

Többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása

(8. előadás)

Boros Zoltán

2019. április 9.

1. Többváltozós függvények integrálszámítása

1.1. A Riemann-integrál fogalma, alapvető tulajdonságai

1.1. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $\mathcal{I}_k = \{ I \subset \mathbb{R}^k : I \text{ zárt téglá (intervallum)} \}$. $I \in \mathcal{I}_k$ esetén $P = \{I_j\}_{j=1}^n$ beosztása I -nek, ha

$$I_j \in \mathcal{I}_k, \quad (I_i \cap I_j)^\circ = \emptyset, \text{ ha } i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{és } I = \bigcup_{j=1}^n I_j.$$

Továbbá legyen $\mathcal{D}(I) = \{ P : P \text{ beosztása } I\text{-nek} \}$.

Legyen $P, P' \in \mathcal{D}(I)$.

- $\|P\| = \max\{\text{diam}(I_j) : j = 1, \dots, n\}$ P finomsága.
- Azt mondjuk, hogy P' finomítása P -nek, ha

$$P = \{I_j\}_{j=1}^n \text{ és } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} :$$

$$\exists P'_j \subset P' \text{ úgy, hogy } P'_j \in \mathcal{D}(I_j).$$

- P és P' közös finomítása $P \vee P' = \{ T \cap S \mid T \in P, S \in P' \text{ és } (T \cap S)^\circ \neq \emptyset \}$.
- $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ szelekciója P -nek, ha $P = \{I_j\}_{j=1}^n$ és $x_j \in I_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$).
- P „szorzat alakú”, ha előáll az I éleinek (egy dimenziós) beosztásait alkotó rész-intervallumok Descartes-szorzatainak halmazaként.

Emlékeztető: Az $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k] \in \mathcal{I}_k$ zárt téglá (k dimenziós) térfogata

$$v(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_k - a_k).$$

Legyen $I \in \mathcal{I}_k$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, $P = \{I_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{D}(I)$ esetén

$$m_j(f) = \inf f(I_j), \quad M_j(f) = \sup f(I_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

továbbá, ha $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy szelekciója P -nek, legyen

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j(f)v(I_j), \quad S(f, P) = \sum_{j=1}^n M_j(f)v(I_j),$$

$$\omega(f, P) = S(f, P) - s(f, P), \quad \sigma(f, P, \xi) = \sum_{j=1}^n f(x_j)v(I_j)$$

[ezeket rendre alsó- illetve felső integrálközelítő összegnek, oszcillációs összegnek, valamint közbeeső integrálközelítő összegnek nevezzük].

1.2. Állítás. $P = \{I_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{D}(I)$ esetén

$$(1) \quad v(I) = \sum_{j=1}^n v(I_j)$$

$$(2) \quad s(f, P) \leq \sigma(f, P, \xi) \leq S(f, P), \quad \omega(f, P) \geq 0,$$

(3) Ha P' finomítása P -nek, akkor

$$s(f, P) \leq s(f, P'), \quad S(f, P') \leq S(f, P),$$

$$(4) \quad \forall P, \tilde{P} \in \mathcal{D}(I) : \quad s(f, P) \leq S(f, \tilde{P}).$$

BIZONYÍTÁS.

(1) Az $n = 2$ eset csak úgy lehetséges, ha az I téglát az egyik éle mentén kettévágjuk. Ekkor az állítás azonnal adódik $v(I)$ definíciójából. Ha az általános eset ezen lépés ismétlésével lenne elérhető, akkor azonnal adódna az állítás. Azonban ez általában nem igaz. Viszont az I_j rész-téglák ilyen módon történő ismételt kettévágásaival előállíthatjuk P egy szorzat alakú P' finomítását, ami már előáll az I ismételt kettévágásaiból is (véges sok lépésben). Tehát P' mindkét előállítására érvényes v additivitása, ezért (1) mindkét oldala egyenlő a P' -t alkotó résztéglák térfogatainak összegével.

(2) Következik az $m_j(f) \leq f(x_j) \leq M_j(f) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$ egyenlőtlenségből.

(3) Például, ha $P'_j = \{I'_{ji}\}_{i=1}^{l_j} \in \mathcal{D}(I_j)$, akkor $m'_{ji}(f) = \inf f(I'_{ji})$, $M'_{ji}(f) = \sup f(I'_{ji})$ esetén $m_j(f) \leq m'_{ji}(f) \leq M'_{ji}(f) \leq M_j(f) \quad (i = 1, 2, \dots, l_j)$ miatt

$$m_j(f)v(I_j) = m_j(f) \sum_{i=1}^{l_j} v(I'_{ji}) \leq \sum_{i=1}^{l_j} m'_{ji}(f)v(I'_{ji}) \quad \text{stb.}$$

$$(4) \quad s(f, P) \leq s(f, P \vee \tilde{P}) \leq S(f, P \vee \tilde{P}) \leq S(f, \tilde{P}).$$

□

1.3. Definíció. Legyen $I \in \mathcal{I}_k$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos,

$$\underline{\int}_I f = \sup\{s(f, P) : P \in \mathcal{D}(I)\},$$

$$\overline{\int}_I f = \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{D}(I)\}$$

[ezeket f alsó- illetve felső Darboux-integráljának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható I -n (jele: $f \in \mathcal{R}(I)$), ha

$$\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f.$$

Ezek közös értékét f Riemann-integráljának nevezzük és

$$\int_I f = \int_I f(x) dx$$

módon jelöljük.

