

Többszörös függvények differenciál- és integrálszámítása (1. előadás)

Normált terek, euklideszi terek, lineáris leképezések

Boros Zoltán

2019. február 12.

1. Valós vektortér

1.1. Definíció. Az X halmazt valós [azaz $\mathbb{R}$ feletti] vektortérnek nevezzük, ha adott egy $+: X \times X \rightarrow X$ művelet [„összeadás”] és egy $\cdot: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ leképezés [„skalárral való szorzás”] úgy, hogy $\forall x, y, z \in X: \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}:$

- (i) $(x + y) + z = x + (y + z);$
- (ii) $x + y = y + x;$
- (iii) $\exists 0 \in X: \forall x \in X: x + 0 = x;$
- (iv) $\forall x \in X: \exists (-x) \in X: x + (-x) = 0;$
[(i) – (iv)-ig azt jelenti, hogy az $(X, +)$ Ábel-csoport].
- (v) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$
- (vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$
- (vii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$
- (viii) $1x = x.$

1.2. Példa. 1. $\mathbb{C}$

2. Ha H tetszőleges halmaz és $x, y: H \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\lambda x)(t) = \lambda x(t) \quad (t \in H),$$

akkor $\mathbb{R}^H = \{\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}\}$ valós vektortér.

1.3. Definíció. $Y \subset X$ az X valós vektortér altere, ha $\forall x, y \in Y: \forall \lambda \in \mathbb{R}: x + y \in Y, \lambda x \in Y.$

1.4. Definíció. Legyen X valós vektortér. $Y \subset X$ lineárisan független, ha $k \in \mathbb{N}$, $y_1, y_2, \dots, y_k \in Y$ különböző elemek ($y_i \neq y_j$, ha $i \neq j$), $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$,
 $0 = \sum_{j=1}^k c_j y_j$ esetén $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

Továbbá $E \subset X$ esetén legyen

$$\text{Lin}(E) = \left\{ \sum_{j=1}^k c_j x_j \mid k \in \mathbb{N}, x_j \in E, c_j \in \mathbb{R} \ (j = 1, \dots, k) \right\}$$

az E lineáris burka.

[Megjegyzés: $\text{Lin}(\emptyset) = \emptyset$. Ha $E \neq \emptyset$, akkor $\text{Lin}(E)$ altér („az E által generált altér”).
 $E \subset X$ bázis („az X egy bázisa”), ha E lineárisan független és $\text{Lin}(E) = X$

1.5. Megjegyzés. $E \subset X$ esetén E bázis $\iff \forall x \in X : \exists$ pontosan egy $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $\psi(u) = 0$ véges sok $u \in E$ kivételével és $x = \sum_{u \in E} \psi(u)u$.

1.6. Tétel. * Ha E és H az X bázisai, akkor $\text{card}(E) = \text{card}(H)$.

1.7. Definíció. Az X vektortér bázisainak közös számosságát az X dimenziójának nevezzük.

2. Belső szorzat, norma

2.1. Definíció. Legyen X valós vektortér. Az $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést belső szorzatnak, illetve X -et ezzel a leképezéssel belsőszorzat-térnek nevezzük, ha $\forall x, y, z \in X : \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

$$(B1) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$(B2) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$(B3) \quad \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle;$$

$$(B4) \quad \langle x, x \rangle > 0, \text{ ha } x \neq 0, \text{ illetve } \langle 0, 0 \rangle = 0.$$

2.2. Következmény. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$,

2.3. Tétel (Schwarz–Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség). Ha $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ belsőszorzat-tér, akkor $\forall x, y \in X : |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$, továbbá az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\{x, y\}$ lineárisan függő [nem lineárisan független] (vagy $x = y$).

Bizonyítás: Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Tehát $\langle x, y \rangle = \langle y, y \rangle = 0$ vagy a kifejezés λ olyan másodfokú polinomja, aminek legfeljebb egy valós gyöke lehet (mert ha két valós gyöke lenne, akkor azokban előjelet váltana, így felvenne negatív értékeket is), tehát a diszkriminánsa nem pozitív, vagyis $\langle y, y \rangle > 0$ és

$$0 \geq 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = 4[\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle].$$

■

2.4. Definíció. Legyen X valós vektortér. $A(z) \|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést normának, illetve $(X, \|\cdot\|)$ -et normált térnek nevezzük, ha $\forall x, y \in X : \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$(N1) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|;$$

$$(N3) \quad \|x\| > 0, \text{ ha } x \neq 0, \quad \|0\| = 0.$$

2.5. Tétel. Ha $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ belsőszorzat-tér és $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ($x \in X$, akkor $(X, \|\cdot\|)$ normált tér.

