

Függvények határértéke, differenciálhatósága.  
Elemi függvények és deriváltjaik.

(Előadást követő egyetemi jegyzet)

Boros Zoltán

2020. február 14–15.

# Tartalomjegyzék

|                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Függvények határértéke</b>                                | <b>3</b>  |
| 1.1. A függvény-határérték fogalma . . . . .                    | 3         |
| 1.2. A határérték és a folytonosság kapcsolata . . . . .        | 5         |
| 1.3. Határérték és műveletek illetve egyenlőtlenségek . . . . . | 6         |
| 1.4. Monoton függvények . . . . .                               | 7         |
| <b>2. Differenciálhatóság</b>                                   | <b>9</b>  |
| 2.1. Valós függvények differenciálhatósága . . . . .            | 9         |
| 2.2. A differenciálszámítás műveleti szabályai . . . . .        | 11        |
| <b>3. Elemi függvények</b>                                      | <b>17</b> |
| 3.1. Komplex elemi függvények . . . . .                         | 17        |
| 3.2. Valós elemi függvények . . . . .                           | 19        |
| 3.3. A valós elemi függvények deriváltfüggvényei . . . . .      | 22        |

# 1. fejezet

## Függvények határértéke

### 1.1. A függvény-határérték fogalma

**1.1.1. Megjegyzés.** Kommunikációs célból célszerű megkülönböztetni a függvény határértékét az  $x_0$  pontban az  $f(x_0)$  függvényértéktől, amit „helyettesítési értéknek” szokás nevezni.

Olyan pontban is beszélhetünk a függvény határértékről, ahol nincs is értelmezve. Például:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} [-|x|] = -1 \neq 0 = [-|0|];$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

**1.1.2. Definíció.** Legyen  $(X, d)$  és  $(Y, \varrho)$  metrikus tér,  $E \subset X$ . Azt mondjuk, hogy az  $x_0 \in E'$  pontban az  $f: E \rightarrow Y$  függvény határértéke  $A \in Y$ , ha bármely  $\varepsilon > 0$  számhoz létezik  $\delta > 0$  úgy, hogy  $x \in E$ ,  $0 < d(x, x_0) < \delta$  esetén

$$\varrho(f(x), A) < \varepsilon.$$

**1.1.3. Jelölés.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

vagy  $f(x) \rightarrow A$ , ha  $x \rightarrow x_0$ .

**1.1.4. TÉTEL.** [Átviteli elv]: *A 1.1.2. definíció jelölései és feltételei mellett*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall (x_n): \mathbb{N} \rightarrow E \setminus \{x_0\} : \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

**BIZONYÍTÁS.** Hasonló a folytonosságra vonatkozó átviteli elv bizonyításához.

**1.1.5. Definíció.** Legyen  $E \subset \mathbb{R}$  és  $x_0 \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $x_0$  torlódási pontja az  $E \cap ]-\infty, x_0[$  halmaznak [például  $E = ]a, x_0[$  valamely  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < x_0$  esetén]. Azt mondjuk, hogy  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  függvény baloldali határértéke az  $x_0$  pontban  $-\infty$ , ha bármely  $K \in \mathbb{R}$  számhoz létezik  $\delta > 0$  úgy, hogy ha  $x \in E$ ,  $x_0 - \delta < x < x_0$ , akkor

$$f(x) < K.$$

**1.1.6. Jelölés.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

**1.1.7. TÉTEL.** [Átviteli elv]: A 1.1.5. definíció feltételei mellett

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \iff$$

bármely olyan  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow E$  sorozatra, amelyre  $x_n < x_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ teljesül, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty.$$

**1.1.8. Definíció.** Tegyük fel, hogy  $E \subset \mathbb{R}$  felülről nem korlátos és legyen  $(Y, \varrho)$  metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az  $f: E \rightarrow Y$  függvény határértéke a plusz végtelenben  $A \in Y$ , ha bármely  $\varepsilon > 0$  számhoz létezik  $L \in \mathbb{R}$  úgy, hogy ha  $x \in E$ ,  $x > L$ , akkor

$$\varrho(f(x), A) < \varepsilon.$$

**1.1.9. Jelölés.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

vagy  $f(x) \rightarrow A$ , ha  $x \rightarrow +\infty$ .

**1.1.10. TÉTEL.** [Átviteli elv]: A 1.1.8. definíció feltételei mellett

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \iff \forall (x_n): \mathbb{N} \rightarrow E \text{ sorozatra}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

STB. Ily módon mintegy 15 féle határérték-fogalom képezhető, és mindegyikre érvényes a megfelelő átviteli elv.

## 1.2. A határérték és a folytonosság kapcsolata

**1.2.1. TÉTEL.** Legyen  $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  adott függvény és  $x_0 \in E$ ,  $x_0 \in E'$ .  $f$  akkor és csak akkor folytonos  $x_0$ -ban, ha létezik

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

BIZONYÍTÁS.

- (a) Ha  $f$  folytonos az  $x_0$  torlódási pontban, akkor a folytonosság definíciója adja, hogy  $A = f(x_0)$  az  $f$  határértéke  $x_0$ -ban.
- (b) Ha  $\exists A = f(x_0)$  határérték, akkor a határérték definíciója miatt  $\forall K(f(x_0), \varepsilon)$ -hoz  $\exists K(x_0, \delta(\varepsilon))$ , hogy  $\forall x \in E$ ,  $x \in K(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}$  esetén  $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$ . Másrészt  $f(x_0) \in K(f(x_0), \varepsilon)$ . Így  $\forall x \in K(x_0, \delta(\varepsilon))$  és  $x \in E$  esetén  $f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$ , azaz  $f$  folytonos az  $x_0$ -ban.

