Többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása

(9. előadás I. része)

Boros Zoltán

2019. április 16.

Az alábbiakban $k \in \mathbb{N}$ rögzített.

1. Az integrál tégla-additivitása

1.1. TÉTEL. *Legyen* $I, T \in \mathcal{I}_k$ *úgy, hogy* $(I \cap T)^\circ = \emptyset$ *és* $I \cup T \in \mathcal{I}_k$, *valamint* $f : I \cup T \to \mathbb{R}$ *(korlátos). Ekkor*

$$f \in \mathcal{R}(I \cup T) \Longleftrightarrow f|_I \in \mathcal{R}(I) \text{ és } f|_T \in \mathcal{R}(T).$$

Továbbá, ha

$$f \in \mathcal{R}(I \cup T), \quad \text{akkor} \quad \int_{I \cup T} f = \int_I f + \int_T f.$$

Bizonyítás. Lényegében megegyezik a $k = 1$ esetben leírtakkal. □

1.2. Következmény. *Ha* $I \in \mathcal{I}_k$, $f \in \mathcal{R}(I)$ *és* $\{I_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{D}(I)$, *akkor* $f \in \mathcal{R}(I_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *és*

$$\int_I f = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f\,.$$

Bizonyítás. Az előző tételből következik a tégla-térfogat additivitásának igazolásához hasonló indoklással. □

2. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma

2.1. Lebesgue szerint nullmértékű halmazok

2.1. Definíció. $H \subset \mathbb{R}^k$ Lebesgue szerint nullmértékű [jele: $H \in \mathcal{L}_0^k$], ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists I_n \in \mathcal{I}_k \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ úgy, hogy } H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^0 \text{ és}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v\,(I_n) < \varepsilon.$$

[**Megj:** Elegendő $H \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ ellenőrzése...]

2.2. Példák. 1.) $T \in \mathcal{I}_{k-1}$, $U \subset \mathbb{R}$ megszámlálható, $H = T \times U$. Ekkor $H \in \mathcal{L}_0^k$, mert $U = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ esetén

$$H \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{T} \times \left[u_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1} v_{k-1}(\tilde{T}) + 1}, u_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1} x_{k+1}(\tilde{T}) + 1} \right],$$

ahol $\tilde{T} \in \mathcal{I}_{k-1}, \quad T \subset \tilde{T}^{\circ}$.

2.) Ha $H_n \in \mathcal{L}_0^k \quad (n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \in \mathcal{L}_0^k.$$

2.2. Baire-függvények

Ebben a szakaszban feltesszük, hogy $I \in \mathcal{I}_k$ és $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos.

Legyen $x_0 \in I, \delta > 0$ esetén

$$\begin{aligned} m_f^{\delta}(x_0) &= \inf\left[f(I \cap K(x_0, \delta))\right], \\ M_f^{\delta}(x_0) &= \sup\left[f(I \cap K(x_0, \delta))\right]. \end{aligned}$$

Ekkor $\delta \mapsto m_f^{\delta}(x_0) \quad (\delta > 0)$ monoton csökkenő, $\delta \mapsto M_f^{\delta}(x_0) \quad (\delta > 0)$ monoton növekvő, így létezik

$$\begin{aligned} m_f(x_0) &= \lim_{\delta\to 0+} m_f^{\delta}(x_0) = \sup\{m_f^{\delta}(x_0) : \delta > 0\} \text{ és} \\ M_f(x_0) &= \lim_{\delta\to 0+} M_f^{\delta}(x_0) = \inf\{M_f^{\delta}(x_0) : \delta > 0\}. \end{aligned}$$

Az így értelmezett m_f, $M_f : I \to \mathbb{R}$ függvényeket az f alsó, illetve felső Baire-függvényének nevezzük.