Bizonyítás: $(B4) \Rightarrow \|\cdot\|$ értelmes és $(N3)$. Továbbá $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$ esetén $\|\lambda x\| =$

$$= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (N2).$$

Továbbá $\forall x, y \in X : \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow (N1).$

■

2.6. Megjegyzés. A $\|\cdot\|$ norma a fenti módon belső szorzatból származik $\iff \forall x, y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

2.7. Megjegyzés. Ha X belsőszorzat- tér az előbbi módon bevezetett normával, akkor $\forall x, y, u, w \in X :$

$$|\langle x, y \rangle - \langle u, w \rangle| = |\langle x, y \rangle - \langle u, y \rangle + \langle u, y \rangle - \langle u, w \rangle| \leq |\langle x, y \rangle - \langle u, y \rangle| + |\langle u, y \rangle - \langle u, w \rangle| = |\langle x - u, y \rangle| + |\langle u, y - w \rangle| \leq \|x - u\| \cdot \|y\| + \|u\| \cdot \|y - w\|.$$

2.8. Megjegyzés. Ha X normált tér, akkor $\forall x, y, u, w \in X : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} :$

$$(a) \quad \|(x + y) - (u + w)\| \leq \|x - u\| + \|y - w\|;$$

$$(b) \quad \|\lambda x - \mu y\| = \|\lambda x - \lambda y + \lambda y - \mu y\| \leq \|\lambda x - \lambda y\| + \|\lambda y - \mu y\| = \|\lambda(x - y)\| + \|(\lambda - \mu)y\| = |\lambda| \|x - y\| + |\lambda - \mu| \cdot \|y\|;$$

$$(c) \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad (\text{ugyanis } \|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \text{ és hasonlóan } \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\| \Rightarrow -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|).$$

2.9. Tétel. Ha $(X, \|\cdot\|)$ (valós) normált tér és $d(x, y) = \|x - y\|$ ($x, y \in X$), akkor $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ metrika.

Bizonyítás:

$$(M1) \quad d(x, y) = \|x - y\| > 0, \text{ ha az } x - y \neq 0, \text{ azaz } x \neq y \text{ és } d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0;$$

$$(M2) \quad d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = 1 \cdot d(x, y) = d(x, y);$$

$$(M3) \quad d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

■

2.10. Megjegyzés. 1. Belsőszorzat-téren $\forall y \in X : \varphi_y(x) = \langle x, y \rangle (= \langle y, x \rangle)$, mint $\varphi_y : X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos (mert Lipschitz-fv.);

2. Ha X normált tér, akkor az $f_y(x) = x + y$ ($x \in X$) [$f_y : X \rightarrow X$], $g_\lambda(x) = \lambda x$ ($x \in X$) [$g_\lambda : X \rightarrow X$], $h_y(\nu) = \nu y$ ($\nu \in \mathbb{R}$) [$h_y : \mathbb{R} \rightarrow X$] és $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos ($y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$)

2.11. Definíció. Ha az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér (mint metrikus tér) teljes, akkor Banach-térnek nevezzük. Ha az $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ belsőszorzat-tér az $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ($x \in X$) normával Banach-tér, akkor Hilbert-térnek nevezzük.

2.12. Definíció. Legyen X és Y valós vektortér. A $\varphi : X \rightarrow Y$ bijektív leképezést vektortér-izomorfizmusnak nevezzük, ha $\forall x_1, x_2 \in X : \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

$$\varphi(\lambda x_1) = \lambda \varphi(x_1) \text{ és } \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2).$$

Továbbá, ha $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ valós normált terek, a $\varphi : X \rightarrow Y$ vektortér-izomorfizmust normált tér izomorfizmusnak nevezzük, ha

$$\forall x \in X : \|\varphi(x)\|_Y = \|x\|_X.$$

Hasonlóan, ha X és Y valós belsőszorzat-terek, a $\varphi : X \rightarrow Y$ vektortér-izomorfizmust belsőszorzat-tér izomorfizmusnak nevezzük, ha

$$\forall x_1, x_2 \in X : \langle \varphi(x_1), \varphi(x_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle.$$

2.13. Megjegyzés. Ha $\varphi : X \rightarrow Y$ belsőszorzat-tér izomorfizmus, akkor a belső szorzatokból származó normákra nézve φ normált tér izomorfizmus.

