Határozatlan integrál

Boros Zoltán

Debreceni Egyetem, TTK
Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

Debrecen, 2020. március 28.

Primitív függvény, határozatlan integrál

A továbbiakban legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum.

Definíció

A $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt a $f : I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvényének nevezzük, ha F differenciálható és $F' = f$ (azaz $\forall x \in I \; : \; F'(x) = f(x)$).
A f primitív függvényeinek összességét [halmazát] a f függvény *határozatlan integrál*jának nevezzük és

$$\int f(x)\,dx$$

módon jelöljük.

Az integrálszámítás alaptétele

Tétel

Legyen $F : I \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek (azaz $F' = f$). $G : I \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor primitív függvénye f-nek, ha létezik $C \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall x \in I \ : \ G(x) = F(x) + C$.

Bizonyítás (szükségesség):
Ha G differenciálható és $G' = f$, valamint
$H(x) = G(x) - F(x) \quad (x \in I)$, akkor $\forall x \in I$:
$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$,
ezért H konstans függvény.

Következmény (illetve jelölés)

A tétel feltételei mellett (azaz $F' = f$ esetén)

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Alapintegrálok 1

A nevezetes elemi függvények deriváltjainak listáját (és helyenként a derivált linearitását) felhasználva kapjuk a következőket:

$$\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (-1 \neq k \in \mathbb{R}),$$

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C\,,$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C\,, \qquad \int p^x \, dx = \frac{p^x}{\ln p} + C \quad (1 \neq p > 0),$$

$$\int \mathrm{sh}(x) \, dx = \mathrm{ch}(x) + C\,, \qquad \int \mathrm{ch}(x) \, dx = \mathrm{sh}(x) + C\,,$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C\,, \qquad \int \sin(x) \, dx = C - \cos(x)\,,$$

Alapintegrálok 2

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \operatorname{tg}(x) + C\,, \quad \int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = C - \operatorname{ctg}(x)\,,$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C\,, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C\,,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh}(x) + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C\,,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch}(x) + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C\,.$$

Linearitás

A következő integrálási szabályokat rendre a differenciálható függvények összegének, konstans-szorosának, szorzatának illetve kompozíciójának deriválására vonatkozó megfelelő szabályokból kapjuk.

Tétel

Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ és $g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek van primitív függvényük, valamint $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx \quad \text{és}$$

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,.$$

Példa

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + x + 2}{x^2 + 1}\,dx =$$
$$\int \frac{(x+3)(x^2+1) - 1}{x^2+1}\,dx =$$
$$\int \left(x + 3 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$
$$\int x\,dx + 3\int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$
$$\frac{x^2}{2} + 3x - \operatorname{arctg}(x) + C\,.$$

Parciális integrálás

Tétel

Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\,.$$

Példa:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= x\sin(x) - \int 1\cdot\sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C\,.\end{aligned}$$

Helyettesítéses integrálás 1

Tétel

Ha J is egy intervallum, $g : I \to J$ differenciálható és F, $f : J \to \mathbb{R}$ úgy, hogy F primitív függvénye f-nek (azaz $F' = f$), akkor

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C\,.$$

Példák:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^7(x)}{\cos^9(x)}\,dx &= \int (\mathrm{tg}(x))^7 \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \frac{(\mathrm{tg}(x))^8}{8} + C\,,\\
\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{(x^3)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3) + C\,.
\end{aligned}$$

Helyettesítéses integrálás 2

A helyettesítéses integrálás tételéből g alkalmas megválasztásával kapjuk, hogy ha $F' = f$ akkor például

$$\begin{aligned}
\int f(ax+b)\,dx &= \frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+C\,,\\
\int f(x^k)x^{k-1}dx &= \frac{1}{k}\cdot F(x^k)+C \quad (k\neq 0),\\
\int f(e^x)e^x dx &= F(e^x)+C\,,\\
\int f(a^x)a^x dx &= \frac{1}{\ln a}\cdot F(a^x)+C\,,\\
\int f(\sin x)\cos x\,dx &= F(\sin x)+C\,,\\
\int \frac{1}{x}f(\ln x)\,dx &= F(\ln x)+C\,.
\end{aligned}$$

Helyettesítéses integrálás 3

A helyettesítéses integrálás tételéből f alkalmas megválasztásával kapjuk, hogy például

$$\begin{aligned}
\int [g(x)]^n \cdot g'(x)\,dx &= \frac{1}{n+1}(g(x))^{n+1} + C \quad (n \neq -1),\\
\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx &= \ln|g(x)| + C\,,\\
\int a^{g(x)} \cdot g'(x)\,dx &= \frac{1}{\ln a} \cdot a^{g(x)} + C\,.
\end{aligned}$$

Speciálisan

$$\int \mathrm{ctg}(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{\sin'(x)}{\sin x}\,dx = \ln|\sin(x)| + C\,.$$

Polinomok, hatványfüggvények lineáris kombinációi

1. Példa:

$$\begin{aligned}\int \left(6x^2 - 8x + 8\right)\, dx &= 6\int x^2\, dx - 8\int x^1\, dx + 8\int x^0\, dx \\ &= 6\cdot\frac{x^3}{3} - 8\cdot\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^1}{1} + C \\ &= 2x^3 - 4x^2 + 8x + C\,.\end{aligned}$$

2. Példa:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx$$

$$= \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}\, x^{3/2} + 2\, x^{1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C\,.$$

Parciális integrálással integrálhatók 1

Jelöljön $P(x)$ tetszőleges polinomot!

