

Többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása (4–5. előadás)

Boros Zoltán

2019. március 5–12.

1. Magasabb rendű deriváltak

1.1. Deriváltfogalmak és jelölések

1.1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $x_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy

- f k -szor parciálisan differenciálható x_0 -ban, ha $\exists \delta > 0 : K(x_0, \delta) \subset D$ és $\forall x \in K(x_0, \delta) : \forall (i_1, i_2, \dots, i_{k-1}) \in \{1, 2, \dots, n\}^{k-1} : \exists D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_{k-1}} f(x)$ és a $D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_{k-1}} f$ függvénynek $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ esetén \exists az i -edik parciális deriváltja x_0 -ban.
- f k -szor differenciálható x_0 -ban, ha $\exists \delta > 0 : K(x_0, \delta) \subset D$ és $\forall x \in K(x_0, \delta) : \forall (i_1, i_2, \dots, i_{k-1}) \in \{1, 2, \dots, n\}^{k-1} : \exists D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_{k-1}} f(x)$ és a $D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_{k-1}} f$ függvény differenciálható x_0 -ban.
- f k -szor folytonosan differenciálható x_0 -ban, ha $\exists \delta > 0 : K(x_0, \delta) \subset D$ és $\forall x \in K(x_0, \delta) : \forall (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{1, 2, \dots, n\}^k : \exists D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f(x)$ és a $D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f$ függvény folytonos x_0 -ban.
- f k -szor [folytonosan] [parciálisan] differenciálható, ha $\forall x \in D : f$ k -szor [folytonosan] [parciálisan] differenciálható x -ben.

1.2. Megjegyzés. Vektorértékű függvényekre a fenti fogalmak úgy értendők, hogy minden komponens-függvényre teljesülnek.

1.3. Megjegyzés. Nem lokális megfogalmazásban ezek a fogalmak közvetlenül egyszerűbben is bevezethetőek. Például $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható, ha f minden parciális deriváltja létezik (D minden pontjában) és ezen parciális deriváltak mindegyike differenciálható.

1.4. TÉTEL. Young tétele: Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt és tegyük fel, hogy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az $(x_0, y_0) \in D$ pontban. Ekkor

$$D_1 D_2 f(x_0, y_0) = D_2 D_1 f(x_0, y_0).$$

BIZONYÍTÁS. Először bemutatunk egy bizonyítást azt feltételezve, hogy f kétszer folytonosan differenciálható az $(x_0, y_0) \in D$ pontban (legtöbbször ilyen függvényekre alkalmazzuk a tételt). Legyen $\tilde{h} > 0$ úgy, hogy f kétszer differenciálható az $[x_0, x_0 + \tilde{h}] \times [y_0, y_0 + \tilde{h}]$ pontjaiban, továbbá legyen

$$\Delta(h) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0) \quad (0 \leq h \leq \tilde{h}).$$

Legyen továbbá $F(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$ ($x \in [x_0, x_0 + \tilde{h}]$). Ekkor F differenciálható és a Lagrange-féle középérték-tétel szerint $\exists t \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0 + th) \cdot h \\ &= [D_1 f(x_0 + th, y_0 + h) - D_1 f(x_0 + th, y_0)] \cdot h \\ &= D_2 D_1 f(x_0 + th, y_0 + sh) h \cdot h, \end{aligned}$$

ugyanis a $g(y) = D_1 f(x_0 + th, y)$ ($y \in [y_0, y_0 + \tilde{h}]$) függvény is differenciálható, így $\exists s \in]0, 1[$, amire a fenti egyenlőség fennáll. Emiatt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} D_2 D_1 f(x_0 + th, y_0 + sh) = D_2 D_1 f(x_0, y_0).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_1 D_2 f(x_0, y_0).$$

