

A differenciálszámítás középérték-tételei, függvényvizsgálat

Boros Zoltán

2020. február 29.

1. Lokális szélsőérték fogalma, szükséges feltétele

1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in I$ pontban az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek lokális minimuma van, ha $\exists r > 0 : \forall x \in I : |x - x_0| < r$ esetén $f(x_0) \leq f(x)$.

1.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in I$ pontban az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek lokális maximuma van, ha $\exists r > 0 : \forall x \in I : |x - x_0| < r$ esetén $f(x_0) \geq f(x)$.

1.3. TÉTEL. [Szükséges feltétel:] Tegyük fel, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in I^0$ pontban [tehát x_0 nem végpontja I -nek!]. Ha f -nek x_0 -ban lokális szélsőértéke (minimuma vagy maximuma) van, akkor $f'(x_0) = 0$.

BIZONYÍTÁS. Ha például f -nek x_0 -ban lokális minimuma van, akkor $\exists r > 0 : \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[: f(x) \geq f(x_0)$ (mivel $x_0 \in I^0$, feltehetjük, hogy $]x_0 - r, x_0 + r[\subset I$).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tehát } x \in]x_0 - r, x_0[\text{ esetén } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ ezért } f'(x_0) \leq 0, \\ \text{illetve } x \in]x_0, x_0 + r[\text{ esetén } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ ezért } f'(x_0) \geq 0. \end{array} \right\} \implies f'(x_0) = 0.$$

□

2. Középérték-tételek

2.1. TÉTEL. [Darboux-tétel:] Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható és $a, b \in I$, $a < b$. Ekkor bármely $f'(a)$ és $f'(b)$ közé eső λ valós számhoz létezik $\xi \in]a, b[$ úgy, hogy $f'(\xi) = \lambda$.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük például azt az esetet, amikor $f'(a) < f'(b)$, így a feltevésünk szerint $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Legyen $g(x) = f(x) - \lambda \cdot x$ ($x \in [a, b]$). Mivel g folytonos, $\exists u, w \in [a, b] : g(u) = \min g([a, b]), g(w) = \max g([a, b])$. Továbbá g

differenciálható és $g'(x) = f'(x) - \lambda$ ($x \in [a, b]$).

Mivel

$$g'(a) = f'(a) - \lambda < 0, \exists x \in]a, b[: \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0 \implies g(x) < g(a), \text{ így } u \neq a.$$

Mivel

$$g'(b) = f'(b) - \lambda > 0, \exists x \in]a, b[: \frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0 \implies g(x) < g(b), \text{ így } u \neq b.$$

Tehát

$$u \in]a, b[\implies 0 = g'(u) = f'(u) - \lambda, \text{ azaz } f'(u) = \lambda.$$

□

2.2. TÉTEL. [Rolle-tétel:] Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény (ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), amely minden $x \in]a, b[$ pontban differenciálható, továbbá tegyük fel, hogy $f(a) = f(b)$. Ekkor $\exists \xi \in]a, b[: f'(\xi) = 0$.

BIZONYÍTÁS. Mivel f folytonos,

$$\exists u, w \in [a, b] : f(u) = \min f([a, b]), f(w) = \max f([a, b]).$$

Ha $\{u, w\} \subset \{a, b\}$, akkor az $f(u) = f(w)$ miatt f konstans, így $\forall \xi \in]a, b[: f'(\xi) = 0$.
Ha például $u \in]a, b[$, akkor $f'(u) = 0$. Hasonlóan, $w \in]a, b[$ esetén $f'(w) = 0$. □

2.3. TÉTEL. [Cauchy-féle középérték-tétel:] Legyenek $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy f és g minden $x \in]a, b[$ pontban differenciálható. Ekkor $\exists \xi \in]a, b[:$

$$(C) \quad [f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Ekkor $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely az $]a, b[$ intervallumon differenciálható, továbbá

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = \\ &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a), \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(a), \end{aligned}$$

így h -ra teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, ezért $\exists \xi \in]a, b[$ úgy, hogy

$$0 = h'(\xi) = [f(b) - f(a)]g'(\xi) - [g(b) - g(a)]f'(\xi) \implies (C).$$

□

2.4. TÉTEL. [Lagrange-féle középérték-tétel]: Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely az $]a, b[$ intervallumon differenciálható. Ekkor $\exists \xi \in]a, b[$:

$$(L) \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk a Cauchy-féle középérték-tételt a $g(x) = x$ ($x \in [a, b]$) függvényre! $\square$

3. Monotonitás

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum.