2.14. Megjegyzés (A belsőszorzat-tér geometriája). A *S-C-B-egyenlőtlenség* miatt, ha X belsőszorzat-tér és $x, y \in X \setminus \{0\}$, akkor $-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$. Ekkor $\varphi = \arccos \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \right) \in [0, \pi]$ az x és y vektorok „szöge”.

2.15. Következmény. Egymással izomorf belsőszorzat-terekben „ugyanaz” a geometria (szögek, távolságok), a topológia és a sorozat-konvergencia.

2.16. Definíció. Legyen $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|^*$ két norma az X valós vektoréren. Azt mondjuk, hogy $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|^*$ ekvivalens, ha

$$\exists m, M \in]0, +\infty[\text{ úgy, hogy } \forall x \in X : m\|x\| \leq \|x\|^* \leq M \cdot \|x\|.$$

2.17. Állítás. A normák ekvivalenciája ekvivalencia-reláció az X -en értelmezhető normák halmazán.

Bizonyítás: [Házi feladat] ■

2.18. Állítás. A definíció jelöléseivel, ha

$$\begin{aligned} K(x_0, r) &= \{x \in X : \|x - x_0\| < r\} \\ \text{és } K^*(x_0, r) &= \{x \in X : \|x - x_0\|^* < r\} \quad (x_0 \in X, r > 0), \\ \text{akkor } \forall x_0 \in X : \forall r > 0 : K^*(x_0, m \cdot r) &\subset K(x_0, r) \\ \text{és } K(x_0, \frac{r}{M}) &\subset K^*(x_0, r). \end{aligned}$$

Bizonyítás: $x \in K^*(x_0, m \cdot r) \Rightarrow \|x - x_0\| \leq \frac{1}{m} \|x - x_0\|^* < \frac{1}{m} \cdot mr = r \Rightarrow x \in K(x_0, r)$ illetve $x \in K(x_0, \frac{r}{M}) \Rightarrow \|x - x_0\|^* \leq M \|x - x_0\| < M \cdot \frac{r}{M} = r \Rightarrow x \in K^*(x_0, r)$ ■

2.19. Következmény. Ekvivalens normákból ugyanaz a topológia, konvergencia, folytonosság, határérték, ... származik.

3. A k dimenziós euklideszi tér

3.1. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{N}_k = \{l \in \mathbb{N} : l \leq k\} = \{1, 2, \dots, k\}$. Az $\mathbb{N}_k$ halmazon értelmezett valós értékű függvények halmazát $\mathbb{R}^k$ -val jelöljük, továbbá $x \in \mathbb{R}^k$ (azaz $x : \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{R}$) esetén legyen $x_j = x(j)$ ($j \in \mathbb{N}_k$) és $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ [ezért x -et rendezett szám k -asnak is szokás nevezni]. Az x_j valós számokat az x komponenseinek ($j = 1, 2, \dots, k$), az x -et pedig k dimenziós vektornak is szoktuk nevezni. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, legyen

$$\begin{aligned}\lambda x &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k), \\ x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k), \\ \langle x, y \rangle &= \sum_{j=1}^k x_j y_j \\ \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^k x_j^2} \\ \|x\|_1 &= \sum_{j=1}^k |x_j| \text{ és } \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_k|\}.\end{aligned}$$

3.2. Tétel. $\mathbb{R}^k$ a definícióban bevezetett összeadással, külső szorzással és belső szorzattal Hilbert-tér, továbbá $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_1)$ és $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty)$ is Banach-terek, valamint $\forall x \in \mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq k\|x\|_\infty \\ \text{és } \|x\|_\infty &\leq \|x\| \leq \sqrt{k}\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

Továbbá $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $x^{[n]} = (x_1^{[n]}, \dots, x_k^{[n]}) \in \mathbb{R}^k$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{[n]} \iff \forall j \in \mathbb{N}_k : x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{[n]}.$$

