

Többszörös függvények differenciál- és integrálszámítása

(9–10. előadás)

Boros Zoltán

2019. április 16–23.

1. A Riemann-integrál kiterjesztése; Jordan-mérték

1.1. Alapfogalmak

1.1. Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}^k$ korlátos, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, valamint

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in E, \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R}^k \setminus E. \end{cases}$$

Tekintsünk egy $T \in \mathcal{I}_k$ téglát, melyre $E \subset T$. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható, ha $\tilde{f}|_T \in \mathcal{R}(T)$, továbbá ekkor

$$\int_E f = \int_T \tilde{f}.$$

1.2. Jelölés. $f \in \mathcal{R}(E)$.

1.3. Megjegyzés. Megmutatható, hogy f integrálhatósága és $\int_E f$ értéke nem függ T választásától.

1.4. Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}^k$ korlátos és $\varrho_E(x) = 1$ ($x \in E$). Azt mondjuk, hogy E Jordan-mérhető, ha $\varrho_E \in \mathcal{R}(E)$. Ekkor E Jordan-mértéke

$$\mu(E) = \int_E 1.$$

[$\mu = \mu_k$, ha utalunk a dimenzióra.]

1.5. Megjegyzések. 1.) $\tilde{\varrho}_E = \chi_E$, ahol

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in E \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R}^k \setminus E \end{cases}$$

az E halmaz indikátorfüggvénye.

2.) Ha $I \in \mathcal{I}_k$, akkor I Jordan- mérhető és

$$\mu(I) = v(I).$$

3.) Ha $T \in \mathcal{I}_k$, $E \subset T$ és $P \in \mathcal{D}(T)$, akkor

$$s(\chi_E|_T, P) = \sum_{I \in P, I \subset E} v(I) \text{ és}$$

$$S(\chi_E|_T, P) = \sum_{I \in P, I \cap E \neq \emptyset} v(I)$$

(geometriai interpretáció).

4.) Ha $T \in \mathcal{I}_k$ úgy, hogy $E \subset T^\circ$, akkor $\chi_E|_T$ szakadási helyeinek halmaza ∂E .
Tehát E Jordan mérhető $\iff \partial E$ Lebesgue szerint nullmértékű.

1.6. TÉTEL. Ha $E \subset \mathbb{R}^k$ (korlátos,) Jordan-mérhető és $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor $f \in \mathcal{R}(E)$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $U = \{x \in \mathbb{R}^k : \tilde{f} : \text{nem folytonos } x\text{-ben}\}$. Ekkor $U \subset \partial E$. $\square$

1.7. TÉTEL. Ha $A \subset \mathbb{R}^k$ és $B \subset \mathbb{R}^k$ (korlátos,) Jordan-mérhető, akkor $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ is Jordan-mérhető. Továbbá, ha $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f. \quad (1)$$

Speciálisan

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \quad (2)$$

ÚTMUTATÁS A BIZONYÍTÁSHOZ.

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B, \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B);$$

illetve

$$\tilde{f} + \tilde{f}|_{A \cap B} = \tilde{f}|_A + \tilde{f}|_B.$$

$\square$

1.8. Következmény. A Jordan-mérték véges (szub)additivitása és monotonitása.

1.2. Nullmértékű halmazok

1.9. Lemma. Legyen $H \subset \mathbb{R}^k$ korlátos. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

(a) H Jordan-mérhető és $\mu(H) = 0$;

(b) $\forall \varepsilon > 0 : \exists m \in \mathbb{N}, T_j \in \mathcal{I}_k \quad (j = 1, 2, \dots, m)$ úgy, hogy

$$H \subset \bigcup_{j=1}^m T_j \text{ és } \sum_{j=1}^m v(T_j) < \varepsilon.$$

BIZONYÍTÁS. (a) $\implies$ (b):

