

Többszörös függvények differenciál- és integrálszámítása (5–6. előadás)

Boros Zoltán

2019. március 12–19.

1. Inverz függvény

1.1. Banach-féle fixpont-tétel

1.1. TÉTEL. [Banach-féle fixpont-tétel]: Legyen (X, d) teljes metrikus tér és $\varphi : X \rightarrow X$, amelyhez $\exists q \in [0, 1[$ (tehát $0 \leq q < 1$) úgy, hogy $\forall x, y \in X$:

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq q d(x, y) \quad [\text{azaz } \varphi \text{ „kontrakció”}].$$

Ekkor pontosan egy $x \in X$ létezik, amelyre $\varphi(x) = x$ [azaz x fixpontja φ -nek].

BIZONYÍTÁS. [unicitás] Ha $x, y \in X$, $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = y$, akkor

$$d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq q d(x, y),$$

azaz $(1 - q)d(x, y) \leq 0$, vagyis $d(x, y) = 0$, ezért $x = y$.

[létezés] Legyen $x_0 \in X$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Először belátjuk, hogy

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n d(x_0, x_1) \quad (n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Ez $n = 0$ esetén nyilvánvaló, ha pedig $n \in \mathbb{N}$ és $d(x_{n-1}, x_n) \leq q^{n-1} d(x_0, x_1)$, akkor

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x_n) \leq q \cdot q^{n-1} d(x_0, x_1) = q^n d(x_0, x_1).$$

Most belátjuk, hogy $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n < m$ esetén

$$d(x_n, x_m) \leq q^n \cdot \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} d(x_0, x_1),$$

ugyanis $k = m - n$ szerinti indukcióval, $k = 1$ esetén

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n d(x_0, x_1) = q^n \cdot \frac{1 - q^1}{1 - q} \cdot d(x_0, x_1),$$

ha pedig

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq q^n \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q} d(x_0, x_1), \text{ akkor}$$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k+1}) &\leq d(x_n, x_{n+k}) + d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \leq q^n \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q} d(x_0, x_1) + q^{n+k} d(x_0, x_1) = \\ &= q^n d(x_0, x_1) \left[\frac{1 - q^k}{1 - q} + q^k \right] = q^n d(x_0, x_1) \frac{1 - q^k + q^k - q^{k+1}}{1 - q} = q^n d(x_0, x_1) \cdot \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Tehát $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ esetén

$$d(x_n, x_m) \leq q^n \cdot \frac{d(x_0, x_1)}{1 - q} \text{ és}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0,$$

ezért (x_n) Cauchy-sorozat.

Mivel (X, d) teljes, létezik $x \in X$ úgy, hogy

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Másrészről φ Lipshitz-függvény, így folytonos. Ezért

$$\varphi(x) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

□

1.2. Inverz függvény

1.2. TÉTEL. [Inverzfüggvény-tétel]: Legyen $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, továbbá $x_0 \in D$ úgy, hogy $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ [$\sim L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$] invertálható. Akkor léteznek U, V nyílt részhalmazai $\mathbb{R}^n$ -nek úgy, hogy $x_0 \in U \subset D$, $y_0 = f(x_0) \in V = f(U)$, $f|_U$ injektív [azaz $f|_U : U \rightarrow V$ bijekció], $g = (f|_U)^{-1}$ folytonosan differenciálható és $\forall y \in V$:

$$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $A = f'(x_0)$ és $\lambda = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$. Mivel f' folytonos x_0 -ban, $\exists$ olyan x_0 középpontú U nyílt gömb D -ben, amelyre $\forall x \in U$, $\|f'(x) - A\| < \lambda$. Legyen most tetszőleges $y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\varphi_y(x) = x + A^{-1}(y - f(x)) \quad (x \in D).$$

Ekkor $\varphi'_y(x) = E_{n \times n} - A^{-1}f'(x) = A^{-1}(A - f'(x))$, ezért $\forall x \in U$:

$$\|\varphi'_y(x)\| \leq \|A^{-1}\| \|A - f'(x)\| < \|A^{-1}\| \cdot \lambda = \frac{1}{2}.$$

Ebból azt kapjuk, hogy $\forall x_1, x_2 \in U$:

