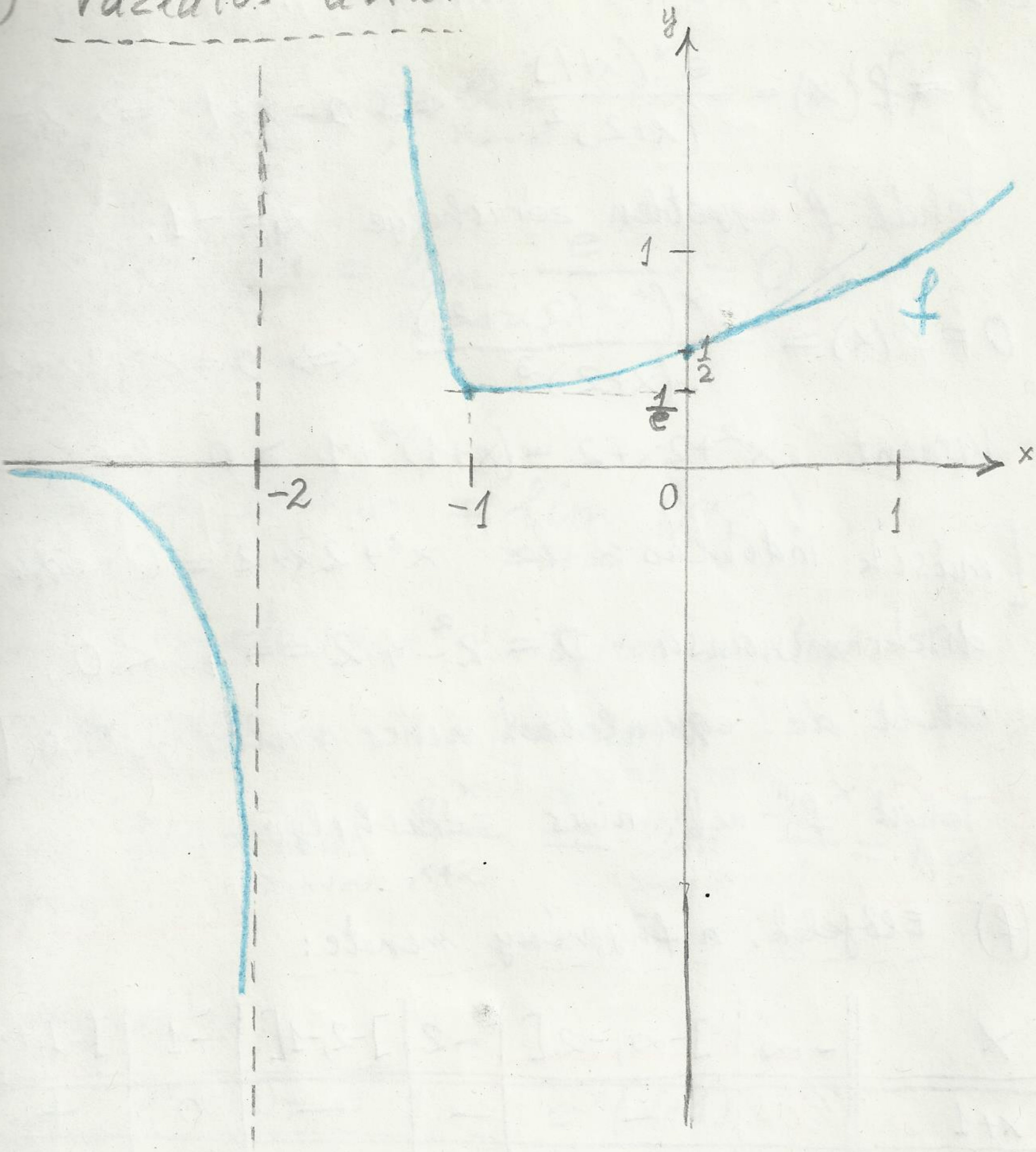
[másik indoklás: az $x^2+2x+2=0$ egyenlet diszkriminánsa $D = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$, tehát az egyenletnek nincs valós gyöke].

Tehát $f''$-nek nincs zérushelye.

(f) Előjelek, a függvény menete:

| $x$ | $-\infty$ | $]-\infty,-2[$ | $-2$ | $]-2,-1[$ | $-1$ | $]-1,+\infty[$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x+2)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ mon. | | csökken ↘ | | csökk. ↘ | min. | nő ↗ | |
| $x^2+2x+2$ | | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $(x+2)^3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f''(x) = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}$ | | $-$ | | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f$ konv. | | konkáv $\cap$ | | konvex | $\cdot$ | konvex | |
| $f$ | $0$ | | $-2-$: $-\infty$; $-2+$: $+\infty$ | | lok. min. $1/e$ | | $+\infty$ |

(g) Vázlatos ábra:




(h) Értékkészlet: $f(-1) = \frac{e^{-1}}{-1+2} = \frac{1}{e}$

$$\boxed{R_f = \left]-\infty; 0\right[ \cup \left[\tfrac{1}{e}; +\infty\right[}.$$