3.1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor

- (a) f monoton növekvő $\iff \forall x \in I : f'(x) \geq 0$,
- (b) f monoton csökkenő $\iff \forall x \in I : f'(x) \leq 0$,
- (c) f konstans $\iff \forall x \in I : f'(x) = 0$,
- (d) f szigorúan monoton növekvő $\iff \forall x \in I : f'(x) \geq 0$ és $\forall a, b \in I, a < b$ esetén $\exists y \in]a, b[: f'(y) > 0$,
- (e) f szigorúan monoton csökkenő $\iff \forall x \in I : f'(x) \leq 0$ és $\forall a, b \in I, a < b$ esetén $\exists y \in]a, b[: f'(y) < 0$.

BIZONYÍTÁS.

- (a) $[\implies]$ Legyen $x_0 \in I$. Ha $x_0 < x \in I$, akkor $f(x_0) \leq f(x)$ miatt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \implies f'_+(x_0) \geq 0 \quad [\text{ha } x_0 \neq \sup I].$$

Ha $x < x_0, x \in I$, akkor $f(x) \leq f(x_0)$ miatt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \implies f'_-(x_0) \geq 0 \quad [\text{ha } x_0 \neq \inf I].$$

$[\impliedby]$ Legyen $x, y \in I$ úgy, hogy $x < y$. Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel szerint.

$$\exists \xi \in]x, y[: f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \geq 0, \text{ azaz } f(x) \leq f(y).$$

- (b) (a)-hoz hasonló, illetve arra visszavezethető $[-f]$.

- (c) f konstans $\iff f$ monoton növekvő és monoton csökkenő

$$\iff \forall x \in I : f'(x) \geq 0 \text{ és } f'(x) \leq 0 \iff \forall x \in I : f'(x) = 0.$$

(d) $[\implies] f$ szigorúan monoton növekvő $\implies f$ monoton növekvő $\implies \forall x \in I : f'(x) \geq 0$. Ha $a, b \in I : a < b$ és $\forall y \in I : f'(y) = 0 \implies f$ konstans $]a, b[$ -n, ami ellentmondás.

$[\impliedby]$ A feltételek és (a) szerint f monoton növekvő. Ha $x, y \in I, x < y$ és $f(x) = f(y)$, akkor $\forall u \in [x, y] :$

$$f(x) \leq f(u) \leq f(y) = f(x) \implies f(u) = f(x) \implies$$

$f|_{[x,y]}$ konstans $\implies \forall u \in]x, y[: f'(u) = 0$, ami ellentmondás.

□

3.2. Példa. Legyen $f(x) = x^3$ ($x \in \mathbb{R}$). Ekkor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő, továbbá

$$f'(x) = 3x^2 \begin{cases} > 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ = 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

3.3. Következmény. Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható és $x_0 \in I^0$.

(a) Ha $\exists \delta > 0 :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0] : f'(x) \geq 0$ és $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta[: f'(x) \leq 0$ [tehát f' előjelet vált (+-ról -ra) x_0 -ban], akkor f -nek x_0 -ban lokális maximuma van.

(b) Ha $\exists \delta > 0 :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0] : f'(x) \leq 0$ és $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta[: f'(x) \geq 0$ [tehát f' előjelet vált (-ról +ra) x_0 -ban], akkor f -nek x_0 -ban lokális minimuma van.

BIZONYÍTÁS. (a) $f|_{]x_0-\delta, x_0]}$ monoton növekvő, ezért $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0] : f(x) \leq f(x_0)$. Hasonlóan $f|_{[x_0, x_0+\delta[}$ monoton csökkenő, ezért $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta[: f(x_0) \geq f(x)$. Tehát $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: f(x) \leq f(x_0)$.

(b) hasonló (a)-hoz.

□

4. Határértékek, L'Hospital-szabály

Motiváció: Melyik nő "gyorsabban": x^{100} vagy 2^x ? - Úgy tűnik, hogy nagy x -ekre x^{100} és 2^x összehasonlítása ezen a kérdésen múlhat. A növekedést viszont a derivált méri. Ez arra utal, hogy pl.: ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100x^{99}}{2^x \ln 2}$ "kicsi", akkor $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{100}}{2^x}$ is "kicsi".