Legyen $T \in \mathcal{I}_k$ úgy, hogy $\overline{H} \subset T^\circ$, valamint $\varepsilon > 0$. Ekkor $\exists P \in \mathcal{D}(T)$ úgy, hogy

$$\varepsilon = \mu(H) + \varepsilon = \int_H 1 + \varepsilon = \int_T \chi_H + \varepsilon > S(\chi_H, P) = \sum_{I \in P} M_I(\chi_H) v(I) = \sum_{I \in P, I \cap H \neq \emptyset} v(I)$$

$$\text{és } H \subset \bigcup_{I \in P, I \cap H \neq \emptyset} I.$$

(b) $\implies$ (a):

Legyen $T \in \mathcal{I}_k$ úgy, hogy

$$\bigcup_{j=1}^m T_j \subset T.$$

Ekkor $\chi_H \leq \sum_{j=1}^m \chi_{T_j}$ miatt

$$0 \leq \int_T \chi_H \leq \int_T \chi_H \leq \sum_{j=1}^m \int_T \chi_{T_j} = \sum_{j=1}^m \int_T \chi_{T_j} = \sum_{j=1}^m v(T_j) < \varepsilon.$$

□

1.10. Következmény. Legyen $E \subset \mathbb{R}^k$ korlátos. Ekkor E Jordan-mérhető $\iff \partial E$ Jordan-mérhető és

$$\mu(\partial E) = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Felhasználjuk a 4. megjegyzést, az előző lemmát, valamint azt, hogy $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$ korlátos és zárt, tehát kompakt. Így ∂E megszámlálható lefedése végesre cserélhető ... □

2. Az integrálás geometriai vonatkozásai

2.1. TÉTEL. [az integrál, mint mérték]: Legyen $I \in \mathcal{I}_k$, $f \in \mathcal{R}(I)$ úgy, hogy $\forall x \in I : f(x) \geq 0$, valamint

$$E = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x), x \in I\}.$$

Ekkor E Jordan-mérhető és

$$\mu(E) = \int_I f.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $M \geq f(x)$ ($x \in I$), valamint $\varepsilon > 0$ és $P = \{I_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{D}(I)$ úgy, hogy

$$\varepsilon > \omega(f, P) = \sum_{j=1}^n [M_j(f) - m_j(f)] v_k(I_j) = \sum_{j=1}^n v_{k+1}(I_j \times [m_j(f), M_j(f)])$$

lefedti $\chi_E|_{I \times [0, M]}$ szakadási helyeinek halmazát, tehát

$$\chi_E|_{I \times [0, M]} \in \mathcal{R}(I \times [0, M]) \text{ és}$$

$$\mu_{k+1}(E) = \int_{I \times [0, M]} \chi_E(x, y) d(x, y) = \int_I \left(\int_0^M \chi_E(x, y) dy \right) dx = \int_I f(x) dx.$$

□

2.2. TÉTEL. [Cavalieri-elv]: Legyen $I \in \mathcal{I}_k$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $H \subset [a, b] \times I$ Jordan-mérhető. Tegyük fel, hogy $\forall t \in [a, b] : H = \{x \in I : (t, x) \in H\}$ Jordan-mérhető és legyen

$$\Phi(t) = \mu_k(H_t) \quad (t \in [a, b]).$$

Ekkor $\Phi \in \mathcal{R}([a, b])$ és

$$\mu_{k+1}(H) = \int_a^b \Phi = \int_a^b \mu_k(H_t) dt.$$

BIZONYÍTÁS.

$$\begin{aligned} \mu_{k+1}(H) &= \int_{[a, b] \times I} \chi_H(t, x) d(t, x) = \int_a^b \left(\int_I \chi_{H_t}(x) dx \right) dt = \\ &= \int_a^b \mu_k(H_t) dt = \int_a^b \mu_k(H_t) dt \end{aligned}$$

a Fubini-tétel szerint.

