A Nash-egyensúlypont létezése, a legjobbválasz-leképezés

A topologikus fixponttételek elméletének alkalmazásai a játékelméletben

Boros Zoltán

Debreceni Egyetem, TTK
Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

Debrecen, 2020. február 28.

Felülről félig folytonos leképezés

Jelölés

Tetszőleges X halmaz esetén jelölje 2^X az X halmaz részhalmazainak halmazát.

Definíció

Legyenek X és Y metrikus terek, $F\colon X \to 2^Y$ és $x_0 \in X$. Azt mondjuk, hogy F *felülről félig folytonos* x_0*-ban*, ha minden $U \subset Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(x_0) \subset U$ teljesül, létezik olyan $V \subset X$ nyílt halmaz, amelyre $x_0 \in V$ és $F(x) \subset U$ ha $x \in V$.
(F f.f.f. ha minden pontban f.f.f.)

Egy elegendő feltétel

Lemma

Ha $(K_j\,,\ d_j)$ kompakt metrikus tér $(j = 1, 2)$ és $F : K_1 \to 2^{K_2}$ úgy, hogy a

$$G_F := \{\,(x, y) \in K_1 \times K_2 \,|\, y \in F(x)\,\}$$

halmaz zárt a $K_1 \times K_2$ térben
(a $d((x, y), (x', y')) = d_1(x, x') + d_2(y, y')$ metrikára nézve),
akkor F felülről félig folytonos.

Bizonyítás

Legyen $x_0 \in K_1$ és $V \subset K_2$ nyílt (K_2-ben) úgy, hogy $F(x_0) \subset V$. Ekkor $E := K_2 \setminus V$ zárt (részhalmaza egy kompakt térnek), így kompakt, tehát $\{x_0\} \times E$ és G_F diszjunkt, kompakt halmazok, ezért létezik $\delta > 0$ úgy, hogy minden $w \in E$ és $(x, y) \in G_F$ esetén

$$d\big((x_0\,,\,w)\,,\,(x,y)\big) = d_1(x_0\,,\,x) + d_2(w,y) \geq \delta$$

(ugyanis $d\colon\ (K_1 \times K_2)^2 \to [0, +\infty[$ folytonos, így felveszi a minimumát a kompakt $(\{x_0\} \times E) \times G_F$ halmazon).

Legyen most $U = G(x_0\,,\,\delta/2)$, $x \in U$ és $y \in F(x)$.

Ekkor $d_1(x, x_0) < \frac{\delta}{2}$, $(x, y) \in G_F$, így minden $w \in E$ esetén

$$d_2(w,y) \geq \delta - d_1(x,x_0) > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > 0\,,$$

ezért $y \notin E$, azaz $y \in V$. Tehát $F(x) \subset V$.

Felhasználandó fixponttételek

Brouwer-féle fixponttétel

Ha $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex halmaz és $f : K \to K$ folytonos, akkor f-nek van fixpontja, azaz létezik $x \in K$, amelyre $f(x) = x$.

Kakutani–Fan–Gliksberg-tétel ($\mathbb{R}^n$-ben)

Ha $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex halmaz, $F : K \to 2^K$ felülről félig folytonos és minden $u \in K$ esetén $F(u)$ nem üres, konvex, zárt részhalmaza K-nak, akkor F-nek van fixpontja, azaz létezik $x \in K$, amelyre $x \in F(x)$.

A legjobbválasz leképezés fogalma

Definíció

A $G = (S_1, S_2, \ldots, S_n; f_1, f_2, \ldots, f_n)$ játékban, ahol $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, az $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ játékos *legjobbválasz-leképezése*

$$B_i(\mathbf{s}) = \{ t_i \in S_i \mid \forall r_i \in S_i : \ f_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq f_i(r_i, \mathbf{s}_{-i}) \} \quad (\mathbf{s} \in S).$$

A G-re vonatkozó *legjobbválasz-leképezés*

$$B(\mathbf{s}) = B_1(\mathbf{s}) \times B_2(\mathbf{s}) \times \cdots \times B_n(\mathbf{s})$$

Tétel

Az $\mathbf{s}^* \in S$ stratégia-profil akkor és csak akkor NEP-ja G-nek, ha $\mathbf{s}^*$ fixpontja a B legjobbválasz-leképezésnek, azaz $\mathbf{s}^* \in B(\mathbf{s}^*)$.

Kompakt, konvex stratégia-halmazok

Definíció (k-k-f játék)

Azt mondjuk, hogy $G = (S_1\,, S_2\,, \ldots\,, S_n\,; f_1\,, f_2\,, \ldots\,, f_n)$ *k-k-f játék*, ha G játék, $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, továbbá minden $i \in \{1\,, 2\,, \ldots\,, n\}$ esetén

- létezik $k_i \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $S_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$ nem üres, konvex, kompakt;
- $f_i \colon S \to \mathbb{R}$ folytonos.