**1.2.2. Definíció.** Legyen  $E \subset \mathbb{R}$ . Ha az  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  függvény nem folytonos az  $x_0 \in E$  pontban, akkor azt mondjuk, hogy  $x_0$   $f$ -nek szakadási helye, vagy hogy  $f$ -nek  $x_0$ -ban szakadása van.

Ha  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  adott függvény és  $x_0 \in E^\circ$  (azaz  $x_0$  belső pont  $E$ -ben), és  $x_0$  szakadási helye  $f$ -nek, továbbá

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

akkor azt mondjuk, hogy  $f$ -nek megszüntethető szakadása van az  $x_0$  pontban. Ha

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0+),$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0-),$$

és  $f(x_0-) \neq f(x_0+)$ , akkor azt mondjuk, hogy  $f$ -nek  $x_0$ -ban elsőfajú szakadása van.

Ha  $f$ -nek  $x_0$ -ban szakadása van, ami nem megszüntethető és nem is elsőfajú, akkor azt másodfajú szakadásnak nevezzük (ekkor  $f(x_0-)$  és  $f(x_0+)$  közül legalább az egyik nem létezik).

**1.2.3. Példa.** Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & \text{ha } x > 0, \\ \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{ha } x \in [-2, 0] \setminus \{-1\}, \\ 0, & \text{ha } x < -2 \text{ vagy } x = -1. \end{cases}$$

Ekkor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $f$ -nek az  $x_1 = -1$  pontban megszüntethető, az  $x_2 = -2$  pontban elsőfajú, az  $x_3 = 0$  pontban pedig másodfajú szakadása van.

### 1.3. Határérték és műveletek illetve egyenlőtlenségek

**1.3.1. TÉTEL.** Legyenek  $f, g : E \subseteq (X, d) \rightarrow \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$  adott függvények, úgy, hogy az  $x_0 \in E'$  pontban  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  és  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , akkor

$$a.) \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = A + B;$$

$$b.) \lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda A, \quad (\lambda \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C});$$

$$c.) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$d.) \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ ha } g(x) \neq 0 \ (x \in E), \ B \neq 0.$$

BIZONYÍTÁS. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján.

**1.3.2. Megjegyzés.** a.) és b.)  $\mathbb{R}^n$ -beli értékű függvényekre is megfogalmazható és bizonyítható.

**1.3.3. TÉTEL.** Ha  $f : E \subseteq (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  és  $x_0 \in E'$ , akkor ha

$$a.) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad (f \neq 0);$$

$$b.) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty \quad (f \neq 0);$$

BIZONYÍTÁS. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján.

**1.3.4. TÉTEL.** Legyen  $f, g, h : E \subseteq (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  adott függvények és  $x_0 \in E'$ , akkor, ha

$$a.) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, \text{ valamint } \exists \delta > 0 \text{ úgy, hogy} \\ \forall x \in [K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}] \cap E : f(x) \leq g(x) \implies A \leq B;$$

$$b.) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \text{ és } A < B \implies \exists \delta > 0 \text{ úgy, hogy}$$

$$\forall x \in [K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}] \cap E : f(x) < g(x);$$

$$c.) \exists \delta > 0 \text{ úgy, hogy } \forall x \in [K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}] \cap E : f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ valamint}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A.$$

BIZONYÍTÁS. A sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek mintájára.

**1.3.5. Megjegyzések.** 1. A tétel megfogalmazható  $+\infty$  (illetve  $-\infty$ )-ben vett határértékekre is.

2. Ha a b.) részben  $B = 0$  vagy  $A = 0$ , akkor a jeltartási tétel adódik (például  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0 \implies \exists \delta > 0 : \forall x \in [K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}] \cap E : f(x) < 0$ ).

**1.3.6. TÉTEL.** [az összetett függvény határértéke]: *Legyenek adottak az  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  és  $(Z, d_Z)$  metrikus terek,  $x_0 \in X'$  és  $y_0 \in Y'$ , továbbá  $f : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y \setminus \{y_0\}$ ,  $g : Y \setminus \{y_0\} \rightarrow Z$  függvények, melyekre*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ és } \exists \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = A.$$

**BIZONYÍTÁS.** Mint a folytonosságra vonatkozó megfelelő tételnél, csak  $K(g(f(x_0)), \varepsilon)$  helyett  $K(A, \varepsilon)$  és  $K(f(x_0), \delta_1(\varepsilon))$  helyett  $K(y_0, \delta_1(\varepsilon))$ , míg a folytonosság helyett a határérték létezése használandó.

## 1.4. Monoton függvények

**1.4.1. TÉTEL.** [Határértékek]: *Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monoton növekvő és  $x_0 \in I$ . Ekkor*

$$(a) \ x_0 \neq \inf I \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x_0 > x \in I\};$$

$$(b) \ x_0 \neq \sup I \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x_0 < x \in I\}.$$

*Továbbá  $x_0, y_0 \in I$ ,  $x_0 < y_0 < \sup I$  esetén*

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow y_0-} f(x) \leq f(y_0) \leq \lim_{x \rightarrow y_0+} f(x). \quad (1.1)$$

**BIZONYÍTÁS.**

- (b) Legyen  $x_0 < y_0 < \sup I$ ,  $x_0 \in I$ , ekkor  $x_0 < x \in I$  esetén  $f(x_0) \leq f(x)$ , ezért  $A_{x_0} = \{f(x) \mid x_0 < x \in I\}$  alulról korlátos (és nem üres), így létezik

$$\alpha = \inf A_{x_0} \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad f(x_0) \leq \alpha.$$

