

Magasabb rendű deriváltak, Taylor-tétel

Boros Zoltán

2020. február 29.

1. Magasabb rendű deriváltak

1.1. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

Azt mondjuk, hogy

- $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ [f nulladik deriváltja x_0 -ban $f(x_0)$];
- $k \in \mathbb{N}$ esetén f k -szor differenciálható x_0 -ban, ha $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $f^{(k-1)}(x)$ létezik minden $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ esetén és $f^{(k-1)}$ differenciálható x_0 -ban. Ekkor $f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0)$. [speciálisan: $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$]
- $k \in \mathbb{N}$ esetén f k -szor folytonosan differenciálható az x_0 pontban, ha $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $f^{(k)}(x)$ létezik minden $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ esetén és $f^{(k)}$ folytonos x_0 -ban.
- $k \in \mathbb{N}$ esetén f k -szor (folytonosan) differenciálható (I -n), ha $\forall x \in I : f$ k -szor (folytonosan) differenciálható x -ben.

1.2. TÉTEL. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ és $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -szer differenciálható x_0 -ban. Akkor az

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (cf)(x) = cf(x)$$

$$\text{és } (f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \quad (x \in I)$$

módon értelmezett függvények is n -szer differenciálhatóak x_0 -ban, továbbá

$$\begin{aligned} (f + g)^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0), \\ (cf)^{(n)}(x_0) &= c \cdot f^{(n)}(x_0), \\ \text{[Leibniz-szabály]} \quad (f \cdot g)^{(n)}(x_0) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0). \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS. Teljes indukcióval; $f + g$ és $c \cdot f$ esetén triviális. $f \cdot g$ esetén $n = 0$ evidens, $n = 1$ szintén ismert; ha pedig n -re igaz, akkor

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x_0) = ((f \cdot g)^{(n)})'(x_0) =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [f^{(k+1)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0) + f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k+1)}(x_0)] = \\
& = \binom{n}{0} f^{(0)}(x_0)g^{(n+1)}(x_0) + \\
& \quad \sum_{k=1}^n f^{(k)}(x_0)g^{(n-k+1)}(x_0) \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] \\
& \quad + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x_0)g^{(0)}(x_0) \\
& = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x_0)g^{(n+1-k)}(x_0).
\end{aligned}$$

□

2. Taylor tétele és következményei

2.1. TÉTEL. [Taylor-tétel:] Legyen $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x_0 \in]a, b[$ és $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -szer differenciálható. Ekkor $\forall x \in]a, b[\setminus \{x_0\} : \exists \xi$ az x_0 és x között (azaz $x_0 < x$ esetén $\xi \in]x_0, x[$, $x_0 > x$ esetén $\xi \in]x, x_0[$) úgy, hogy

$$(T1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (t - x_0)^k, \quad M = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}$$

és

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - M(t - x_0)^{n+1} \quad (t \in]a, b[).$$

Ekkor g $(n+1)$ -szer differenciálható és $g^{(k)}(x_0) = 0$ ha $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, ugyanis

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Mivel $g(x) = 0$, a Rolle-tétel szerint létezik x_1 az x_0 és az x között úgy, hogy $g'(x_1) = 0$. Megint a Rolle-tétel szerint létezik x_2 az x_0 és az x_1 között úgy, hogy $g''(x_2) = 0$, stb., létezik x_n az x_0 és x között úgy, hogy $g^{(n)}(x_n) = 0$, ezért megint a Rolle-tétel szerint létezik ξ az x_0 és az x_n (és így x_0 és x) között, amelyre

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - M \cdot (n+1)! \Rightarrow M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Rightarrow (T1).$$

□

2.2. Megjegyzés. A bizonyításban bevezetett P_n polinom az f n -edik Taylor-polinomja (x_0 -ban).

2.3. Következmény. Ha $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható és $\exists K \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall x \in]a, b[: |f^{(n)}(x)| \leq K$, akkor

$$(T2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

(f Taylor-sora).

2.4. Példák. 1.)

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{\sin^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{\sin^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{\sin^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{\sin^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 = \\ &= \sin(0) + \cos(0) \cdot (x) - \frac{\sin(0)}{2} x^2 - \frac{\cos(0)}{6} x^3 + \frac{\sin(\xi)}{24} x^4 = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin(\xi)}{24} x^4, \end{aligned}$$

ezért

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

(ez akkor éles, ha $|x|$ kicsi...).

2.) Legyen $f(x) = \ln(1+x)$ ($x \in]-1, +\infty[$), ekkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \\ f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2}, \\ f^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \text{ stb., ha} \\ f^{(k)}(x) &= (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}, \text{ akkor} \\ f^{(k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} \cdot (k-1)!(-k) \cdot (1+x)^{-k-1} = (-1)^{k+2} k! (1+x)^{-(k+1)}. \end{aligned}$$

Speciálisan $f(0) = \ln 1 = 0$, valamint

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)! \quad (k = 1, 2, \dots),$$

ezért

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi} \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

ahol ξ a 0 és x között van. Ebből $x = 1$ választással

$$\ln 2 = f(1) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\xi_n} \right)^{n+1},$$

ahol $0 < \xi_n < 1$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\xi_n} \right)^{n+1} = 0,$$

tehát

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Motiváció: Legyen $\varphi_n(x) = x^n$, $x_0 = 0$.

Ekkor $\varphi'_n(x_0) = \dots = \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0$, $\varphi_n^{(n)}(x_0) = n! > 0$.

Ha n páros, φ_n -nek (lokális) minimuma van x_0 -ban.

Ha n páratlan, φ_n -nek nincs lokális szélsőérték-helye x_0 -ban

(viszont $n \geq 3$, n páratlan $\Rightarrow x_0$ inflexiós hely).

2.5. TÉTEL. [A lokális szélsőérték elegendő feltétele]: Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x_0 \in]a, b[$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ $(n-1)$ -szer differenciálható, $f^{(k)}(x_0) = 0$ ($k = 1, \dots, n-1$) és létezik $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, akkor

- amennyiben n páratlan, f -nek nincs lokális szélsőértéke x_0 -ban;
- amennyiben n páros, $f^{(n)}(x_0) > 0$ esetén f -nek (szigorú) lokális minimuma van x_0 -ban, illetve $f^{(n)}(x_0) < 0$ esetén f -nek (szigorú) lokális maximuma van x_0 -ban.

BIZONYÍTÁS. A Taylor-tételt $(n-2)$ -re alkalmazva a feltevések miatt $x \neq x_0$ esetén $\exists \xi$ az x_0 és x között úgy, hogy

$$(1) \quad f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1}.$$

Ha például $f^{(n)}(x_0) > 0$, akkor $\exists \delta > 0 : \forall u \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} :$

$$0 < \frac{f^{(n-1)}(u) - f^{(n-1)}(x_0)}{u - x_0} = \frac{f^{(n-1)}(u)}{u - x_0}.$$

Tehát, ha x (és így ξ is) elég közel van x_0 -hoz, akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}[f^{(n-1)}(\xi)] &= \operatorname{sgn}(\xi - x_0) = \operatorname{sgn}(x - x_0) \implies \\ \operatorname{sgn}[f(x) - f(x_0)] &= \operatorname{sgn}[f^{(n-1)}(\xi)] \cdot \operatorname{sgn}(x - x_0)^{n-1} \\ &= \operatorname{sgn}(x - x_0) \cdot \operatorname{sgn}(x - x_0)^{n-1} = \operatorname{sgn}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítandó állítást visszavezettük a hatványfüggvények esetére... □