1. típus: a polinom fokszáma deriválással csökkenthető

- $\int P(x)a^x \, dx \quad (1 \neq a > 0)$;
- $\int P(x) \sin(ax+b) \, dx$, $\int P(x) \cos(ax+b) dx$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R})$.

2. típus: az inverz-függvény deriválással algebrai kifejezéssé alakítható

- $\int P(x) \ln(x) \, dx$, $\int P(x) \mathrm{arctg}(x) \, dx$;
- $\int \arcsin(x) \, dx$, $\int \mathrm{arsh}(x) \, dx$.

3. típus: a keresett integrálra lineáris egyenletet kapunk

- $\int a^x \sin(kx+b) \, dx \quad (1 \neq a > 0, \; k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R})$;
- $\int \sin^n(x) \, dx$, $\int \cos^n(x) \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$.

Parciális integrálással integrálhatók 2

Példák:

$$
\begin{aligned}
& \int (6x^2+12x-7)e^x \, dx \\
= \quad & (6x^2+12x-7)e^x - \int (12x+12)e^x \, dx \\
= \quad & (6x^2+12x-7)e^x - \left((12x+12)e^x - \int 12e^x dx \right) \\
= \quad & (6x^2+12x-7)e^x - (12x+12)e^x + 12e^x + C \\
= \quad & (6x^2-7)e^x + C \, ,
\end{aligned}
$$

Parciális integrálással integrálhatók 3

$$
\begin{aligned}
&\int (6x^2 - 4)\ln(x)\,dx \\
= \quad & (2x^3 - 4x)\ln(x) - \int (2x^3 - 4x)\frac{1}{x}\,dx \\
= \quad & (2x^3 - 4x)\ln(x) - \int (2x^2 - 4)\,dx \\
= \quad & (2x^3 - 4x)\ln(x) - \frac{2}{3}x^3 + 4x + C\,,
\end{aligned}
$$

Parciális integrálással integrálhatók 4

$$
\begin{aligned}
\int \arcsin(x)\,dx &= \int 1 \cdot \arcsin(x)\,dx \\
&= x\arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int (-2x)(1-x^2)^{-1/2}dx \\
&= x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C \\
&= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

Parciális integrálással integrálhatók 5

$$\begin{aligned}
& \int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx \\
= \quad & e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))\,dx \right) \\
= \quad & e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx \\
\Longrightarrow \quad & \int e^x \sin(x)\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C\,;
\end{aligned}$$

Parciális integrálással integrálhatók 6

$$
\begin{aligned}
S_n = \int \sin^n(x)\,dx &= \int \sin^{n-1}(x)\sin(x)\,dx \\
&= \sin^{n-1}(x)\,(-\cos(x)) - \int (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\,(-\cos(x))\;dx \\
&= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\,dx \\
&= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\,(S_{n-2} - S_n) \\
\Longrightarrow\quad & nS_n = (n-1)S_{n-2} - \cos(x)\sin^{n-1}(x)\,.
\end{aligned}
$$

Algebrai eszközök 1

Fogalmak és **eljárások**

- *Racionális tört*: két polinom hányadosa.
- *Maradékos osztás*: Ha $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok (utóbbi legalább elsőfokú), akkor egyértelműen léteznek olyan $H(x)$ és $R(x)$ polinomok, amelyekre $R(x)$ fokszáma kisebb $Q(x)$ fokszámánál és

  $$P(x) = H(x)Q(x) + R(x)\,,$$

  azaz

  $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{H(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

- *Irreducibilis polinom*: olyan polinom, ami nem áll elő alacsonyabb fokszámú polinomok szorzataként; minden irreducibilis valós együtthatós polinom első- vagy másodfokú; egy másodfokú polinom akkor irreducibilis, ha a diszkriminánsa negatív.

Algebrai eszközök 2

- *Parciális tört*: Olyan $\dfrac{P(x)}{(Q(x))^k}$ alakú racionális tört, ahol k pozitív egész, $Q(x)$ irreducibilis polinom és $P(x)$ olyan polinom, aminek a fokszáma kisebb $Q(x)$ fokszámánál.
  Az előbbiek szerint a valós együtthatós polinomok hányadosai közül a(z)
  $$\frac{A}{(px+q)^k}\,, \quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^m}$$
  alakúak parciális törtek, ha $k\,,\ m \in \mathbb{N}\,,$
  $A\,,\ B\,,\ C\,,\ a\,,\ b\,,\ c\,,\ p\,,\ q \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $p \neq 0$ és $b^2 < 4ac\,.$
- *Tétel*: Ha a $P(x)$ polinom fokszáma kisebb a $Q(x)$ polinom fokszámánál, akkor a $P(x)/Q(x)$ racionális tört előáll olyan parciális törtek összegeként, amelyeknek a nevezője osztója $Q(x)$-nek.