Bizonyítás: Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbb{R}^k$ vektortér [a korábbi 2. példa speciális esete], $0 = (0, 0, \dots, 0)$ az összeadás egységeleme és $x \in \mathbb{R}^k$ esetén $-x = (-x_1, \dots, -x_k)$. A belső szorzat axiómáit is könnyen ellenőrizhetjük ebben az esetben. Tehát $(\mathbb{R}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ belsőszorzattér. Ugyancsak egyszerű számolás mutatja, hogy $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák az $\mathbb{R}^k$ vektortéren. Például, ha $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$|x_l| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_k|\}, |y_l| = \max\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_k|\}$$

és $i \in \mathbb{N}_k$, akkor

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq |x_l| + |y_l| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \text{ ezért } \|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Továbbá

$$\|x\|_\infty = |x_l| \leq \sum_{i=1}^k |x_i| \leq k|x_l|,$$

(azaz $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq k\|x\|_\infty$) és

$$|x_l| = \sqrt{x_l^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \leq \sqrt{k x_l^2} = \sqrt{k}|x_l|,$$

(azaz $\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{k}\|x\|_\infty$).

Ha $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{[n]}$ a $\|\cdot\|_\infty$ szerint ($\iff \|\cdot\|$ szerint $\iff \|\cdot\|_1$ szerint), akkor $\forall j \in \{1, \dots, k\}$:

$$\left| x_j^{[n]} - x_j \right| \leq \|x^{[n]} - x\|_\infty$$

miatt

$$x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{[n]}.$$

Ha $x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{[n]}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) és $\varepsilon > 0$, akkor $\exists N_j \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n > N_j$ esetén

$$\left| x_j^{[n]} - x_j \right| < \varepsilon \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Legyen $N_\varepsilon = \max\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N_\varepsilon$, akkor $\forall j \in \{1, \dots, k\} : n > N_j$, így

$$\left| x_j^{[n]} - x_j \right| < \varepsilon, \text{ ezért } \|x^{[n]} - x\|_\infty = \max \left\{ \left| x_j^{[n]} - x_j \right| : j \in \{1, 2, \dots, k\} \right\} < \varepsilon.$$

Tehát

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{[n]}.$$

Tegyük fel, hogy $(x^{[n]})$ Cauchy-sorozat $\|\cdot\|_\infty$ szerint ($\iff \|\cdot\|$ szerint $\iff \|\cdot\|_1$ szerint). Ekkor $\forall j \in \{1, \dots, k\}$:

$$\left| x_j^{[n]} - x_j^{[m]} \right| \leq \|x^{[n]} - x^{[m]}\|_\infty$$

$\Rightarrow (x_j^{[n]})$ Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$ -ben. Mivel $\mathbb{R}$ teljes, $(x_j^{[n]})$ konvergens, azaz

$$\exists x_j \in \mathbb{R} : x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{[n]}.$$

Legyen $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, ekkor $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{[n]}$. Tehát $\mathbb{R}^k$ teljes (mindhárom norma szerint). ■

3.3. Házi feladat. Határozzuk meg és ábrázoljuk a (nyílt) egységgömböt az $\mathbb{R}^2$ térben a $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ normák szerint!

4. A k -dimenziós euklideszi tér szorzat alakja, intervallumai, kompakt halmazai.

4.1. Definíció. Ha $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ és $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ valós belsőszorzat-terek,

$$(x_j, y_j) \in X \times Y \quad (j = 1, 2) \text{ és } \lambda \in \mathbb{R},$$

legyen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \quad \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1);$$

$$\text{és } \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_X + \langle y_1, y_2 \rangle_Y.$$

4.2. Állítás. $X \times Y$ a fenti $(+, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ struktúrával belsőszorzat-tér.

BIZONYÍTÁS. gyakorlás ... □

4.3. Állítás. Ha $m, k \in \mathbb{N}$, az $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ és $\mathbb{R}^{m+k}$ belsőszorzat-terek izomorfak.

BIZONYÍTÁS VÁZLAT. $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ és $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k$ esetén legyen

$$\varphi(x, u) = (x_1, x_2, \dots, x_m, u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^{m+k}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ belsőszorzat-tér izomorfizmus. □

4.4. Megjegyzés. Szokás a fenti állítás alapján az $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{m+k}$ egyenlőséget elfogadni, illetve hasonlóan, $A \subset \mathbb{R}^m$ és $B \subset \mathbb{R}^k$ esetén az $A \times B$ halmazt tekintjük $\mathbb{R}^{m+k}$ részhalmazának.