Továbbá bármely  $\varepsilon > 0$  számhoz  $\exists x_\varepsilon \in I$  úgy, hogy  $x_0 < x_\varepsilon$  és  $f(x_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon$ . Legyen most  $\delta_\varepsilon = x_\varepsilon - x_0$ . Ekkor  $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon = x_\varepsilon$  esetén

$$f(x_0) \leq \alpha \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk (b)-t és hasonlóan (a)-t. Továbbá, ha  $x_0 < y_0$   $I$ -beli pontok és  $\delta = \frac{y_0 - x_0}{2} > 0$ , akkor  $x_0 < x < x_0 + \delta = \frac{x_0 + y_0}{2} = y_0 - \delta < y < y_0$  esetén

$$f(x) \leq f(y).$$

**1.4.2. Megjegyzés.** Hasonló állítás igazolható monoton csökkenő függvényekre. Ekkor az (a) és (b) sorokban az inf és sup operátorok felcserélendők, az (1.1) egyenlőtlenségek pedig megfordítandók.

**1.4.3. TÉTEL.** Ha  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum és  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monoton, akkor  $f$ -nek  $I^\circ$ -ban csak elsőfajú szakadásai lehetnek, továbbá  $f$  szakadási helyeinek halmaza megszámlálható.

**BIZONYÍTÁS.** Ha  $x_0 \in I^\circ$ , akkor  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ , és pl. ha  $f$  növekvő, akkor  $y_0 \in I^\circ$ ,  $x_0 < y_0$  esetén

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow y_0-} f(x) \leq f(y_0) \leq \lim_{x \rightarrow y_0+} f(x). \quad (1.2)$$

Így egyrészt  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  esetén

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

[tehát megszüntethető szakadása nincs], másrészt ha  $x_0$  és  $y_0$  szakadási hely, akkor  $\exists r_{x_0} \in \mathbb{Q} \cap \left] \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \right[$  és 1.2 miatt  $r_{x_0} \neq r_{y_0}$ , tehát létezik injektív leképezés a szakadási helyek halmazából  $\mathbb{Q}$ -ba.

**1.4.4. TÉTEL.** Ha  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum és  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, szigorúan monoton, akkor  $\mathcal{J} = f(I) \subset \mathbb{R}$  is intervallum és  $f^{-1} : \mathcal{J} \rightarrow I$  is folytonos, valamint ugyanolyan értelemben szigorúan monoton.

**BIZONYÍTÁS.** A monotonitásra vonatkozó állítást korábban (az előző félévben) beláttuk [egyébként egyszerű].

Mivel  $f$  folytonos és  $I$  összefüggő,  $f(I)$  is összefüggő, tehát intervallum. Továbbá  $I = f^{-1}(f(I))$ .

Ha pl.:  $f$  és  $f^{-1}$  növekvő és  $f^{-1}$ -nek szakadása van az  $y_0 \in \mathcal{J}$  pontban, akkor

$$\lim_{y \rightarrow y_0-} f^{-1}(y) < \lim_{y \rightarrow y_0+} f^{-1}(y),$$

ezért létezik  $u \in \left] \lim_{y \rightarrow y_0-} f^{-1}(y), \lim_{y \rightarrow y_0+} f^{-1}(y) \right[ \setminus \{f^{-1}(y_0)\}$ . Ekkor  $u \in I$ , de  $u \notin f^{-1}(\mathcal{J})$ , ami ellentmondás.

**1.4.5. Megjegyzés.** Hasonlóan igazolható, hogy egy intervallumon értelmezett monoton függvény akkor és csak akkor folytonos, ha az értékkészlete intervallum.



## 2. fejezet

# Differenciálhatóság

### 2.1. Valós függvények differenciálhatósága

A továbbiakban  $I \subset \mathbb{R}$  tetszőleges intervallum (pozitív hosszúságú).

**2.1.1. Definíció.** Legyen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $x_0 \in I$ . Tetszőleges  $x \in I \setminus \{x_0\}$  esetén a

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

kifejezést az  $f$  függvény  $x$  és  $x_0$  pontokhoz tartozó differencia-hányadosának nevezzük.

**2.1.2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény differenciálható az  $x_0 \in I$  pontban, ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

(azaz véges) határérték. Ha  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban, akkor az

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

módon bevezetett  $f'(x_0)$  számot az  $f$  függvény  $x_0$ -beli differenciálhányadosának vagy más néven deriváltjának nevezzük.

Ha  $E \subset I$  és  $f$  minden  $y \in E$  pontban differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  differenciálható az  $E$  halmazon és  $f' : E \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f$  függvény deriváltfüggvénye az  $E$  halmazon. Speciálisan, ha  $f$  differenciálható az  $I$  intervallumon, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  differenciálható és  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f$  deriváltfüggvénye (vagy röviden deriváltja).

További jelölések:  $f'(x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \dot{f}(x_0)$  [fizika]

Motiváció, interpretáció:

1.) Geometriai: Ha létezik  $f'(x_0)$ , akkor az  $f$  függvénygörbe  $(x_0, f(x_0))$  pontbeli érintőjének egyenlete

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

2.) Fizikai: átlagsebesség:  $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \longrightarrow \dot{y}(t_0)$  (ha  $\Delta t \rightarrow 0$ ) pillanatnyi sebesség.

