

# A Riemann-integrál intervallumon II.

## A határozott integrál tulajdonságai

Boros Zoltán

Debreceni Egyetem, TTK  
Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

Debrecen, 2020. április 4.

# Intervallum-additivitás

## Tétel

Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható és  $a \leq c < d \leq b$ , akkor  $f|_{[c,d]}$  is Riemann-integrálható.

*Bizonyítás.* Legyen  $\varepsilon > 0$  és  $P_1$  olyan felosztása  $[a, b]$ -nek, amelyre  $\omega(f, P_1) < \varepsilon$ . Legyen továbbá  $P_2 = P_1 \cup \{c, d\}$  és  $P = P_2 \cap [c, d]$ . Ekkor  $P$  egy felosztása  $[c, d]$ -nek és  $\omega(f, P) \leq \omega(f, P_2) \leq \omega(f, P_1) < \varepsilon$ .

## Tétel

Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a < c < b$  úgy, hogy  $f|_{[a,c]}$  és  $f|_{[c,b]}$  Riemann-integrálható, akkor az  $f$  is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

## Az intervallum-additivitás bizonyítása

Mivel  $f$  korlátos az  $[a, c]$  és  $[c, b]$  intervallumokon, ezért  $f$  korlátos  $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$  intervallumon is.

Legyen  $\varepsilon > 0$  és  $P_1$  felosztása  $[a, c]$ -nek,  $P_2$  felosztása  $[c, b]$ -nek úgy, hogy

$$s(f, P_1) > \int_a^c f - \frac{\varepsilon}{4}, \quad S(f, P_1) < \int_a^c f + \frac{\varepsilon}{4},$$

$$s(f, P_2) > \int_c^b f - \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{és} \quad S(f, P_2) < \int_c^b f + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ekkor  $P = P_1 \cup P_2$  egy felosztása  $[a, b]$ -nek és

$$\begin{aligned} \int_a^c f + \int_c^b f - \frac{\varepsilon}{2} &< s(f, P_1) + s(f, P_2) = s(f, P) \leq \int_a^b f \\ &\leq \int_a^b f \leq S(f, P) = S(f, P_1) + S(f, P_2) < \int_a^c f + \int_c^b f + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

## Szakadás a végpontban

### Tétel

Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos és  $[a, b[$ -n folytonos, akkor  $f$  Riemann-integrálható.

*Bizonyítás.* Legyen  $|f(x)| \leq K$  ( $x \in [a, b]$ ),  $\varepsilon > 0$  tetszőleges és  $a < c < b$  úgy, hogy  $b - c < \frac{\varepsilon}{4K}$ .

Mivel  $f$  folytonos, így integrálható az  $[a, c]$  részintervallumon,  $\exists P_0$  felosztása  $[a, c]$ -nek úgy, hogy  $\omega(f, P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Legyen  $P = P_0 \cup \{b\}$ , ekkor  $P$  felosztása  $[a, b]$ -nek és

$$\begin{aligned}\omega(f, P) &= \omega(f, P_0) + \left( \sup(f([c, b])) - \inf(f([c, b])) \right) (b - c) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon.\end{aligned}$$

# Szakadási helyek és linearitás

## Következmény

Ha az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény véges sok pont kivételével folytonos, akkor  $f$  Riemann-integrálható.

## Tétel

Ha  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor  $f + g$ ,  $\lambda f$  is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

A bizonyítás hasonló az intervallum-additivitás igazolásához...

# Egyenlőtlenségek

## Tétel

Ha  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható és

$$\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x),$$

akkor  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

## Tétel

Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható, akkor  $|f|$  is Riemann-integrálható, továbbá

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

# Az integrál becslése

## Következmény

Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható és  $m, M, K \in \mathbb{R}$  úgy, hogy minden  $x \in [a, b]$  esetén

$$m \leq f(x) \leq M \text{ illetve } |f(x)| \leq K,$$

akkor

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

illetve

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq K(b-a).$$

# Integrálás felcserélt határokkal

## Definíció

Ha  $A, B, a, b \in \mathbb{R}$ ,  $A \leq a < b \leq B$  és  $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható, legyen

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{és} \quad \int_b^a f = - \int_a^b f.$$

*Motiváció.* Az integrálás fenti értelmezése később lehetővé teszi néhány eredmény egyszerű megfogalmazását és alkalmazását. Azt tartottuk szem előtt, hogy az

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

összefüggés minden esetben (például  $a = c < b$  vagy  $a = b < c$  esetén is) érvényben maradjon.

# Az integrál, mint a felső határ függvénye

## Tétel

Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum és  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  az  $I$  minden zárt rész-intervallumán Riemann-integrálható,  $a \in I$ , valamint

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in I).$$

Ekkor

- $F$  folytonos;
- ha  $f$  folytonos valamely  $x \in I$  pontban, akkor  $F$  differenciálható  $x$ -ben és  $F'(x) = f(x)$ .

**Következmény:** Minden  $f$  folytonos függvénynek van  $F$  primitív függvénye (de előfordul, hogy  $f$  elemi, viszont  $F$  nem elemi).