Az eredeti (gyengébb) feltétel mellett (amikor az adott pontban kétszer differenciálható a függvény) először csak azt használhatjuk ki, hogy f elsőrendű parciális deriváltjai léteznek (x_0, y_0) egy környezetében, így például egy $[x_0, x_0 + \tilde{h}] \times [y_0, y_0 + \tilde{h}]$ szerkezetű halmaz pontjaiban is, ezért a fentiekhez hasonlóan kezdhetjük $\Delta(h)$ kifejtését, majd azt is felhasználjuk, hogy pl. a $D_1 f$ parciális derivált differenciálható — és így lineárisan approximálható — az (x_0, y_0) pontban, tehát $\exists t \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0 + th) \cdot h \\ &= [D_1 f(x_0 + th, y_0 + h) - D_1 f(x_0 + th, y_0)] \cdot h \\ &= (D_1 f(x_0, y_0) + (D_1 f)'(x_0, y_0)(th, h)^T + \omega(x_0 + th, y_0 + h) \|(th, h)^T\|) \cdot h \\ &\quad - (D_1 f(x_0, y_0) + (D_1 f)'(x_0, y_0)(th, 0)^T + \omega(x_0 + th, y_0) \|(th, 0)^T\|) \cdot h \\ &= \left((D_1 f)'(x_0, y_0)(0, h)^T + \omega(x_0 + th, y_0 + h) h \sqrt{t^2 + 1} - \omega(x_0 + th, y_0) th \right) h \\ &= \left(D_2 D_1 f(x_0, y_0) + \omega(x_0 + th, y_0 + h) \sqrt{t^2 + 1} - \omega(x_0 + th, y_0) t \right) \cdot h^2, \end{aligned}$$

ahol

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \omega(x, y) = 0,$$

ezért

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_2 D_1 f(x_0, y_0).$$

Ezután a bizonyítást ugyanúgy fejezhetjük be, mint az előbb, miszerint hasonlóan igazolható ugyanez az egyenlőség a másik vegyes parciális deriváltra. \square

1.5. Megjegyzés. A fenti tétel alapján tetszőleges n -változós, k -szor (folytonosan) differenciálható függvény parciális deriváltjai nem függenek a deriválás(ok) sorrendjétől, pl.

$$\begin{aligned} D_1 D_2 D_1 D_3 f(x_1, x_2, x_3) &= D_1 D_2 D_3 D_1 f(x_1, x_2, x_3) = D_1 D_3 D_2 D_1 f(x_1, x_2, x_3) = \\ &= D_3 D_1 D_2 D_1 f(x_1, x_2, x_3) = D_3 D_2 D_1 D_1 f(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

stb., ezért a fenti deriváltak mindegyike helyett röviden $D_1^2 D_2 D_3 f(x_1, x_2, x_3)$ vagy pl.: $\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3)$ írható.

1.2. Taylor-tétel

1.6. Megjegyzés. Ha $n, k \in \mathbb{N}$, $x, h \in \mathbb{R}^n$, valamint $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt úgy, hogy $\forall t \in [0, 1] : x + th \in D$, továbbá $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ k -szor differenciálható és

$$F(t) = f(x + th) \quad (t \in [0, 1]),$$

akkor F k -szor differenciálható, továbbá $\forall t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(x + th) \cdot h = \sum_{i=1}^n D_i f(x + th) \cdot h_i, \\ F''(t) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n D_j D_i f(x + th) \cdot h_j \right) \cdot h_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_j D_i f(x + th) \cdot h_j \cdot h_i \\ F^{(k)}(t) &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{k-1}=1}^n \left(\sum_{i_k=1}^n D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f(x + th) h_{i_k} \right) h_{i_{k-1}} \dots h_{i_1} = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n D_{i_1} \dots D_{i_k} f(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_k}. \end{aligned}$$

1.7. Jelölés.

$$d^k f(x, h) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f(x) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}$$

$[f$ k -adik differenciálja az x pontban és a h irányban] $[= F^{(k)}(0)]$

1.8. TÉTEL. [Taylor-formula]: Ha $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $x, h \in \mathbb{R}^n$, valamint $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt úgy, hogy $\forall t \in [0, 1] : x + th \in D$, továbbá $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $(k + 1)$ -szer differenciálható, akkor $\exists s \in]0, 1[$ úgy, hogy

$$(TF) \quad f(x + h) = f(x) + \sum_{j=1}^k \frac{d^j f(x, h)}{j!} + \frac{d^{(k+1)} f(x + sh, h)}{(k + 1)!}. \quad (1)$$

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk az $n = 1$ esetre vonatkozó Taylor-formulát a fenti megjegyzésben bevezetett F függvényre a $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ pontban:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= F(1) = F(0) + \sum_{j=1}^k \frac{F^{(j)}(0)}{j!} (1-0)^j + \frac{F^{(k+1)}(s)}{(k+1)!} (1-0)^{k+1} = \\ &= f(x) + \sum_{j=1}^k \frac{d^j f(x, h)}{j!} + \frac{d^{k+1} f(x+sh, h)}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

□

2. Szélsőérték-számítás

2.1. Szélsőérték fogalma és szükséges feltétele

2.1. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér, $E \subset X$. Azt mondjuk, hogy az $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek lokális minimuma van az $x_0 \in E$ pontban, ha $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $\forall x \in E \cap K(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \leq f(x).$$

2.2. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér, $E \subset X$. Azt mondjuk, hogy az $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek lokális maximuma van az $x_0 \in E$ pontban, ha $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $\forall x \in E \cap K(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \geq f(x).$$

2.3. Megjegyzések. 1.) Ha x_0 belső pontja E -nek, akkor $\forall x \in E \cap K(x_0, \delta)$ helyett $\forall x \in K(x_0, \delta)$ írható.