4.5. Definíció. Ha $I_j \subset \mathbb{R}$ intervallum $(j = 1, 2, \dots, k)$ és

$$I = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_j \in I_j \quad (j = 1, \dots, k)\},$$

akkor az I halmazt k dimenziós intervallumnak nevezzük. Szokás az $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$ felírást használni. Ha $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$ és $I_j = [a_j, b_j]$ $(j = 1, 2, \dots, k)$, akkor a fent definiált I halmazt k dimenziós zárt intervallumnak, vagy zárt téglának nevezzük. (Illetve, ha $I^0 \subset E \subset I$, akkor az E halmazt téglának nevezzük.)

Ha I az előbbieken felírt zárt téglá, akkor legyen

$$v(I) = \prod_{j=1}^k (b_j - a_j),$$

ezt az I téglá $(k$ dimenziós) térfogatának nevezzük.

4.6. Megjegyzés. A fenti I zárt téglá átmérője megegyezik az

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \text{ és } b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$$

vektorok $\|b - a\|$ illetve $\|b - a\|_\infty$ vagy $\|b - a\|_1$ távolságával, aszerint, hogy melyik norma szerinti távolságot tekintjük.

A továbbiakban legyen $\text{diam}(H)$ a H halmaz $\|\cdot\|$ (euklideszi norma) szerinti átmérője, továbbá $\text{diam}_1(H)$ illetve $\text{diam}_\infty(H)$ az $\|\cdot\|_1$ norma, illetve a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint vett átmérő.

4.7. Tétel (Cantor). Legyen $I_n \subset \mathbb{R}^k$ k -dimenziós zárt intervallum $(n \in \mathbb{N})$ úgy, hogy $I_{n+1} \subset I_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

BIZONYÍTÁS. $\exists a_j^{(n)}, b_j^{(n)} \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a_j^{(n)} < b_j^{(n)}$ $(j = 1, \dots, k; \quad n \in \mathbb{N})$ és

$$I_n = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid a_j^{(n)} \leq x_j \leq b_j^{(n)} \quad (j = 1, \dots, k)\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\} : \exists y_j \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_j^{(n)}, b_j^{(n)}]$, ezért $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. □

4.8. Tétel. Ha $I \subset \mathbb{R}^k$ zárt tégl, akkor I kompakt halmaz.

BIZONYÍTÁS. Hasonló a $k = 1$ esethez (lásd: *Bevezetés az analízisbe* előadás). $\square$

4.9. Következmény (Heine–Borel-tétel). Egy $E \subset \mathbb{R}^k$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

BIZONYÍTÁS. Beláttuk tetszőleges metrikus térben, hogy ha E kompakt, akkor E korlátos és zárt, valamint azt is, hogy ha K kompakt és $E \subset K$ zárt, akkor E kompakt. Ha $E \subset \mathbb{R}^k$ korlátos és zárt, akkor létezik $T \subset \mathbb{R}^k$ zárt tégl, amire $E \subset T$, és T kompakt, ezért E is kompakt. $\square$

5. Lineáris leképezések, mátrixok

5.1. Definíció. Legyenek X és Y valós vektorterek. Az $A : X \rightarrow Y$ leképezést lineárisnak nevezzük, ha

(i)

$$\forall x_1, x_2 \in X : A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) \text{ [azaz } A \text{ „additív”]}$$

(ii)

$$\forall x \in X : \forall \lambda \in \mathbb{R} : A(\lambda x) = \lambda A(x) \text{ [azaz } A \text{ „homogén”]}.$$

$L(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y \mid A \text{ lineáris}\}$. Ha $A, B \in L(X, Y)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, legyen

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) \quad (x \in X), \text{ illetve } (\lambda A)(x) = \lambda A(x) \quad (x \in X).$$

Továbbá, ha Z is valós vektortér, $A \in L(Y, Z)$, $B \in L(X, Y)$, akkor legyen

$$A \cdot B = A \circ B \text{ (azaz } (A \cdot B)(x) = A(B(x)) \quad (x \in X)).$$

5.2. Megjegyzés. A fenti jelölésekkel $A \cdot B \in L(X, Z)$; $L(X, Y)$ valós vektortér, speciálisan $L(X) = L(X, X)$ algebra.