1.4. TÉTEL. Legyen $I \in \mathcal{I}_k$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor

(1) $\forall P \in \mathcal{D}(I) :$

$$0 \leq \overline{\int}_I f - \underline{\int}_I f \leq \omega(f, P);$$

(2)

$$\underline{\int}_I (-f) = -\overline{\int}_I f, \quad \overline{\int}_I (-f) = -\underline{\int}_I f,$$

(3)

$$\underline{\int}_I (f + g) \geq \underline{\int}_I f + \underline{\int}_I g, \quad \overline{\int}_I (f + g) \leq \overline{\int}_I f + \overline{\int}_I g$$

(4) Ha $\forall x \in I : f(x) \leq g(x)$, akkor

$$\underline{\int}_I f \leq \underline{\int}_I g, \quad \overline{\int}_I f \leq \overline{\int}_I g$$

(5) $\lambda \geq 0 \implies$

$$\underline{\int}_I \lambda f = \lambda \underline{\int}_I f, \quad \overline{\int}_I \lambda f = \lambda \overline{\int}_I f,$$

illetve $\lambda < 0 \implies$

$$\underline{\int}_I \lambda f = \lambda \overline{\int}_I f, \quad \overline{\int}_I \lambda f = \lambda \underline{\int}_I f.$$

ÚTMUTATÁS A BIZONYÍTÁSHOZ. Többszörre házi feladat a bizonyítás, de például (3):

$$m_j(f+g) \geq m_j(f) + m_j(g) \implies s(f+g, P) \geq s(f, P) + s(g, P)$$

Legyen $\varepsilon > 0 \exists P_1, P_2 \in \mathcal{D}(I)$:

$$s(f, P_1) > \int_I f - \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(g, P_2) > \int_I g - \frac{\varepsilon}{2},$$

akkor $P = P_1 \vee P_2$ esetén

$$s(f, P) > \int_I f - \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } s(g, P) > \int_I g - \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ezért}$$

$$\int_I (f+g) \geq s(f+g, P) \geq s(f, P) + s(g, P) > \int_I f + \int_I g - \varepsilon.$$

□

1.5. Következmény. Az integrál linearitása és monotonitása.

1.2. Az integrál kiszámítása

1.6. Lemma. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos úgy, hogy $\forall x \in I^\circ : f(x) = \lambda$. Ekkor

$$f \in \mathcal{R}(I) \text{ és } \int_I f = \lambda v(I).$$

1.7. TÉTEL. Legyen $p, q \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{I}_p, Y \in \mathcal{I}_q$, $I = X \times Y$, $f \in \mathcal{R}(I)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_{\underline{X}} \left(\int_{\underline{Y}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\underline{X}} \left(\overline{\int}_Y f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \overline{\int}_X \left(\int_{\underline{Y}} f(x, y) dy \right) dx = \overline{\int}_X \left(\overline{\int}_Y f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $\exists \{X_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{D}(X)$, $\{Y_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{D}(Y)$ úgy, hogy

$$P = \{X_i \times Y_j\}_{i=1, j=1}^{n, m} \in \mathcal{D}(I),$$

$$\int_I f - s(f, P) < \varepsilon \text{ és } S(f, P) - \int_I f < \varepsilon.$$

Ha v_p illetve v_q a p illetve a q dimenziós téglaterfogat, akkor

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}(f) v_p(X_i) v_q(Y_j),$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(f) v_p(X_i) v_q(Y_j).$$

Legyen

$$A_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in X_i \quad (x \in X) \\ 0, & \text{ha } x \in X \setminus X_i \quad (i = 1, \dots, n). \end{cases} \quad B_j(y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } y \in Y_j \quad (y \in Y) \\ 0, & \text{ha } y \in Y \setminus Y_j \quad (j = 1, \dots, m). \end{cases}$$

Ekkor

$$\int_X A_i = v_p(X_i), \quad \int_Y B_j = v_q(Y_j) \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m).$$

Legyen

$$m(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}(f) A_i(x) B_j(y) \quad \text{és}$$

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(f) A_i(x) B_j(y),$$

ha

$$(x, y) \in \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (X_i \times Y_j)^\circ, \quad \text{illetve}$$

$$m(x, y) = \inf f(I), \quad M(x, y) = \sup f(I)$$

egyébként I -n. Ekkor

$$y \mapsto m(x, y), \quad y \mapsto M(x, y) \in \mathcal{R}(Y) \quad (x \in X),$$

$$x \mapsto \int_Y m(x, y) dy, \quad x \mapsto \int_Y M(x, y) dy \in \mathcal{R}(X),$$

továbbá $m(x, y) \leq f(x, y) \leq M(x, y) \quad ((x, y) \in I)$. Így például:

$$\begin{aligned} \int_I f - \varepsilon &< s(f, P) = \int_X \left(\int_Y m(x, y) dy \right) dx \leq \int_{\underline{X}} \left(\int_Y \overline{f}(x, y) dy \right) dx \leq \\ &\leq \int_X \left(\int_Y M(x, y) dy \right) dx = S(f, P) < \int_I f + \varepsilon. \end{aligned}$$

□