4.1. TÉTEL. [L'Hospital-szabály]: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható; $\forall x \in I : g'(x) \neq 0$, $d \in \{\inf(I), \sup(I)\} \subset \mathbb{R}^*$ (azaz d az I alsó vagy felső végpontja, lehet $-\infty$, ill. $+\infty$ is), továbbá

$$\lim_{x \rightarrow d} f(x) = \lim_{x \rightarrow d} g(x) = c \in \{0, \pm\infty\},$$

valamint tegyük fel, hogy létezik

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*.$$

Ekkor $\lim_{x \rightarrow d} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow d} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BIZONYÍTÁS. [Megjegyzés. $g'(x) \neq 0$ és a Darboux-tétel miatt g' jeltartó $\implies g$ szigorúan monoton $\implies g(y) = 0$ legfeljebb egy $y \in I$ pontban teljesülhet, ezért I helyett az $] \inf(I), y[$ vagy az $]y, \sup(I)[$ intervallumot tekintve már $g(x) \neq 0$ minden x pontban.]

Sok eset van aszerint, hogy d alsó vagy felső végpont-e, illetve, hogy d, c , illetve A véges vagy $\pm\infty$.

Ebből három esetet tekintünk.

I. eset: $d = \inf(I) \in \mathbb{R}$, $c = 0$ [$A \in \mathbb{R}^*$ tetszőleges].

Legyen $I_0 = I \cup \{d\}$ és $\bar{f}, \bar{g} : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ úgy,

hogy $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in I \\ 0, & \text{ha } x = d, \end{cases} \quad \bar{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{ha } x \in I \\ 0 & \text{ha } x = d. \end{cases}$ Ekkor $\bar{f}$ és $\bar{g}$ folytonos

és I -n differenciálható. Legyen most $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow I$ úgy, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = d$. A Cauchy-féle középérték-tétel szerint létezik $\xi_n \in]d, x_n[$ úgy, hogy

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\bar{f}(x_n) - \bar{f}(d)}{\bar{g}(x_n) - \bar{g}(d)} = \frac{\bar{f}'(\xi_n)}{\bar{g}'(\xi_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

és $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = d$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x \rightarrow d} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Így az átviteli elv adja az állítást.

II. eset. $d = +\infty$, $c = 0$ [$A \in \mathbb{R}^*$ tetszőleges]. Feltehető, hogy $\inf(I) = a > 0$. Legyen most $f_1, g_1 :]0, \frac{1}{a}[\rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $f_1(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ és $g_1(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ $x \in]0, \frac{1}{a}[$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

és hasonlóan

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g_1(x) = 0,$$

továbbá

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} = A$$

miatt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f_1\left(\frac{1}{t}\right)}{g_1\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A.$$

III. eset: $d = c = +\infty$, $A \in \mathbb{R}$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $K_1 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $y \in I$, $y > K_1$ esetén $\left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Legyen most $x_0 \in I$ úgy, hogy $x_0 > K_1$. Legyen továbbá $K_2 > x_0$ úgy, hogy $x \in I$, $x > K_2$ esetén $f(x) > f(x_0)$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

miatt $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0)}{f(x)} = 0$ és $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x_0)}{g(x)} = 0$, ezért $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1$. Emiatt

$\exists K_3 > K_2$ úgy, hogy $x \in I$, $x > K_3$ esetén

$$|A| \left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } \left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| < 2.$$

A Cauchy- féle középérték- tétel szerint $x \in I$, $x > K_3$ esetén létezik $\xi \in]x_0, x[$ úgy, hogy $g'(\xi)[f(x) - f(x_0)] = f'(\xi)[g(x) - g(x_0)]$.

Ekkor

$$\frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)[g(x) - g(x_0)] \cdot f'(\xi)}{g(x)[f(x) - f(x_0)] \cdot g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

miatt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| + \left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right) \right| + \left| \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} A - A \right| < 0 + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

4.2. Példa. 1.)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \left[\frac{1}{\sin(x)} - \operatorname{ctg}(x) \right] &= [(+\infty) - (+\infty)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{0 - (-\sin(x))}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0 \\ [I &=]0, \frac{\pi}{2}[, d = 0, c = 0]. \end{aligned}$$

2.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ ez egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú, így

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3.) Legyen

$$f(x) = x, \quad g(x) = 2x + \sin(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x\sqrt{2}) \quad (x \in]2, +\infty[).$$

Ekkor $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (mert $g(x) > 2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$), továbbá

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x + \sin(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x\sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{\sin(x)}{x} + \frac{\sin(x\sqrt{2})}{x\sqrt{2}}} = \frac{1}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Másrésről: $f'(x) = 1$, $g'(x) = 2 + \cos(x) + \cos(x\sqrt{2})$ és $\forall a \geq 2 : g'([a, +\infty[) =]0, 4[$, így $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$ és $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

5. Konvexitás

$I \subset \mathbb{R}$ intervallum.