**2.1.3. Megjegyzés.** [egyoldali deriváltak] Analóg módon értelmezhető a bal- illetve a jobb-oldali differenciálhatóság, illetve derivált:

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \\ f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ ha létezik.} \end{aligned}$$

Amennyiben  $x_0$  belső pontja  $I$ -nek,

$$\exists f'(x_0) \iff \exists f'_-(x_0), \exists f'_+(x_0) \text{ és } f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

**Példák:**

$$1.) \ c \in \mathbb{R}, \ f(x) = c \ (x \in \mathbb{R}), \ x_0 \in \mathbb{R} \implies f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

$$2.) \ f(x) = x \ (x \in \mathbb{R}), \ x_0 \in \mathbb{R} \implies f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

$$3.) \ f(x) = \sqrt{x} \ (x \geq 0), \ x_0 > 0 \implies \\ f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Ugyanakkor  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \notin \mathbb{R}$ ,  
tehát az  $f(x) = \sqrt{x} \ (x \in [0, +\infty[)$  függvény nem differenciálható az  $x_0 = 0$  pontban.

$$4.) \ f(x) = |x| \ (x \in \mathbb{R}), \ x_0 = 0 \text{ esetén}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1, \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1, \end{aligned}$$

tehát  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ , ezért az  $f(x) = |x| \ (x \in \mathbb{R})$  függvény nem differenciálható az  $x_0 = 0$  pontban.

**Megjegyzés.** Láttunk példát két folytonos függvényre (abszolút érték, négyzetgyök), amelyek nem differenciálhatóak az  $x_0 = 0$  pontban. Tehát a folytonosságból nem következik a differenciálhatóság. Viszont a következő tétel szerint a differenciálhatóságból következik a folytonosság.

**2.1.4. TÉTEL.** Ha  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható az  $x_0 \in I$  pontban, akkor  $f$  folytonos  $x_0$ -ban.

**BIZONYÍTÁS.**  $x_0$  torlódási pontja (is)  $I$ -nek továbbá

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + f(x_0) = \\
&= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0).
\end{aligned}$$

□

**2.1.5. TÉTEL.**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  estén a következő feltételek ekvivalensek:

(D)  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban,

(L)  $\exists A \in \mathbb{R}$  és  $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$  úgy, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0 \text{ és } \forall x \in I : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)$$

[ $f$  lineárisan approximálható  $x_0$ -ban].

BIZONYÍTÁS. [(D)  $\Rightarrow$  (L)] Legyen  $A = f'(x_0)$  és

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & \text{ha } x \in I \setminus \{x_0\}, \\ 0, & \text{ha } x = x_0. \end{cases}$$

[(L)  $\Rightarrow$  (D)]  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (A + \omega(x)) = A + 0 = A \Rightarrow f$  differenciálható  $x_0$ -ban és  $f'(x_0) = A$ . □

## 2.2. A differenciálszámítás műveleti szabályai

**2.2.1. TÉTEL.** [Deriválás és az alpműveletek]: Legyen  $c \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  és  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0$ -ban differenciálható függvények. Ekkor  $c \cdot f$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$ , valamint  $g(x_0) \neq 0$  esetén  $1/g$  és  $f/g$  is differenciálható  $x_0$ -ban. Továbbá

- (1)  $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ ,
- (2)  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ,
- (3)  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ,
- (4)  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ ,
- (5)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ .

BIZONYÍTÁS.

(2)

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = f'(x_0) + g'(x_0),
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\
&= -\frac{1}{g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x_0)} \cdot \frac{1}{g(x_0)} \cdot g'(x_0),
\end{aligned}$$

$$(1) \quad (c \cdot f)'(x_0) = 0 \cdot f(x_0) + c \cdot f'(x_0),$$

(5)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.
\end{aligned}$$

□

**2.2.2. TÉTEL.** [Az összetett függvény deriválási szabálya]: Legyen  $I_j \subset \mathbb{R}$  intervallum ( $j = 1, 2$ ),  $g : I_1 \rightarrow I_2$  differenciálható az  $x_0 \in I_1$  pontban és  $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható az  $y_0 = g(x_0)$  pontban. Ekkor az  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  ( $x \in I_1$ ) módon értelmezett  $f \circ g$  függvény differenciálható az  $x_0$  pontban és

$$(OFD) \quad (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

BIZONYÍTÁS. 1. [ha  $g$  injektív (!)]:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0),\end{aligned}$$

mert  $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0)$  és  $g$  folytonos is  $x_0$ -ban, tehát  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ .

2. Bizonyítás [általában]:

Mivel  $g$  lineárisan approximálható  $x_0$ -ban,  $f$  pedig az  $y_0 = g(x_0)$  pontban, léteznek  $\omega_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2$ ) függvények úgy, hogy  $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_1(x) = \omega_1(x_0) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} \omega_2(y) = \omega_2(y_0) = 0$ , továbbá

$$\begin{aligned}g(x) - g(x_0) &= [g'(x_0) + \omega_1(x)] \cdot (x - x_0) \quad (x \in I_1), \\ f(y) - f(y_0) &= [f'(y_0) + \omega_2(y)] \cdot (y - y_0) \quad (y \in I_2).\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) &= f(g(x)) - f(g(x_0)) \\ &= [f'(g(x_0)) + \omega_2(g(x))] (g(x) - g(x_0)) \\ &= [f'(g(x_0)) + \omega_2(g(x))] \cdot [g'(x_0) + \omega_1(x)] (x - x_0) \\ &= [f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) + \omega_3(x)] (x - x_0) \quad (x \in I_1),\end{aligned}$$

ahol

$$\omega_3(x) = \omega_2(g(x))g'(x_0) + f'(g(x_0))\omega_1(x) + \omega_2(g(x))\omega_1(x) \quad (x \in I_1),$$