5.3. Megjegyzés. Ha $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, továbbá $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (a j -edik elem 1, az összes többi 0) ($j = 1, \dots, n$) és $u_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (az i -edik elem 1, az összes többi nulla) ($i = 1, \dots, m$) az $\mathbb{R}^n$ illetve $\mathbb{R}^m$ standard bázis-vektorai és

$$(x = x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \mathbb{R}^n,$$

valamint

$$A(x) = y = (y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m y_i u_i \in \mathbb{R}^m,$$

akkor

$$y_i = \langle y, u_i \rangle = \langle A(x), u_i \rangle = \left\langle A \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right), u_i \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j A(e_j), u_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle A(e_j), u_i \rangle.$$

Ez azt jelenti, hogy ha x az $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, y pedig az $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ oszlop mátrixot jelöli, továbbá

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \langle A(e_1), u_1 \rangle & \dots & \langle A(e_n), u_1 \rangle \\ \langle A(e_1), u_2 \rangle & \dots & \langle A(e_n), u_2 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle A(e_1), u_m \rangle & \dots & \langle A(e_n), u_m \rangle \end{pmatrix},$$

akkor $\tilde{A}$ $m \times n$ -es mátrix [jele: $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$] és $y = \tilde{A}x$. A továbbiakban az $\mathbb{R}^n$ beli vektorokat $n \times 1$ -es oszlop mátrixoknak tekintjük, azaz $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^{n \times 1}$ között nem teszünk különbséget ($n \in \mathbb{N}$), valamint A és $\tilde{A}$ között sem teszünk különbséget.

6. Lineáris leképezések normája

6.1. Definíció. $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ esetén legyen

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}.$$

6.2. Megjegyzés. Itt euklideszi normákat tekintünk, de bármely ($\mathbb{R}^n$ -en illetve $\mathbb{R}^m$ -en tekintett) $\|\cdot\|_\Delta$ és $\|\cdot\|_\square$ normákhoz hasonlóan definiálható $\|A\|_{(\Delta, \square)}$.

6.3. Megjegyzés. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \leq 1$ esetén

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= \left\| A \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j A(e_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|A(e_j)\| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^n \|A(e_j)\| \leq \\ &\leq \|x\| \cdot \sum_{j=1}^n \|A(e_j)\| \leq \sum_{j=1}^n \|A(e_j)\| \implies \|A\| \leq \sum_{j=1}^n \|A(e_j)\| \implies \|A\| \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6.4. Lemma. $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ esetén

$$\|A\| = \min\{c \in [0, +\infty[\mid \forall x \in \mathbb{R}^n : \|A(x)\| \leq c\|x\|\}.$$

BIZONYÍTÁS. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén

$$\|A(x)\| = \left\| A \left(\|x\| \cdot \frac{1}{\|x\|} x \right) \right\| = \|x\| \cdot \left\| A \left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \right\| \leq \|A\| \cdot \|x\|,$$

tehát $\|A\|$ eleme a fenti halmaznak. Másrészt, ha $c \geq 0$ is eleme a fenti halmaznak és $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \leq 1$, akkor

$$\|A(x)\| \leq c \cdot \|x\| \leq c,$$

így $\|A\| \leq c$. □

6.5. Lemma. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az $\mathbb{R}^k$ téren bármely két norma ekvivalens. [$\implies \mathbb{R}^k$ bármely normával Banach-tér.]

BIZONYÍTÁS. Elegendő belátnunk, hogy az $\mathbb{R}^k$ téren bármely $\|\cdot\|^*$ norma ekvivalens a $\|\cdot\|_\infty$ -val [a maximum normával].