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Legyen most $V = f(U)$ és $v \in V$ tetszőleges. Legyen $u \in U$ úgy, hogy $v = f(u)$, valamint $r > 0$ úgy, hogy $G = K(u, r)$ jelöléssel $\overline{G} \subset U$. Legyen $y \in K(v, \lambda r)$. Ekkor φ_y definíciója alapján

$$\|\varphi_y(u) - u\| = \|A^{-1}(y - f(u))\| = \|A^{-1}(y - v)\| \leq \|A^{-1}\|\|y - v\| < \|A^{-1}\| \cdot \lambda r = \frac{r}{2}.$$

Ha $x \in \overline{G}$, akkor

$$\|\varphi_y(x) - u\| \leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(u)\| + \|\varphi_y(u) - u\| < \frac{1}{2}\|x - u\| + \frac{r}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

ezért $\varphi_y(x) \in G$.

Tehát $\varphi_y : \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ kontrakció és $\overline{G}$ teljes (altér), ezért a Banach-féle fixpont-tétel szerint $\varphi_y|_{\overline{G}}$ -nek pontosan egy fixpontja van. Legyen $x \in \overline{G}$ ez a fixpont, ekkor φ_y definíciója szerint $y = f(x)$, ezért $y \in f(\overline{G}) \subset f(U) = V$. Ezzel beláttuk, hogy $K(v, \lambda r) \subset V$. Mivel $v \in V$ tetszőleges volt, beláttuk, hogy V nyílt.

Továbbá φ_y kontrakció az U gömbön, ezért $x \in U$ egyértelmű, tehát $f|_U : U \rightarrow V$ injektív (és szürjektív).

Legyen $g = (f|_U)^{-1}$. Ekkor $\forall x \in U : g(f(x)) = x$. Legyen $y \in V$ és $w \in \mathbb{R}^n$ úgy $y + w \in V$. Ekkor $\exists x, \bar{x} \in U$:

$$y = f(x) \quad \text{és} \quad y + w = f(\bar{x}).$$

Legyen $h = \bar{x} - x$, ekkor $h \in \mathbb{R}^n$ és $y + w = f(x + h)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi_y(x + h) - \varphi_y(x) &= [(x + h) + A^{-1}(y - f(x + h))] - [x + A^{-1}(y - f(x))] = \\ &= h + A^{-1}(f(x) - f(x + h)) = h - A^{-1}(w) \end{aligned}$$

és φ_y kontrakció $\frac{1}{2}$ konstanssal, tehát

$$\|h - A^{-1}(w)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|,$$

azaz

$$\|h\| - \|A^{-1}(w)\| \leq \|h\| - \|A^{-1}(w)\| \leq \|h - A^{-1}(w)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|,$$

$$\text{ezért } \frac{1}{2}\|h\| \leq \|A^{-1}(w)\|, \text{ így}$$

$$\|h\| \leq 2\|A^{-1}(w)\| \leq 2 \cdot \|A^{-1}\|\|w\| = \frac{1}{\lambda}\|w\|.$$

Korábban beláttuk, hogy ha A invertálható és $\|B - A\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$, akkor B is invertálható. Emiatt $f'(x)$ invertálható mátrix, legyen $T = (f'(x))^{-1}$. Mivel

$$g(y + w) - g(y) - T \cdot w = x + h - x - T \cdot w = h - T \cdot w = -T[f(x + h) - f(x) - f'(x) \cdot h],$$

innen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|w\|} \|g(y+w) - g(y) - T \cdot w\| &\leq \frac{1}{\lambda \|h\|} \cdot \|T\| \cdot \|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| = \\ &= \frac{\|T\|}{\lambda} \cdot \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|}{\|h\|}. \end{aligned}$$

A $\|h\| \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \|w\|$ egyenlőtlenség miatt $w \rightarrow 0$ esetén $h \rightarrow 0$, így a fenti kifejezés határértéke f differenciálhatósága miatt $w \rightarrow 0$ esetén 0. Ezzel beláttuk, hogy g differenciálható y -ban és

$$g'(y) = T = (f'(x))^{-1} = [f'(g(y))]^{-1}.$$

Továbbá g differenciálható $\implies g$ folytonos, f' folytonos és $B \mapsto B^{-1}$ is folytonos, ezért g' is folytonos. $\square$