5.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, ha $\forall x, y \in I : \forall \lambda \in [0, 1] :$

$$(K) \quad f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

5.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konkáv, ha $\forall x, y \in I : \forall \lambda \in [0, 1] :$

$$(Kk) \quad f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

5.3. Állítás. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ esetén az alábbi feltételek ekvivalensek:

(A) f konvex,

(B) tetszőleges $x, y, z \in I$, $x < z < y$ esetén

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

(C) tetszőleges $x, y, z \in I$, $x < z < y$ esetén

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

BIZONYÍTÁS. (B) $\implies$ (C) nyilvánvaló.

(C) $\implies$ (B):

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &= \frac{f(y) - f(z) + f(z) - f(x)}{y - x} = \\ &= \frac{y - z}{y - x} \cdot \frac{f(y) - f(z)}{y - z} + \frac{z - x}{y - x} \cdot \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \in \left[\frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \right], \\ &\text{mert } \frac{y - z}{y - x}, \frac{z - x}{y - x} \in]0, 1[\\ &\text{és } \frac{y - z}{y - x} + \frac{z - x}{y - x} = \frac{y - z + z - x}{y - x} = 1. \end{aligned}$$

(A) $\implies$ (C): Legyen $x, y, z \in I$, $x < z < y$, valamint $\lambda = \frac{z - x}{y - x}$.
Ekkor $0 < \lambda = \frac{z - x}{y - x} < \frac{y - x}{y - x} = 1$ és

$$1 - \lambda = 1 - \frac{z - x}{y - x} = \frac{(y - x) - (z - x)}{y - x} = \frac{y - x - z + x}{y - x} = \frac{y - z}{y - x},$$

valamint

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \frac{y - z}{y - x} \cdot x + \frac{z - x}{y - x} \cdot y = \frac{xy - xz + yz - xy}{y - x} = \frac{(y - x)z}{y - x} = z,$$

ezért (K) $\implies$

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y) \implies \\ (y-x)f(z) &\leq (y-z)f(x) + (z-x)f(y) \implies \\ [(y-x) - (z-x)] \cdot f(z) - (y-z)f(x) &\leq (z-x)[f(y) - f(z)] \\ / : (y-z)(z-x) &\implies (C). \end{aligned}$$

(C) $\implies$ (A): $x, y \in I$, $\lambda \in [0, 1]$. Ha $x = y$ vagy $\lambda \in \{0, 1\}$, akkor (K) egyenlőséggel teljesül.

A továbbiakban feltesszük, hogy $x \neq y$ és $\lambda \in]0, 1[$.

Elegendő az $x < y$ esetet ellenőrizni. Ekkor legyen $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \implies x < z < y$ így (C) miatt

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} &\leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}, \\ \implies f(z) &\leq \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y), \end{aligned}$$

illetve

$$\lambda = \frac{z-x}{y-x} \text{ és } 1-\lambda = \frac{y-z}{y-x} \implies (K).$$

□

5.4. TÉTEL. Tegyük fel, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor

$$f \text{ konvex} \iff f' : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ monoton növekvő.}$$

BIZONYÍTÁS. [$\implies$] Legyen $x, y \in I$ úgy, hogy $x < y$. Ekkor tetszőleges $t, u \in I$, $x < t < u < y$ esetén

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \leq \frac{f(y) - f(u)}{y - u} = \frac{f(u) - f(y)}{u - y},$$

ezért

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \lim_{u \rightarrow y} \frac{f(u) - f(y)}{u - y} = f'(y).$$

[$\Leftarrow$] Legyen $x, y, z \in I$ úgy, hogy $x < z < y$, ekkor létezik $t \in]x, z[$ és $u \in]z, y[$ úgy, hogy

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(t) \leq f'(u) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z},$$

hiszen $t < z < u$ és f' növekvő.

□

5.5. Következmény. Tegyük fel, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható (azaz f differenciálható és f' is differenciálható, $f'' = (f')'$). Ekkor

$$f \text{ konvex} \iff \forall x \in I : f''(x) \geq 0.$$