A feltevés szerint létezik olyan K pozitív valós szám, amelyre

$$|f(x)| \leq K \qquad (x \in I), \text{ ezért}$$

$$-K \le m_f(x) \le f(x) \le M_f(x) \le K \qquad (x \in I),$$

továbbá f folytonos x_0-ban $\iff m_f(x_0) = M_f(x_0) \quad [= f(x_0)]$.

Legyen $E = \{x \in I : m_f(x) < M_f(x)\}$, valamint $h > 0$ esetén

$$E_h = \{x \in I : M_f(x) - m_f(x) \ge h\}.$$

2.3. Állítás. *E_h zárt.*

Bizonyítás. $x_0 \in \overline{E_h}$, $\delta > 0 \Longrightarrow \exists y \in E_h \cap K(x_0\,,\delta)$, továbbá

$$r = \delta - d(y, x_0) > 0 \quad \text{és} \quad K(y,r) \subset K(x_0\,,\delta), \text{ így}$$

$$\begin{aligned} M_f^\delta(x_0) - m_f^\delta(x_0) \ge M_f^r(y) - m_f^r(y) \ge M_f(y) - m_f(y) \ge h \\ \Longrightarrow M_f(x_0) - m_f(x_0) \ge h, \end{aligned}$$

azaz $x_0 \in E_h$. □

2.3. A Lebesgue-kritérium

2.4. TÉTEL. [a Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma]: *Legyen $I \in \mathcal{I}_k$ és $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos. Ekkor $f \in \mathcal{R}(I) \iff f$ szakadási helyeinek halmaza Lebesgue szerint nullmértékű.*

Útmutatás a bizonyításhoz. Alkalmazzuk az előző szakasz jelöléseit. Eszerint E jelöli f szakadási helyeinek halmazát.

Először tegyük fel, hogy $E \in \mathcal{L}_0^k$. Ekkor $\varepsilon > 0$ esetén

$$h = \frac{\varepsilon}{2v(I)} > 0,$$

továbbá $E_h \subset E$ miatt $E_h \in \mathcal{L}_0^k$. Továbbá $E_h \subset I$ zárt, így kompakt. Ezért $\exists n \in \mathbb{N}$ és $I_j \in \mathcal{I}_k \quad (j = 1, \ldots, n)$ úgy, hogy

$$E_h \subset \bigcup_{j=1}^n I_j^\circ \subset \left(\bigcup_{j=1}^n I_j\right)^\circ \ \text{ és } \ \sum_{j=1}^n v(I_j) < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

Feltehető (a második tartalmazás megőrzésével az I altér szerinti belső pontokkal), hogy

$$I_j \subset I \quad (j = 1, \ldots, n) \text{ és } (I_j \cap I_i)^\circ = \emptyset,$$

ha $j \ne i$. Minden $x \in I \setminus E_h : \exists \delta_x > 0 :$

$$M_f^{\delta_x}(x) - m_f^{\delta_x}(x) < h.$$

Nyilván

$$Q = I \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n I_j\right)^\circ \subset I \setminus E_h \subset \bigcup_{x \in I \setminus E_h} K\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right).$$

Továbbá Q kompakt, ezért $\exists l \in \mathbb{N} : x_1, x_2, \ldots, x_l \in I \setminus E_h$:

$$Q \subset \bigcup_{i=1}^{l} K\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right).$$

Legyen $\delta = \frac{1}{2}\ \min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_l}\}$. Ekkor $x, y \in Q$, $d(x, y) < \delta$ esetén $\exists i \in \{1, 2, \ldots, l\}$:

$$x \in K\left(x_i\,,\ \frac{\delta_{x_i}}{2}\right) \text{ és}$$

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \delta_{x_i},\ \text{így}$$

$$|f(y) - f(x)| \leq M_f^{\delta_{x_i}}(x_i) - m_f^{\delta_{x_i}}(x_i) < h.$$

Legyen $m \in \mathbb{N}$ és $\tilde{I}_i \in \mathcal{I}_k$ úgy, hogy $\operatorname{diam}(\tilde{I}_i) < \delta \quad (i = 1, \ldots, m)$ és

$$P = \{I_j\}_{j=1}^{n} \bigcup \{\tilde{I}_i\}_{i=1}^{m} \in \mathcal{D}(I).$$

Ekkor

$$\omega(f, P) < \sum_{j=1}^{n} 2Kv(I_j) + \sum_{i=1}^{m} hv(\tilde{I}_i) \leq 2K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} + h \cdot v(I) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tehát $f \in \mathcal{R}(I)$.