2. Implicit függvény, feltételes szélsőérték

2.1. Implicit függvény

2.1. TÉTEL. [Az implicit függvény tétel]: Legyen $k, n \in \mathbb{N}$. Tekintsük az $\mathbb{R}^{k+n} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ megfeleltetést, illetve a $D \subset \mathbb{R}^{k+n}$ nyílt halmaz elemeit $(x, y) \in D$ alakban, ahol $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^n$. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és tetszőleges $(x, y) \in D$ esetén

$$f'(x, y) = (D_x f(x, y) \ D_y f(x, y)),$$

ahol

$$\begin{aligned} D_x f(x, y) &= \begin{pmatrix} D_1 f_1(x, y) & \dots & D_k f_1(x, y) \\ D_1 f_2(x, y) & \dots & D_k f_2(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(x, y) & \dots & D_k f_n(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}, \\ D_y f(x, y) &= \begin{pmatrix} D_{k+1} f_1(x, y) & \dots & D_{k+n} f_1(x, y) \\ D_{k+1} f_2(x, y) & \dots & D_{k+n} f_2(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{k+1} f_n(x, y) & \dots & D_{k+n} f_n(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Legyen $(a, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ úgy, hogy $f(a, b) = 0$ és $\det[D_y f(a, b)] \neq 0$. Ekkor $\exists r > 0$ és pontosan egy $g : K(a, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény úgy, hogy $g(a) = b$ és $\forall x \in K(a, r)$:

$$f(x, g(x)) = 0,$$

továbbá

$$g'(x) = -[D_y f(x, g(x))]^{-1} \cdot D_x f(x, g(x)).$$

[Ezt a g függvényt implicit függvénynek nevezzük.]

BIZONYÍTÁS. Legyen $F(x, y) = (x, f(x, y))$ $((x, y) \in D)$.
Ekkor $F : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ folytonosan differenciálható és

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} E_{k \times k} & 0_{k \times n} \\ D_x f(x, y) & D_y f(x, y) \end{pmatrix}, \text{ így } \det[F'(x, y)] = \det[D_y f(x, y)].$$

Speciálisan $\det[F'(a, b)] = \det[D_y f(a, b)] \neq 0$, ezért az inverz-függvény tétel szerint $\exists U \subset D$ nyílt halmaz, amelyre $(a, b) \in U$, $F|_U$ invertálható, $V = F(U) \subset \mathbb{R}^{k+n}$ nyílt, $(a, 0) = (a, f(a, b)) = F(a, b) \in V$, valamint $G = (F|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ folytonosan differenciálható. Továbbá $(x, y) \in U$ esetén

$$(x, y) = G(F(x, y)) = G(x, f(x, y))$$

miatt $\forall (x, z) \in V : \exists h(x, z) \in \mathbb{R}^n$:

$$G(x, z) = (x, h(x, z))$$

és így $h : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ is folytonosan differenciálható.

Legyen $r > 0$ úgy, hogy $K(a, r) \times \{(0, 0, \dots, 0)\} \subset V$ és

$$g(x) = h(x, 0) \quad (x \in K(a, r)).$$

Ekkor g folytonosan differenciálható és $x \in K(a, r)$ esetén $(x, 0) \in V$, így

$$G(x, 0) = (x, h(x, 0)), \text{ ezért}$$

$$(x, 0) = F(x, h(x, 0)) = (x, f(x, h(x, 0))),$$

így $0 = f(x, h(x, 0)) = f(x, g(x))$ és

$$(a, b) = G(a, 0) = (a, h(a, 0)) = (a, g(a)) \text{ miatt } g(a) = b.$$

Ha g_1 és g_2 is implicit függvény a $K(a, r)$ halmazon, akkor

$$f(x, g_1(x)) = 0 = f(x, g_2(x)) \quad (x \in K(a, r)),$$

azaz

$$F(x, g_1(x)) = (x, 0) = F(x, g_2(x)) \quad (x \in K(a, r))$$

és $F|_U$ injektív, ezért $g_1(x) = g_2(x)$.

Továbbá feltehető (az inverz-függvény tétel állítása miatt), hogy $(x, y) \in U$ esetén

$$\det[D_y f(x, y)] = \det(F'(x, y)) \neq 0,$$

így a $0 = f(x, g(x))$ egyenletet deriválva x szerint:

$$\mathbb{R}^{n \times k} \ni 0 = f'(x, g(x)) \begin{pmatrix} E_{k \times k} \\ g'(x) \end{pmatrix} = D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x)) \cdot g'(x),$$

$$\text{így } g'(x) = -[D_y f(x, g(x))]^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