□

2.3. Példa. Ha a k dimenziós r sugarú gömb térfogata $V_k = c_k \cdot r^k$, akkor

$$V_{k+1} = \int_{-r}^r c_k \cdot \left(\sqrt{r^2 - t^2} \right)^k dt = c_k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^k \cos^k \theta \cdot r \cos \theta d\theta =$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= r \cdot \sin \theta \longleftrightarrow \theta = \arcsin \left(\frac{t}{r} \right) \\ dt &= r \cdot \cos \theta \\ \sqrt{r^2 - t^2} &= \sqrt{r^2 (1 - \sin^2 \theta)} = r \cos \theta \end{aligned}}$$

$$= c_k \cdot r^{k+1} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k+1} \theta d\theta = 2 \cdot c_k r^{k+1} \cdot A_{k+1},$$

$$\text{ahol } A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta \quad (n \in \mathbb{N}_0); \quad A_0 = \frac{\pi}{2}, \quad A_1 = 1,$$

$$\begin{aligned} A_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \cos^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \cos^n \theta d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^n \theta d\theta = A_n + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin \theta}_{f(\theta)} \cdot \underbrace{\cos^n \theta \cdot (-\sin \theta)}_{g'(\theta)} d\theta = \\ &= A_n + \left[\sin \theta \cdot \frac{\cos^{n+1} \theta}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \frac{\cos^{n+1} \theta}{n+1} d\theta = A_n - \frac{1}{n+1} A_{n+2}, \end{aligned}$$

azaz

$$A_n = 1 + \frac{1}{n+1} A_{n+2} = \frac{n+2}{n+1} A_{n+2}, \text{ így } A_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} A_n.$$

Tehát $A_0 = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = 1$, $A_2 = \frac{1}{2} A_0 = \frac{\pi}{4}$, $A_3 = \frac{2}{3} A_1 = \frac{2}{3}$, $A_4 = \frac{3}{4} A_2 = \frac{3\pi}{16}$,
 $A_5 = \frac{4}{5} A_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$, $A_6 = \frac{5}{6} \cdot A_4 = \frac{5\pi}{32}$, illetve

$$V_{k+1} = 2c_k r^{k+1} \cdot A_{k+1} = 2r \cdot A_{k+1} \cdot c_k r^k = 2r A_{k+1} V_k,$$

$$\text{tehát } V_1 = 2r, \quad V_2 = 2r \cdot A_2 V_1 = 2r \cdot \frac{\pi}{4} 2r = r^2 \pi,$$

$$V_3 = 2 \cdot r \cdot A_3 \cdot V_2 = 2r \cdot \frac{2}{3} \cdot r^2 \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi,$$

$$V_4 = 2 \cdot r \cdot A_4 \cdot V_3 = 2 \cdot r \cdot \frac{3\pi}{16} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot r^4 \cdot \pi^2,$$

$$V_5 = 2 \cdot r \cdot A_5 \cdot V_4 = 2 \cdot r \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{2} \cdot r^4 \cdot \pi^2 = \frac{8}{15} \cdot r^5 \cdot \pi^2,$$

$$V_6 = 2 \cdot r \cdot A_6 \cdot V_5 = 2 \cdot r \cdot \frac{5\pi}{32} \cdot \frac{8}{15} r^5 \cdot \pi^2 = \frac{1}{6} \cdot r^6 \cdot \pi^3$$

stb.

2.4. TÉTEL. [integrál-transzformáció]: Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető úgy, hogy $E \subset \overline{E} \subset G$ és $g|_{E^\circ}$ injektív. Ha $f : g(E) \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrálható, akkor

$$\int_{g(E)} f = \int_E f(g(u)) \cdot |\det [g'(u)]| du. \quad (3)$$

2.5. Példa. (gömbi polár-koordináták):

$$g(r, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \cos \psi \\ r \cdot \sin \varphi \cos \psi \\ r \cdot \sin \psi \end{pmatrix}$$

$$\det [g'(r, \varphi, \psi)] = \left| \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cdot \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix} \right| = \dots = r^2 \cos \psi.$$

pl.:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [\alpha, \frac{\pi}{2}] \implies \mu[g(I_\alpha)] = \int_{g(I_\alpha)} 1 = \\ &= \int_{I_\alpha} r^2 \cos \psi d(r, \varphi, \psi) = \dots = \frac{2\pi}{3} (1 - \sin \alpha). \end{aligned}$$