Definíció

A $G = (S_1\,, S_2\,, \ldots\,, S_n\,; f_1\,, f_2\,, \ldots\,, f_n)$ k-k-f játékot *[szigorúan] konkáv játék*nak nevezzük, ha minden $i \in \{1\,, 2\,, \ldots\,, n\}$ és minden $\mathbf{s} \in S$ esetén a

$$t_i \mapsto f_i(t_i\,, \mathbf{s}_{-i}) \qquad (t_i \in S_i)$$

leképezés [szigorúan] konkáv.

NEP létezése

Tétel

Legyen $G = (S_1 , S_2 , \ldots , S_n ; f_1 , f_2 , \ldots , f_n)$ egy k-k-f játék. Továbbá tegyük fel, hogy minden $i \in \{ 1 , 2 , \ldots , n \}$ és $\mathbf{s} \in S$ esetén $B_i(\mathbf{s})$ konvex. Ekkor a G játéknak van NEP-ja.

Bizonyítás. Feltevéseink szerint minden $i \in \{ 1 , 2 , \ldots , n \}$ és $\mathbf{s} \in S$ esetén a

$$t_i \mapsto f_i(t_i , \mathbf{s}_{-i}) \qquad (t_i \in S_i)$$

leképezés folytonos az S_i kompakt halmazon, ezért felveszi a maximumát, tehát a $B_i(\mathbf{s})$ halmaz (szintén) nem üres, zárt (ezért kompakt) részhalmaza az S_i stratégia-halmaznak.

Bizonyítás (2. oldal)

Most azt állítjuk, hogy a B legjobbválasz-leképezés

$$G_B = \{\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} \in S\,,\;\; \mathbf{y} \in B(\mathbf{x})\,\}$$

gráfja zárt halmaz.

Indirekt módon tegyük fel, hogy G_B nem zárt. Akkor G_B-nek létezik egy $(\mathbf{x}^{(0)}\,,\,\mathbf{y}^{(0)}) \in (S \times S) \setminus G_B$ torlódási pontja. Mivel $\mathbf{y}^{(0)} \notin B(\mathbf{x}^{(0)})$, van olyan $i \in \{\,1,2,\ldots,n\,\}$ és $y_i^{(1)} \in S_i$, amelyre

$$f_i(y_i^{(1)}\,,\,\mathbf{x}_{-i}^{(0)}) > f_i(y_i^{(0)}\,,\,\mathbf{x}_{-i}^{(0)})\,. \tag{1}$$

Legyen $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_i(y_i^{(1)}\,,\,\mathbf{x}_{-i}) - f_i(y_i\,,\,\mathbf{x}_{-i})\;\;((\mathbf{x},\mathbf{y}) \in S \times S)$.
Nyilván $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le 0$ minden $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in G_B$ esetén.
Továbbá $F : S \times S \to \mathbb{R}$ folytonos, ezért ez az egyenlőtlenség a $\overline{G_B}$ halmaz elemeire is teljesül. Tehát $F(\mathbf{x}^{(0)}\,,\,\mathbf{y}^{(0)}) \le 0$, ellentétben az (1) egyenlőtlenséggel.

Bizonyítás (3. oldal)

Ezzel beláttuk, hogy G_B zárt.
A lemma szerint ebből következik, hogy $B : S \to 2^S$ felülről félig folytonos.
Tehát alkalmazhatjuk a Kakutani–Fan–Gliksberg-tételt annak igazolására, hogy B-nek van fixpontja.
Amint azt korábban megállapítottuk, minden ilyen fixpont NEP.

Következmény.

Legyen $G = (S_1\,, S_2\,, \ldots\,, S_n\,; f_1\,, f_2\,, \ldots\,, f_n)$ konkáv játék. Akkor G-nek van NEP-ja.

A bizonyításhoz csak annyit kell észrevennünk, hogy egy konkáv függvény maximum-helyeinek a halmaza konvex.

Ajánlott irodalom

Bessenyei Mihály – Páles Zsolt:
Topologikus Fixponttételek.
Debreceni Egyetem, 2016 (előadást követő jegyzet).

Kim C. Border:
Fixed point theorems with application to economic and game theory.
Cambridge University Press, Cambridge UK, 1985.

Forgó Ferenc – Pintér Miklós – Simonovits András – Solymosi Tamás:
Játékelmélet.
Corvinus Egyetem, 2005 (elektronikus jegyzet).