így

$$\omega_3(x_0) = \omega_2(g(x_0))g'(x_0) + f'(g(x_0))\omega_1(x_0) + \omega_2(g(x_0))\omega_1(x_0) = 0,$$

valamint

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [\omega_2(g(x)) \cdot g'(x_0) + f'(g(x_0))\omega_1(x) + \omega_2(g(x))\omega_1(x)] \\ &= g'(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \omega_2(g(x)) + f'(g(x_0)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \omega_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \omega_2(g(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \omega_1(x) \\ &= g'(x_0) \cdot 0 + f'(g(x_0)) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

ugyanis  $g$  folytonos az  $x_0$ -ban és  $\omega_2$  folytonos az  $y_0 = g(x_0)$  pontban, így  $\omega_2 \circ g$  is folytonos  $x_0$ -ban, tehát

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_2(g(x)) = \omega_2(g(x_0)) = \omega_2(y_0) = 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy  $f \circ g$  lineárisan approximálható  $x_0$ -ban és (OFD) is teljesül.  $\square$

**Példák:**

1.) Legyen

$$F(x) = \sqrt{x+1} \quad (x \geq -1).$$

Ekkor  $F = f \circ g$ , ahol  $f(y) = \sqrt{y}$  ( $y \geq 0$ ) és  $g(x) = x + 1$  ( $x \geq -1$ ).

Beláttuk, hogy  $y > 0$  esetén  $\exists f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ , illetve tetszőleges  $x$ -re  $g'(x) = 1$ , tehát  $x > -1$  esetén

$$\exists F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

2.) Legyen

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor  $F = f \circ g$ , ahol  $f(y) = \sqrt{y}$  ( $y \geq 0$ ) és  $g(x) = x^2 + 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Tudjuk, hogy  $y > 0$  esetén  $\exists f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ , illetve tetszőleges  $x$ -re  $g'(x) = 2x$ , tehát  $\forall x \in \mathbb{R}$  esetén

$$\exists F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

**2.2.3. TÉTEL.** [Az inverz-függvény deriválása]: Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, szigorúan monoton függvény, amely differenciálható az  $x_0 \in I$  pontban és  $f'(x_0) \neq 0$ . Ekkor  $J = f(I)$  intervallum,  $f^{-1} : J \rightarrow I$  differenciálható az  $y_0 = f(x_0)$  pontban és

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \left[ = \frac{1}{f'(x_0)} \right].$$

**BIZONYÍTÁS.** Korábban beláttuk, hogy  $J = f(I)$  intervallum és  $f^{-1} : J \rightarrow I$  folytonos. Továbbá

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

mert  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$  és  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban,  $f'(x_0) \neq 0$ .  $\square$

**2.2.4. Állítás.** [Lokalizációs elv]: Legyen  $I_j \subset \mathbb{R}$  intervallum ( $j = 1, 2$ ),  $a, b \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $a < b$  és  $]a, b[ \subset I_1 \cap I_2$ , valamint  $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  és  $g : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  úgy, hogy  $f(x) = g(x)$ , ha  $x \in ]a, b[$ , továbbá  $g$  differenciálható az  $x_0 \in ]a, b[$  pontban. Ekkor  $f$  is differenciálható  $x_0$ -ban és  $f'(x_0) = g'(x_0)$ .

**BIZONYÍTÁS.** A differenciálhatóság és a függvény-határérték definíciója alapján „nyilvánvaló”.  $\square$

**2.2.5. TÉTEL.** [A hatványfüggvények differenciálhányadosa]: Legyen  $r \in \mathbb{Q}$  és

$$I_r = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ha } r \in \mathbb{N}, \\ ]0, +\infty[, & \text{ha } r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}, \end{cases}$$

valamint  $\varphi_r(x) = x^r$  ( $x \in I_r$ ). Ekkor  $\varphi_r : I_r \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható és

$$\varphi_r'(x) = rx^{r-1} \quad (x \in I_r).$$

[**Megjegyzés:** Bizonyos  $r$  értékekre  $\varphi_r$  kiterjeszthető, és a kiterjesztés is differenciálható  $x$ -ben, ha  $x^{r-1}$  értelmezett. Speciálisan  $\varphi_0(x) = 1$  kiterjeszthető  $\mathbb{R}$ -re és ott differenciálható.]

**BIZONYÍTÁS.** 1. lépés:  $r \in \mathbb{N}$  esetén teljes indukcióval. Ha  $r = 1$ , akkor

$$\varphi_1(x) = x \Rightarrow \varphi_1'(x) = 1 = 1 \cdot x^0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha  $r > 1$  és  $\varphi_{r-1}'(x) = (r-1)x^{r-2}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), akkor

$$\varphi_r(x) = x^r = x^{r-1} \cdot x = \varphi_{r-1}(x) \cdot \varphi_1(x)$$

miatt  $\varphi_r$  is differenciálható és

$$\begin{aligned} \varphi_r'(x) &= \varphi_{r-1}'(x) \cdot \varphi_1(x) + \varphi_{r-1}(x) \cdot \varphi_1'(x) \\ &= (r-1)x^{r-2} \cdot x + x^{r-1} \cdot 1 = r \cdot x^{r-1} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2. lépés:  $r \in \mathbb{Z}$ . Ha  $r = 0 \Rightarrow \varphi_0(x) = x^0 = 1 \Rightarrow \varphi_0'(x) = 0 = 0 \cdot x^{-1}$  ( $x \in I_0$ ).

Ha  $-r \in \mathbb{N}$ , akkor  $\varphi_{-r}'(x) = (-r) \cdot x^{-r-1}$  és

$$\varphi_r(x) = x^r = \frac{1}{x^{-r}} = \frac{1}{\varphi_{-r}(x)}$$

miatt  $\varphi_r$  differenciálható és

$$\varphi_r'(x) = -\frac{\varphi_{-r}'(x)}{[\varphi_{-r}(x)]^2} = \frac{(-r)x^{-r-1}}{(x^{-r})^2} = r \cdot x^{-r-1-2(-r)} = r \cdot x^{r-1} \quad (x \in ]0, +\infty[).$$

3. lépés:  $r = \frac{1}{n}$ , ahol  $n \in \mathbb{N}$ . Legyen  $\psi_n = \varphi_n|_{]0, +\infty[}$ .