2.) Ha a definíció végén $\forall x \in K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} : f(x_0) < f(x)$ áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy f -nek szigorú lokális minimuma van x_0 -ban.

3.) Ha a definíció végén $\forall x \in K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} : f(x_0) > f(x)$ áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy f -nek szigorú lokális maximuma van x_0 -ban.

4.) Szélsőérték (extrémum) $\in \{\text{minumum}, \text{maximum}\}$.

2.4. TÉTEL. [szükséges feltétel]: Ha $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke van az $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ pontban és létezik $D_j f(x)$, akkor

$$D_j f(x) = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $r > 0$ úgy, hogy $K(x, r) \subset D$ és alkalmazzuk az egyváltozós esetre vonatkozó megfelelő tételt a

$$\varphi(t) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) \quad (t \in]x_j - r, x_j + r[)$$

függvényre a $t = x_j$ pontban.

□

2.2. Elegendő feltétel

2.5. TÉTEL. [elegendő feltétel]: Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $x_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer [folytonosan] differenciálható x_0 -ban és $D_j f(x_0) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) [azaz x_0 „stacionárius” pontja f -nek]. Ha a

$$Q(h) = d^2 f(x_0, h) \quad (h \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus forma pozitív [negatív] definit (azaz $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : Q(h) > 0$ [$Q(h) < 0$]), akkor f -nek szigorú lokális minimuma [maximuma] van x_0 -ban. Ha Q indefinit (azaz $\exists h^{(1)}, h^{(2)} \in \mathbb{R}^n : Q(h^{(1)}) < 0 < Q(h^{(2)})$), akkor f -nek nincs lokális szélsőértéke x_0 -ban [„nyeregpon”].

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $Q(h)$ pozitív definit. Ekkor $\exists r > 0$ úgy, hogy $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| < r$ esetén a $\tilde{Q}(h) = d^2 f(x_0 + u, h)$ ($h \in \mathbb{R}^n$) kvadratikus forma is értelmes és pozitív definit. Így $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < r$ esetén $\exists s \in]0, 1[$ úgy, hogy

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{d^1 f(x_0, h)}_{\sum_{j=1}^n D_j f(x_0) h_j} + \frac{d^2(x_0 + sh, h)}{2} = f(x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0 + sh, h) > f(x_0),$$

ha $h \neq 0$. Hasonlóan kapjuk a többi állítást. □

2.6. Megjegyzés. Az előző bizonyítás akkor alkalmazható, ha f kétszer folytonosan differenciálható x_0 -ban. Azonban a tétel akkor is érvényes marad, ha csak azt tesszük fel, hogy f kétszer differenciálható x_0 -ban. Ebben az esetben a Taylor-tételt a $k = 0$ esetre alkalmazva kapjuk, hogy létezik $\delta > 0$, melyre minden $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < \delta$ esetén van olyan $s_h \in]0, 1[$, amire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + d^1 f(x_0 + s_h h, h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n D_j f(x_0 + s_h h) h_j \quad (2)$$

teljesül. Mivel a $D_j f$ parciális deriváltak mindegyike differenciálható — és így lineárisan approximálható — x_0 -ban, ezért $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén létezik $\omega_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_j(x) = \omega_j(x_0) = 0$ és

$$\begin{aligned} D_j f(x_0 + s_h h) &= \underbrace{D_j f(x_0)}_0 + (D_j f)'(x_0) s_h h + \omega_j(x_0 + s_h h) \|s_h h\| \\ &= s_h \sum_{i=1}^n D_i D_j f(x_0) h_i + s_h \omega_j(x_0 + s_h h) \|h\|. \end{aligned}$$

Ezt a (2) kifejezésbe visszahelyettesítve

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + s_h Q(h) + s_h \|h\| \sum_{j=1}^n \omega_j(x_0 + s_h h) h_j$$

adódik. Ha pl. Q pozitív definit, akkor az egységömb-héjon felvett m_Q minimuma pozitív szám, így $\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{s_h \|h\|^2} \geq m_Q > 0$ stb.