

A Riemann-integrál intervallumon I.

A határozott integrál fogalma és kiszámítása

Boros Zoltán

Debreceni Egyetem, TTK
Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

Debrecen, 2020. április 4.

Zárt intervallum felosztásai

A továbbiakban $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Definíció

Az $[a, b]$ intervallum egy P felosztásán olyan P véges halmazt értünk, amelyre $\{a, b\} \subset P \subset [a, b]$.

Ha P $n + 1$ elemű és elemeit $x_0, x_1, \dots, x_n$ jelöli, akkor feltesszük, hogy

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

(azaz P elemeit növekvőleg indexelve soroljuk fel).

Megjegyzés: A felosztás által meghatározott részintervallumok nem feltétlenül egyenlő hosszúságúak.

Példa: A $[0, 1]$ intervallum felosztásai például

$$\{0, 1\}, \quad \{0, \frac{1}{3}, 1\}, \quad \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}.$$

Alsó- és felső integrálközelítő összegek

Definíció. Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és $P = \{x_j \mid j = 0, 1, \dots, n\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása (az előző definíció jelöléseivel), legyen

$$m_i = \inf\{f(t) \mid t \in [x_{i-1}, x_i]\} = \inf f([x_{i-1}, x_i]),$$

$$M_i = \sup\{f(t) \mid t \in [x_{i-1}, x_i]\} = \sup f([x_{i-1}, x_i])$$

($i = 1, 2, \dots, n$), valamint

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

[az f függvény P -hez tartozó alsó integrálközelítő összege] és

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

[az f függvény P -hez tartozó felső integrálközelítő összege].

Beosztások és összegek összevetései

Definíció. Ha P_1 és P_2 felosztásai $[a, b]$ -nek, azt mondjuk, hogy P_2 finomítja P_1 -nek, ha $P_1 \subset P_2$.

A P_1 és P_2 közös finomítása $P_1 \cup P_2$.

Megjegyzés. Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és $P_1 \subset P_2$ az $[a, b]$ felosztásai, akkor

$$s(f, P_1) \leq s(f, P_2) \quad \text{és} \quad S(f, P_1) \geq S(f, P_2).$$

Így, ha P_1 és P_2 tetszőleges felosztás (nem feltétlenül egymás finomításai), akkor

$$s(f, P_1) \leq s(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_2).$$

Emiatt $\{s(f, P) : P \text{ felosztása } [a, b]\text{-nek}\}$ felülről korlátos, illetve $\{S(f, P) : P \text{ felosztása } [a, b]\text{-nek}\}$ alulról korlátos.

Alsó és felső Darboux-integrál

Definíció. Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, az

$$\underline{I} = \int_a^b f = \sup \{ s(f, P) \mid P \text{ felosztása } [a, b]\text{-nek} \} \text{ és}$$

$$\bar{I} = \int_a^b f = \inf \{ S(f, P) \mid P \text{ felosztása } [a, b]\text{-nek} \}$$

valós számokat az f függvény ($[a, b]$ intervallumon vett) alsó, illetve felső Darboux-integráljának nevezzük.

Megjegyzés.

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f.$$

Riemann-integrálható függvény fogalma

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény *Riemann-integrálható* ($[a, b]$ -n), ha $\int_a^b f = \overline{\int}_a^b f$.

Ekkor az alsó illetve felső Darboux-integrálok közös értékét az f Riemann-integráljának nevezzük és $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x) dx$ módon jelöljük.

$\mathcal{R}([a, b])$ jelöli az $[a, b]$ -n Riemann-integrálható függvények halmazát.

Megjegyzés. Szokás a *határozott integrál* elnevezés használata is. Vegyük észre, hogy a határozott integrál (azaz a Riemann-integrál) értéke — ha létezik — egy valós szám, tehát fogalmilag lényegesen eltér a határozatlan integráltól, ami a primitív függvények összessége (tehát egy függvény-család).

Beosztás szelekciója

Definíció. Legyen $P = \{x_j \mid j = 0, 1, \dots, n\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása (az első definíció jelöléseivel). Azt mondjuk, hogy $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ a P felosztás egy szelekciója, ha $x_{j-1} \leq t_j \leq x_j$ ($j = 1, \dots, n$).