Ekkor  $\psi_n'(x) = nx^{n-1}$  miatt  $\varphi_r = \varphi_{1/n} = \psi_n^{-1}$  is differenciálható és

$$\begin{aligned} \varphi_r'(x) &= (\psi_n^{-1})'(x) = \frac{1}{\psi_n'(\psi_n^{-1}(x))} = \frac{1}{\psi_n'(\varphi_{1/n}(x))} \\ &= \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = r \cdot x^{r-1} \quad (x \in ]0, \infty[). \end{aligned}$$

4. lépés: Ha  $r = \frac{m}{n}$ , ahol  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , akkor

$$\varphi_r(x) = x^r = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\varphi_m \circ \varphi_{1/n})(x)$$

miatt  $\varphi_r$  is differenciálható és

$$\begin{aligned} \varphi_r'(x) &= (\varphi_m \circ \varphi_{1/n})'(x) = \varphi_m'(\varphi_{1/n}(x)) \cdot \varphi_{1/n}'(x) = m \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = r \cdot x^{r-1} \quad (x \in ]0, +\infty[). \end{aligned}$$

□

**2.2.6. TÉTEL.** [Hatványsor összegfüggvényének deriváltja]: Legyen a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  hatványsor konvergenciasugara  $\varrho \in ]0, +\infty]$ . Ekkor az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x \in ]-\varrho, \varrho[)$$

függvény differenciálható és

$$(HS) \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}.$$

**BIZONYÍTÁS.** Legyen  $x_0 \in ]-\varrho, \varrho[$  és  $r > 0$  úgy, hogy  $|x_0| + r < \varrho$ . Továbbá minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén legyen

$$f_n(x) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \cdot x_0^k = \begin{cases} a_n \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}, & \text{ha } x \neq x_0, \\ a_n n x_0^{n-1}, & \text{ha } x = x_0 \end{cases} \quad (x \in ]x_0 - r, x_0 + r[).$$

Vegyük észre, hogy  $|f_n(x)| \leq n |a_n| (|x_0| + r)^{n-1} = \frac{n}{|x_0| + r} \cdot |a_n| \cdot (|x_0| + r)^n$  és

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|x_0| + r} \cdot |a_n| \cdot (|x_0| + r)^n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_0| + r}} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot (|x_0| + r) = \begin{cases} \frac{|x_0| + r}{\varrho} < 1, & \text{ha } \varrho < +\infty, \\ 0 < 1, & \text{ha } \varrho = +\infty, \end{cases} \end{aligned}$$

ezért a  $\sum n |a_n| (|x_0| + r)^n$  numerikus sor konvergens, így  $\sum f_n$  egyenletesen konvergens.

Továbbá  $f_n : ]x_0 - r, x_0 + r[ \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos ( $n \in \mathbb{N}$ ), ezért  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  is folytonos, így

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

tehát  $f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ . □



## 3. fejezet

# Elemi függvények

### 3.1. Komplex elemi függvények

**3.1.1. Definíció.** A  $\sum \frac{z^n}{n!}$  hatványsor konvergencia-sugara  $+\infty$ , ezért minden  $z \in \mathbb{C}$  esetén értelmezhetők az alábbi függvények (ahol  $0! = 1$ ,  $z^0 = 1$ ):

$$\begin{aligned}\text{Exp}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, & \text{Ch}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, & \text{Sh}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \text{Cos}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, & \text{Sin}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}).\end{aligned}$$

Ezek rendre komplex exponenciális, koszinusz hiperbolikus, szinus hiperbolikus, koszinusz, illetve szinus függvényeknek nevezzük.

**3.1.2. Állítás.**  $\forall z \in \mathbb{C} : \text{Exp}(z) = \text{Ch}(z) + \text{Sh}(z),$

$$\text{Ch}(z) = \frac{\text{Exp}(z) + \text{Exp}(-z)}{2}, \quad \text{Sh}(z) = \frac{\text{Exp}(z) - \text{Exp}(-z)}{2},$$

$$\text{Cos}(z) = \text{Ch}(iz), \quad \text{Sin}(z) = (-i) \cdot \text{Sh}(iz), \quad \text{Exp}(iz) = \text{Cos}(z) + i \cdot \text{Sin}(z).$$

**3.1.3. TÉTEL.** [Addíciós tételek]:  $\forall x, y \in \mathbb{C} :$

- (1)  $\text{Exp}(x+y) = \text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y),$
- (2)  $\text{Ch}(x+y) = \text{Ch}(x) \cdot \text{Ch}(y) + \text{Sh}(x) \cdot \text{Sh}(y),$
- (3)  $\text{Sh}(x+y) = \text{Sh}(x) \cdot \text{Ch}(y) + \text{Ch}(x) \cdot \text{Sh}(y),$
- (4)  $\text{Cos}(x+y) = \text{Cos}(x) \cdot \text{Cos}(y) - \text{Sin}(x) \cdot \text{Sin}(y),$
- (5)  $\text{Sin}(x+y) = \text{Sin}(x) \cdot \text{Cos}(y) + \text{Cos}(x) \cdot \text{Sin}(y),$
- (6)  $\text{Cos}(x) - \text{Cos}(y) = -2 \cdot \text{Sin}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \text{Sin}\left(\frac{x-y}{2}\right),$

$$(7) \quad \text{Sin } (x) - \text{Sin } (y) = 2 \cdot \text{Cos } \left( \frac{x+y}{2} \right) \cdot \text{Sin } \left( \frac{x-y}{2} \right),$$

$$(8) \quad [\text{Ch } (x)]^2 - [\text{Sh } (x)]^2 = 1,$$

$$(9) \quad [\text{Cos } (x)]^2 + [\text{Sin } (x)]^2 = 1.$$

BIZONYÍTÁS.