□

2.2. Feltételes szélsőérték

2.2. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^{k+n}$ nyílt. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $x_0 \in D$ pontban a $h(x) = 0$ feltételre vonatkozó feltételes lokális szélsőértéke van, ha $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ úgy, hogy $h(x_0) = 0$ és $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $K(x_0, \delta) \subset D$ és az

$$E = \{x \in K(x_0, \delta) : h(x) = 0\}$$

halmazon az $f|_E$ függvénynek szélsőértéke van x_0 -ban. Ez azt jelenti, hogy $\forall x \in K(x_0, \delta) : h(x) = 0$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$ [vagy minden ilyen x -re $f(x) \leq f(x_0)$]. Másképp: f -nek lokális szélsőértéke van a $h^{-1}(0)$ metrikus altér x_0 pontjában.

2.3. TÉTEL. [A feltételes lokális szélsőérték Lagrange-féle szükséges feltétele]:
Legyen $D \subset \mathbb{R}^{k+n}$ nyílt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és $h = (h_1, \dots, h_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ha az f függvénynek a $z_0 \in D$ pontban a $h(z) = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van, akkor

- a $h'(z_0) \in \mathbb{R}^{n \times (k+n)}$ mátrixnak minden n -ed rendű aldeteminánsa 0, vagy
- $\exists \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ úgy, hogy az

$$F(z) = f(z) + \lambda^T h(z) = f(z) + \sum_{j=1}^n \lambda_j h_j(z) \quad (z \in D)$$

függvényre $\forall j \in \{1, 2, \dots, k+n\} : D_j F(z_0) = 0$.

BIZONYÍTÁS. Feltehetjük, hogy $z = (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ és az előző tétel jelöléseivel $\det[D_y h(x_0, y_0)] \neq 0$ (ahol $z_0 = (x_0, y_0)$). Ugyancsak az implicit függvény tétel szerint $\exists r > 0$ és $g : K(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható úgy, hogy $y_0 = g(x_0)$, továbbá $\forall x \in K(x_0, r) :$

$$(x, g(x)) \in D \quad \text{és} \quad h(x, g(x)) = 0.$$

Legyen $G(x) = f(x, g(x))$ ($x \in K(x_0, r)$). Ekkor G -nek [nem feltételes!] (lokális) szélsőértéke van x_0 -ban, így $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\} :$

$$0 = D_j G(x_0) = D_j f(x_0, g(x_0)) + \sum_{i=1}^n D_{k+i} f(x_0, g(x_0)) \cdot D_j g_i(x_0),$$

azaz

$$\mathbb{R}^{1 \times k} \ni 0 = G'(x_0) = \overbrace{D_x f(x_0, g(x_0))}^{\in \mathbb{R}^{1 \times k}} + \overbrace{D_y f(x_0, g(x_0))}^{\in \mathbb{R}^{1 \times n}} \cdot \overbrace{g'(x_0)}^{\in \mathbb{R}^{n \times k}} \quad (1)$$

Másrésről $h(x, g(x)) = 0 \implies$

$$\mathbb{R}^{n \times k} \ni 0 = \underbrace{D_x h(x, g(x))}_{\in \mathbb{R}^{n \times k}} + \underbrace{D_y h(x, g(x))}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\in \mathbb{R}^{n \times k}} \quad (x \in K(x_0, r)).$$

Ezt az $x = x_0$ pontban tekintve, a $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ sormátrixszal balról szorozva és (1)-hez hozzáadva

$$\begin{aligned}
& \mathbb{R}^{1 \times k} \ni 0 = \\
& = D_x f(x_0, g(x_0)) + \lambda^T D_x h(x_0, g(x_0)) + [D_y f(x_0, g(x_0)) + \lambda^T D_y h(x_0, g(x_0))] g'(x_0). \quad (2)
\end{aligned}$$

Mivel $\det[D_y h(x_0, g(x_0))] = \det[D_y h(x_0, y_0)] \neq 0$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$ úgy, hogy

$$\lambda^T D_y h(x_0, g(x_0)) = -D_y f(x_0, g(x_0)), \quad (3)$$

ezért (2) $\implies$

$$0 = D_x f(x_0, y_0) + \lambda^T D_x h(x_0, y_0) = D_x F(x_0, y_0) \quad (4)$$

A (3) és (4) összefüggésekből kapjuk, hogy

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, k+n\} : \quad D_j F(z_0) = D_j f(z_0) + \lambda^T D_j h(z_0) = 0.$$

□