Továbbá, ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, akkor a

$$\sigma(f, P, \tau) = \sum_{j=1}^n f(t_j) (x_j - x_{j-1})$$

számot az f függvénynek a P felosztáshoz és annak τ szelekciójához tartozó közbeeső integrál-közelítő összegének nevezzük.

Megjegyzés: $s(f, P) \leq \sigma(f, P, \tau) \leq S(f, P)$.

A Newton–Leibniz-formula

Newton–Leibniz-tétel

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható és $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény úgy, hogy $\forall x \in]a, b[: F$ differenciálható x -ben és $F'(x) = f(x)$. Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Megjegyzés. A tétel végén álló egyenlőség az úgynevezett Newton–Leibniz-formula.

Ez a határozott integrál kiszámításának problémáját visszavezeti a primitív függvény (illetve a határozatlan integrál) kiszámításának problémájára.

Technikai okokból szokásos a(z)

$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$ jelölés használata.

A Newton–Leibniz-tétel bizonyítása (1. oldal)

Bizonyítás. Legyen P az $[a, b]$ egy tetszőleges felosztása (a fenti jelölésekkel). A Lagrange-féle közéérték-tétel szerint

$\exists t_j \in]x_{j-1}, x_j[$:

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(t_j)(x_j - x_{j-1}) = f(t_j)(x_j - x_{j-1}) \quad (j = 1, \dots, n),$$

ezért $\tau = (t_1, \dots, t_n)$ egy szelekciója P -nek és

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1})) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) = \sigma(f, P, \tau),$$

továbbá $m_j \leq f(t_j) \leq M_j$ ($j = 1, \dots, n$) miatt

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P, \tau) \leq S(f, P),$$

azaz

$$s(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, P).$$

A Newton–Leibniz-tétel bizonyítása (2. oldal)

Mivel P tetszőleges felosztás volt, ebből

$$\int_a^b f \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int}_a^b f$$

adódik, amiből f Riemann-integrálhatósága miatt kapjuk az állítást.

Példa:

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1.$$

A Riemann-kritérium

Definíció

Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és P az $[a, b]$ intervallum egy felosztása. Az

$$\omega(f, P) = S(f, P) - s(f, P)$$

valós számot az f függvény P -hez tartozó oszcillációs összegének nevezzük.

Riemann-kritérium

Egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists P$ felosztása $[a, b]$ -nek úgy, hogy $\omega(f, P) < \varepsilon$.

Folytonos függvények integrálhatósága

Definíció. A $P = \{x_j \mid j = 0, 1, \dots, n\}$ felosztás (ahol $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$) *finomságán* a

$$\|P\| = \max\{x_j - x_{j-1} \mid j = 1, \dots, n\}$$

számot értjük.

Tétel

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor Riemann-integrálható.

Bizonyítás (folyt. fv. integrálható)

Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $[a, b]$ kompakt halmaz, f egyenletesen folytonos. Ezért létezik $\delta > 0$ úgy, hogy ha $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)}$.

Legyen $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ egy felosztása $[a, b]$ -nek úgy, hogy $\|P\| < \delta$. Ekkor

$$M_j - m_j \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Tehát

$$\omega(f, P) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Monoton függvények integrálhatósága

Tétel

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, akkor Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Legyen pl. f monoton növekvő és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor, ha $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ olyan felosztás, amelyre az igaz, hogy $\|P\| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$, akkor $m_j = f(x_{j-1})$ és $M_j = f(x_j)$ ($j = 1, \dots, n$), ezért

$$\begin{aligned} \omega(f, P) &= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n [f(x_j) - f(x_{j-1})](x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \|P\| \sum_{j=1}^n [f(x_j) - f(x_{j-1})] = \|P\| [f(b) - f(a)] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} [f(b) - f(a)] < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ajánlott irodalom



Lajkó Károly.

Kalkulus II.

DE Matematikai Intézet, 2005.



Lajkó Károly.

Kalkulus II. példatár

DE Informatikai Intézet, 2004.



Walter Rudin.

A matematikai analízis alapjai

Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978.