# Útmutatás a bizonyításhoz

Ha  $|f(t)| \leq K$  minden  $t \in [x_0, x]$  (vagy  $t \in [x, x_0]$ ) esetén, akkor

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq K|x - x_0|.$$

Hasonlóan, ha  $|t - x_0| < \delta$  esetén  $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ , akkor  
 $|x - x_0| < \delta$  esetén

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \right| \\ = & \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} |x - x_0| \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

# Parciális integrálás

## Tétel

Ha  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

*Bizonyítás.* Legyen

$$\Phi(y) = \int_a^y f'(x)g(x) dx \quad \text{és}$$

$$\Psi(y) = f(y)g(y) - f(a)g(a) - \int_a^y f(x)g'(x) dx \quad (y \in [a, b]).$$

Ekkor  $\Phi(a) = 0 = \Psi(a)$  és  $\forall y \in [a, b] :$

$$\Phi'(y) = f'(y)g(y) = (f'(y)g(y) + f(y)g'(y)) - f(y)g'(y) = \Psi'(y)$$

miatt  $\Phi = \Psi$ , tehát  $\Phi(b) = \Psi(b)$ .

# Helyettesítéses integrálás

## Tétel

Ha  $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$  folytonosan differenciálható és  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, akkor

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

*Bizonyítás.* Legyen

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \int_a^s f(g(x))g'(x) dx \quad \text{és} \\ \Psi(s) &= \int_{g(a)}^{g(s)} f(y) dy \quad (s \in [a, b]).\end{aligned}$$

Ekkor  $\Phi(a) = 0 = \Psi(a)$  és  $\forall s \in [a, b]$  :

$$\Phi'(s) = f(g(s))g'(s) = \Psi'(s)$$

miatt  $\Phi = \Psi$ , tehát  $\Phi(b) = \Psi(b)$ .

## Példa

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \operatorname{arsh}(x) \, dx &= \int_0^1 1 \cdot \operatorname{arsh}(x) \, dx \\
 &= \left[ x \operatorname{arsh}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx \\
 &= \operatorname{arsh}(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \, dx \\
 &= \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \int_1^2 y^{-\frac{1}{2}} \, dy \\
 &= \ln(1 + \sqrt{2}) - \left[ y^{\frac{1}{2}} \right]_1^2 = \ln(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) \\
 &= \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1 \approx 0,467,
 \end{aligned}$$

ugyanis  $\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  miatt  $\operatorname{arsh}(1) = \ln(1 + \sqrt{2})$ .

# Improprius integrál

## Definíció

Ha  $-\infty < a < b \leq +\infty$  és  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  úgy, hogy minden  $t \in ]a, b[$  esetén  $f$  Riemann-integrálható az  $[a, t]$  intervallumon, akkor legyen

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx,$$

amennyiben a jobboldali határérték létezik.

Az így bevezetett integrált *improprius integrálnak* nevezzük. Ha a fenti határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál *konvergens*.

**Példa:**  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^t$   
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-t} - (-e^0)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-t}) = 1.$

## További improprius integrálok

**Definíció.** Az előbbiekhez hasonlóan, ha  $-\infty \leq a < b < +\infty$  és  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  úgy, hogy minden  $t \in ]a, b[$  esetén  $f$  Riemann-integrálható a  $[t, b]$  intervallumon, akkor legyen

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f(x) dx,$$

amennyiben a jobboldali határérték létezik.

Továbbá, ha  $-\infty \leq a < c < b \leq +\infty$  és  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  minden zárt részintervallumon Riemann-integrálható, legyen

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

amennyiben a jobboldal (a két improprius integrál és azok összege) létezik.

## Példák improprius integrálokra

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{t \rightarrow 0+} \left[ 2x^{\frac{1}{2}} \right]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{t}) = 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(s)) + \lim_{t \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(0)) \\ &= \left( 0 - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) + \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi.\end{aligned}$$

# Konvergens improprius integrálok

## Tétel

Ha  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos,  
 $\forall x \in [a, b[: |f(x)| \leq g(x)$  és  $\int_a^b g(x) dx < +\infty$ ,  
 akkor az  $\int_a^b f(x) dx$  improprius integrál konvergens.

## Tétel

Ha  $f : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  monoton csökkenő, akkor

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

## Sík-tartomány területe

Ebben a fejezetben olyan formulákat gyűjtünk össze, amelyek integrál segítségével fejeznek ki geometriai mennyiségeket. Mivel a megadott mennyiségeket fogalmilag még nem vezettük be, ezeket most az integrál interpretációiként tekinthetjük. Valójában a megfelelő fogalmakat be lehet vezetni (egy részüket be is fogjuk vezetni a félév során), ami után az alábbi összefüggések tételnek tekinthetők.

### Terület

Ha  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és minden  $x \in [a, b]$  esetén  $g(x) \leq f(x)$ , akkor az  $[a, b]$  intervallumon a  $g$  és  $f$  függvények grafikonjai által határolt síktartomány területe

$$T(g, f) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

# Ívhossz-számítás

## Függvény grafikonjának ívhossza

Az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvény grafikonjának ívhossza

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx .$$

Például, ha  $f(x) = \operatorname{ch}(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ), akkor  $f'(x) = \operatorname{sh}(x)$ , így

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^1 \sqrt{1 + [\operatorname{sh}(x)]^2} \, dx = \int_0^1 \operatorname{ch}(x) \, dx \\ &= [\operatorname{sh}(x)]_0^1 = \operatorname{sh}(1) - \operatorname{sh}(0) = \frac{e^2 - 1}{2e} \approx 1,1752 . \end{aligned}$$

## Forgástestek térfogata, felszíne

Az alábbiakban feltesszük, hogy  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható és minden  $x \in [a, b]$  esetén  $f(x) \geq 0$ .

A

$$B_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq [f(x)]^2 \}$$

forgástest térfogata

$$V(B_f) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx,$$

palástjának felszíne pedig

$$A(B_f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$