(1)

$$\begin{aligned} \text{Exp } (x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \text{Exp } (x) \cdot \text{Exp } (y). \end{aligned}$$

(2), (3) levezethető az (1)-ből és az előző állításból, (4) adódik a (2)-ből, (5) adódik a (3)-ból.

(6)

$$\begin{aligned} x &= \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \quad \text{miatt} \\ \text{Cos } (x) - \text{Cos } (y) &= \text{Cos } \left[ \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right] - \text{Cos } \left[ \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right] = \\ &= \left( \text{Cos } \frac{x+y}{2} \cdot \text{Cos } \frac{x-y}{2} - \text{Sin } \frac{x+y}{2} \cdot \text{Sin } \frac{x-y}{2} \right) \\ &\quad - \left( \text{Cos } \frac{x+y}{2} \cdot \text{Cos } \frac{x-y}{2} + \text{Sin } \frac{x+y}{2} \cdot \text{Sin } \frac{x-y}{2} \right). \end{aligned}$$

(8)

$$\text{Exp } (0) = 1 \implies \text{Ch } (0) = 1, \quad \text{Cos } (0) = 1,$$

továbbá

$$1 = \text{Ch } (0) = \text{Ch } (x+(-x)) = \text{Ch } (x)\text{Ch } (-x) + \text{Sh } (x)\text{Sh } (-x) = [\text{Ch } (x)]^2 - [\text{Sh } (x)]^2,$$

a (9) hasonló.

□

## 3.2. Valós elemi függvények

**3.2.1. Megjegyzés.** A 3.1.1. definíció definícióban minden hatványsor minden együtthatója valós szám, ezért valós  $z$ -hez valós számot rendel.

**3.2.2. Definíció.** A 3.1.1. definíció definícióban bevezetett függvények  $\mathbb{R}$ -re való leszűkítését kis kezdőbetűvel jelöljük (és hasonlóan nevezzük el).

**3.2.3. TÉTEL.** (1)  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$  ( $\implies \exp(x) \neq 0$ ),

(2)  $\forall x > 0 : \exp(x) > 1$  ( $\implies \forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$ , (1) miatt),

(3)  $\forall x \in \mathbb{R} : \forall r \in \mathbb{Q} : \exp(rx) = (\exp(x))^r$  ( $\implies e = \exp(1)$  miatt  $\exp(r) = e^r$ ),

(4)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  szigorúan monoton növekvő, folytonos,

(5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$  és  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ ,

(6)  $\exp(\mathbb{R}) = ]0, +\infty[$ .

BIZONYÍTÁS.

(1)  $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$ ,

(2)  $x > 0 \implies \exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x > 1$ ,

(3) Következik az  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$  azonosságból [ $r \in \mathbb{N}$  esetén teljes indukcióval, illetve  $\exp(x) = \exp(n \cdot \frac{x}{n}) = (\exp(\frac{x}{n}))^n$  stb...]

(4) Folytonos, mert egy hatványsor összegfüggvénye.

$h > 0 \implies \exp(x+h) = \exp(x) \cdot \exp(h) > \exp(x)$ , mert  $\exp(x) > 0$  és  $\exp(h) > 1$ .

(5) A monotonitás miatt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = \lim_{\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty} \exp(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n = +\infty$$

és hasonlóan

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0.$$

A (4)-es és az (5)-ös következménye a (6)-os.

□

**3.2.4. Következmény.**  $\exists \ln = \exp^{-1} : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ -ra, szigorúan monoton növekvő,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

**3.2.5. Definíció.**  $a > 0$  esetén legyen

$$\exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln a) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**3.2.6. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy

- $a > 1$  esetén  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  szigorúan monoton növekvő (és hasonló tulajdonságokkal bír, mint az  $\exp$ );
- $a = 1$  esetén  $\exp_a(x) = 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ );
- $0 < a < 1$  esetén  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  szigorúan monoton csökkenő.

Minden esetben  $\exp_a(r) = a^r$ , ha  $r \in \mathbb{Q}$ .

Emiatt az  $a$  alapú hatványozást úgy értelmezzük minden valós kitevőre, hogy

$$a^x = \exp_a(x) \quad (= e^{x \cdot \ln a}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**3.2.7. Definíció.**  $0 < a \neq 1$  esetén  $\log_a = \exp_a^{-1}$ .

**3.2.8. Megjegyzés.**  $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -ra szigorúan monoton növekvő (mert az  $\text{sh}$  függvényt definiáló hatványsor minden tagja páratlan kitevős hatványfüggvény, azok pedig szigorúan monoton növekvők és szürjektívek).

**3.2.9. Definíció.**  $\text{arsh} = \text{sh}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**3.2.10. Állítás.**  $0 < x < \sqrt{6}$  esetén  $\sin(x) > 0$ .

BIZONYÍTÁS.

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+3)!} \cdot [(4k+2)(4k+3) - x^2] > 0.$$

□

**3.2.11. TÉTEL.**  $\cos|_{[0,2]}$  szigorúan monoton csökkenő és  $\cos(0) = 1 > 0 > \cos(2)$ , ezért  $\exists! u \in ]0, 2[ : \cos(u) = 0$ .