Most azt tesszük fel, hogy $f \in \mathcal{R}(I)$. Tetszőleges $h > 0, \varepsilon > 0$ esetén $\exists P \in \mathcal{D}(I)$:

$$\frac{1}{2}\varepsilon h > \omega(f, P) \geq \sum_{\tilde{I} \in P,\ \tilde{I}^\circ \cap E_h \neq \emptyset} hv(\tilde{I})$$

$$\text{így} \sum_{\tilde{I} \in P,\ \tilde{I}^\circ \cap E_h \neq \emptyset} v(\tilde{I}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Másrészről

$$\bigcup_{\tilde{I} \in P} \partial \tilde{I} \in \mathcal{L}_0^k,\ \text{így } \exists I_j^\wedge \in \mathcal{I}_k \quad (j \in \mathbb{N}) \text{ úgy, hogy}$$

$$\bigcup_{\tilde{I} \in P} \partial \tilde{I} < \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^{\wedge\circ} \text{ és } \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j^\wedge) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát

$$E_h \subset \bigcup_{\tilde{I} \in P,\ \tilde{I}^\circ \cap E_h \neq \emptyset} \tilde{I}^\circ \quad \bigcup \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^{\wedge\circ} \text{ és}$$

$$\sum_{\tilde{I} \in P,\ \tilde{I}^\circ \cap E_h \neq \emptyset} v(\tilde{I}) + \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j^\wedge) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ezért $E_h \in \mathcal{L}_0^k$. Ebből

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}_0^k.$$

□

2.5. Következmény. *Ha* $m \in \mathbb{N}$, $I \in \mathcal{I}_k$, $f_j \in \mathcal{R}(I)$ $(j = 1, \dots, m)$, $E \subset \mathbb{R}^m$ *kompakt úgy, hogy* $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ *jelöléssel* $f(I) \subset E$, *továbbá* $\varphi : E \to \mathbb{R}$ *folytonos, akkor* $\varphi \circ f \in \mathcal{R}(I)$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ez egy általános műveleti szabály, ahol m darab Riemann-integrálható függvényt helyettesítünk egy folytonos m-változós leképezésbe (ami tekinthető egy műveletnek), és az eredmény egy Riemann-integrálható függvény lesz.

Először vegyük észre, hogy a feltevés szerint a koordináta-függvények mindegyike Riemann-integrálható, ezért korlátos. Így f is korlátos, azaz van olyan E kompakt halmaz, ami tartalmazza az értékkészletét. Mivel $\varphi : E \to \mathbb{R}$ folytonos, $\varphi(E) \subset \mathbb{R}$ is kompakt, tehát korlátos. Ezért $\varphi \circ f$ korlátos.

Jelölje f_j szakadási helyeinek halmazát $H_j \subset I$ $(j = 1, \dots, m)$, $\varphi \circ f$ szakadási helyeinek halmazát pedig $H \subset I$. Ekkor $f_j \in \mathcal{R}(I)$ miatt $H_j \in \mathcal{L}_0^k$ $(j = 1, \dots, m)$, továbbá az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tétel miatt

$$H \subset \bigcup_{j=1}^{m} H_j \,,$$

ezért $H \in \mathcal{L}_0^k$. A Lebesgue-kritérium szerint tehát $\varphi \circ f \in \mathcal{R}(I)$. $\square$