$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$:

$$\|x\|^* = \left\| \sum_{j=1}^k x_j e_j \right\|^* \leq \sum_{j=1}^k |x_j| \|e_j\|^* \leq M \|x\|_\infty, \quad \text{ahol } M = \sum_{j=1}^k \|e_j\|^*.$$

Emiatt a $\varphi(x) = \|x\|^*$ ($x \in \mathbb{R}^k$) függvényre $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$ esetén

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\|x\|^* - \|y\|^*| \leq \|x - y\|^* \leq M \|x - y\|_\infty,$$

Tehát $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Másrésztől $S = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_\infty = 1\}$ kompakt (mert korlátos és zárt), ezért $\exists x_0 \in S$ úgy, hogy

$$m = \inf\{\varphi(x) : x \in S\} = \varphi(x_0) > 0.$$

Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$:

$$\|x\|^* = \left\| \|x\|_\infty \cdot \frac{1}{\|x\|_\infty} \cdot x \right\|^* = \|x\|_\infty \cdot \left\| \frac{1}{\|x\|_\infty} x \right\|^* = \|x\|_\infty \cdot \varphi\left(\frac{1}{\|x\|_\infty} \cdot x\right) \geq m \|x\|_\infty.$$

□

6.6. Tétel. $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ Banach-tér.

BIZONYÍTÁS. Először azt kell belátni, hogy a szakasz elején bevezetett $\|\cdot\|$ norma az $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektortéren.

Ha $A \neq 0$, akkor $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n : A(x_0) \neq 0$, ezért

$$\|A(x_0)\| > 0 = 0 \cdot \|x_0\| \implies \|A\| > 0.$$

Továbbá $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ esetén

$$\|(\lambda A)(x)\| = \|\lambda A(x)\| = |\lambda| \|A(x)\| \leq |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \implies \|\lambda A\| \leq |\lambda| \|A\|.$$

Ha $\lambda \neq 0$, akkor ebből

$$|\lambda| \cdot \|A\| = |\lambda| \cdot \left\| \frac{1}{\lambda} (\lambda A) \right\| \leq |\lambda| \cdot \left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot \|\lambda A\| = \|\lambda A\|.$$

Végül $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ esetén

$$\|(A+B)(x)\| = \|A(x)+B(x)\| \leq \|A(x)\| + \|B(x)\| \leq (\|A\| + \|B\|) \|x\| \implies \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Tehát $\|\cdot\|$ norma az $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ -en is így ekvivalens $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ euklideszi normájával, ezért teljes metrika származik belőle. □

6.7. Tétel. $L(\mathbb{R}^n)$ Banach-algebra. Ez azt jelenti, hogy $L(\mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ az $\mathbb{R}^n$ -ből önmagába képező lineáris függvények, az úgynevezett lineáris operátorok (négyzetes mátrixok) halmaza az operátorok pontonkénti összeadásával, skalárral szorzásával és $A \cdot B = A \circ B$ szorzással (mátrix-szorzással) algebra, tehát vektortér, továbbá a szorzás asszociatív, disztributív és mindkét változójában homogén (de általában nem kommutatív!), a normával Banach-tér és $\forall A, B \in L(\mathbb{R}^n)$:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

BIZONYÍTÁS. Már csak az utolsó egyenlőtlenséget kell ellenőriznünk. $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|(A \cdot B)(x)\| = \|A(B(x))\| \leq \|A\| \cdot \|B(x)\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|,$$

ezért $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. □

6.8. Tétel. Legyen $G = \{A \in L(\mathbb{R}^n) : A \text{ injektív}\}$

(a) Ha $A \in G$ és $B \in L(\mathbb{R}^n)$, úgy, hogy $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, akkor $B \in G$.

(b) $G \subset L(\mathbb{R}^n)$ nyílt és $\Phi(A) = A^{-1}$ ($A \in G$) folytonos.

BIZONYÍTÁS.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|A^{-1}\|} \|x\| &= \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|A^{-1}(A(x))\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|A^{-1}\| \|A(x)\| = \|A(x)\| = \\ &= \|(A - B)(x) + B(x)\| \leq \|(B - A)(-x)\| + \|B(x)\| \leq \|B - A\| \|x\| + \|B(x)\|, \\ \text{ezért } \|B(x)\| &\geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\| \right) \|x\| \implies [B(x) = 0 \iff x = 0]. \end{aligned}$$

(b) az (a) állításból következik, hogy G nyílt.

Továbbá, ha $A \in G$ és $B \in G$ úgy, hogy $\|B - A\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$, akkor egyrészt a fenti becslésből ($x = B^{-1}(y)$ helyettesítéssel)

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|} < \frac{1}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \frac{1}{2\|A^{-1}\|}} = 2\|A^{-1}\|,$$

másrészt

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A - B)A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A - B\| \cdot \|A^{-1}\| \leq 2 \cdot \|A^{-1}\|^2 \|B - A\|.$$

□