BIZONYÍTÁS.  $0 \leq x < y \leq 2$  esetén

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2} > 0,$$

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} - \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{2^{4k-2}}{(4k-2)!} - \frac{2^{4k}}{(4k)!} \right) = -\frac{1}{3} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{4k-2}}{(4k)!} [(4k-1)4k-4] < -\frac{1}{3}.$$

□

**3.2.12. Definíció.** Ha  $0 < u < 2$  úgy, hogy  $\cos(u) = 0$ , legyen  $\pi = 2u$ .

**3.2.13. TÉTEL.**  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , továbbá  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x),$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x),$$

a  $\sin$  és  $\cos$  függvények  $2\pi$  szerint periodikusak, valamint

$$\sin(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k \cdot \pi,$$

$$\cos(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,$$

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \text{ szigorúan monoton növekvő,}$$

$$\cos|_{[0, \pi]} \text{ szigorúan monoton csökkenő.}$$

BIZONYÍTÁS.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ és } 0 < \frac{\pi}{2} < 2 < \sqrt{6}$$

miatt  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ , tehát  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . A második és harmadik sor az addíciós tételekből jön.

Beláttuk, hogy a  $\cos$  szigorúan monoton csökken a  $[0, \frac{\pi}{2}]$  intervallumon és  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  esetén  $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$  növekvő. Továbbá  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  esetén

$$\cos(x) = -\cos(x - \pi) = -\cos(\pi - x) \quad (\text{és } 0 \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2})$$

miatt a  $\cos$  a  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  intervallumon is csökkenő. Végül  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  esetén

$$\sin(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ és } 0 \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \pi.$$

így a  $\sin$  szigorúan monoton növekvő a  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  intervallumon. □

**3.2.14. Definíció.** Legyen

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$

**3.2.15. Következmény.** A  $\operatorname{tg}$  függvény  $\pi$  szerint periodikus, továbbá  $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$  szigorúan monoton növekvő,  $\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) = \pm \infty$ .

**3.2.16. Definíció.**

$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{-ra,}$$

$$\arccos = \left(\cos|_{[0, \pi]}\right)^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \text{-ra,}$$

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \text{-ra.}$$

### 3.3. A valós elemi függvények deriváltfüggvényei

**3.3.1. TÉTEL.** Az  $\exp$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\ln$ ,  $\exp_a$  ( $0 < a$ ),  $\log_a$  ( $0 < a \neq 1$ ),  $\operatorname{arsh}$ ,  $\operatorname{arctg}$ ,  $\operatorname{arcsin}|_{]-1,1[}$  és  $\operatorname{arccos}|_{]-1,1[}$  függvények differenciálhatók, továbbá

$$\exp'(x) = \exp(x), \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x), \quad \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x),$$

$$\cos'(x) = -\sin(x), \quad \sin'(x) = \cos(x), \quad \exp'_a(x) = a^x \ln(a) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \log'_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)} \quad (x > 0),$$

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x) \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right),$$

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in ]-1, 1[).$$

Továbbá  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = x^k$  ( $x \in ]0, +\infty[$ ) esetén  $\varphi$  differenciálható és

$$\varphi'(x) = k \cdot x^{k-1} \quad (x \in ]0, +\infty[).$$

**BIZONYÍTÁS.** [néhány esetben; a többi hasonló]:

A hatványsor összegfüggvényének deriváltjára vonatkozó tétel alapján például

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \implies \exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x),$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \implies$$

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!} 2n \cdot x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2(k+1)-1}}{[2(k+1)-1]!} = (-1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(x). \end{aligned}$$

Az inverz függvény deriválási szabályának alkalmazásával pedig

$$\ln = \exp^{-1} \implies \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Legyen  $f : I \rightarrow ]0, +\infty[$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $F(x) = [f(x)]^{g(x)}$  ( $x \in I$ ). Ha  $f$  és  $g$  differenciálható, akkor  $F$  is és  $F'(x) = \exp[g(x) \ln[f(x)]]$  ( $x \in I$ ) miatt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \exp[g(x) \ln[f(x)]] \cdot \left( g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right) = \\ &= [f(x)]^{g(x)} \left( g'(x) \ln[f(x)] + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right). \end{aligned}$$

Speciálisan, ha az alap tetszőleges  $a > 0$  konstans:

$$a^x = \exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln a) \implies \exp'_a(x) = a^x \cdot \ln(a),$$

ha pedig a kitevő tetszőleges  $k \in \mathbb{R}$  konstans:

$$\varphi(x) = x^k \quad (x > 0) \implies \varphi'(x) = x^k \cdot \left(0 \cdot \ln(x) + \frac{k \cdot 1}{x}\right) = k \cdot x^{k-1}.$$

A hányados deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \implies \\ \operatorname{tg}'(x) &= \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 - \sin(x)[- \sin x]}{(\cos(x))^2} = \\ &= \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} & \text{vagy másképp} \\ 1 + \operatorname{tg}^2(x). \end{cases} \end{aligned}$$

A továbbiakban az inverz függvény deriválási szabályát alkalmazzuk.

$$\operatorname{arctg} = \left( \operatorname{tg} |_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \right)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \implies$$

$\operatorname{arctg}$  differenciálható és

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Definíció szerint

$$\operatorname{arcsin} = \left( \sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Mivel  $\sin'(y) = \cos(y) > 0$ , ha  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ , ezért  $x \in ]-1, 1[$  esetén  $\operatorname{arcsin}$  differenciálható  $x$ -ben és

$$\operatorname{arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\operatorname{arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{arcsin}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Hasonlóan  $\operatorname{arsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható és  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$\operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{arsh}(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

□