1. Példa racionális tört integrálására

$$
\begin{aligned}
& \frac{x^5+2x^4+4x^3+2x^2+4x-2}{x^4+x^2} \\
= \ & \frac{(x+2)(x^4+x^2)+3x^3+4x-2}{x^4+x^2} = x+2+\frac{3x^3+4x-2}{x^2(x^2+1)} \\
= \ & x+2+\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x}\,,
\end{aligned}
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
3x^3+4x-2 &= (Ax+B)x^2+C(x^2+1)+Dx(x^2+1) \\
&= (A+D)x^3+(B+C)x^2+Dx+C
\end{aligned}
$$

miatt $A+D=3\,,\ B+C=0\,,\ D=4\,,\ C=-2\,,$
így $A=-1$ és $B=2\,.$

1. Példa (folytatás)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^5+2x^4+4x^3+2x^2+4x-2}{x^4+x^2}\,dx \\
= \;& \int \left(x+2+\frac{2-x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x}\right)\,dx \\
= \;& \int x\,dx + 2\int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\
& -2\int x^{-2}\,dx + 4\int \frac{1}{x}\,dx \\
= \;& \frac{x^2}{2}+2x+2\mathrm{arctg}(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\frac{x^{-1}}{-1}+4\ln|x|+C \\
= \;& \frac{x^2}{2}+2x+2\mathrm{arctg}(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{2}{x}+4\ln|x|+C\,.
\end{aligned}$$

2. Példa racionális tört integrálására

Meghatározandó $\int \frac{6x}{x^2+x-2}\,dx$.

Mivel $x^2+x-2=0$ gyökei $x_1=1$ és $x_2=-2$,
$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Tehát

$$\frac{6x}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\,,$$

amiből

$$6x=A(x+2)+B(x-1)=(A+B)x+(2A-B)$$

adódik, tehát $A+B=6$ és $2A-B=0$,
ezért $A=2$ és $B=4$. Így

$$\int \frac{6x}{x^2+x-2}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x+2}\right)\,dx$$

$$=\quad 2\int\frac{1}{x-1}\,dx+4\int\frac{1}{x+2}\,dx=2\ln|x-1|+4\ln|x+2|+C\,.$$

3. Példa racionális tört integrálására

$$\int \frac{6x}{x^2-4x+13}\,dx = \int \frac{3(2x-4)+12}{x^2-4x+13}\,dx$$

$$= 3\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}\,dx + \int \frac{12}{(x-2)^2+9}\,dx$$

$$= 3\ln\left|x^2-4x+13\right| + \frac{12}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,dx$$

$$= 3\ln(x^2-4x+13) + 4\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{3}\,dx$$

$$= 3\ln(x^2-4x+13) + 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$$

Racionalizáló helyettesítés 1

Ha R egy egy- vagy többváltozós racionális tört, akkor $R(\sqrt[k]{x})$, $R(a^x)$, $R(\sin x\,,\,\cos x)$ stb. integrálja alkalmas helyettesítéssel racionális tört integrálására vezethető vissza.

Az első két esetben a helyettesítés magától értetődő:

$$y = \sqrt[k]{x} \;\Rightarrow\; x = y^k \;\Rightarrow\; dx = ky^{k-1}\,dy$$

illetve

$$y = a^x \;\Rightarrow\; x = \log_a y \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{y \ln a}\,dy$$

1. példa racionalizáló helyettesítésre

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx &= \int \frac{1}{y+1}\,3y^2\,dy \\
&= \int \frac{(3y-3)(y+1)+3}{y+1}\,dy \\
&= \int \left(3y-3+\frac{3}{y+1}\right)dy \\
&= \frac{3}{2}y^2-3y+3\ln|y+1|+C \\
&= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C
\end{aligned}
$$

2. példa racionalizáló helyettesítésre

$$
\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{y}{y+1}\,\frac{1}{y}\,dy \\
&= \int \frac{1}{y+1}\,dy = \ln|y+1| + C \\
&= \ln\left(e^x+1\right) + C
\end{aligned}
$$

Racionalizáló helyettesítés 2

$\int R(\sin x\,,\,\cos x)\,dx$ kiszámításához a helyettesítés
$t = \operatorname{tg}(x/2)$, ekkor

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

és $x = 2\operatorname{arctg}(t)$ miatt

$$dx = 2\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,.$$

3. példa racionalizáló helyettesítésre

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C \\
&= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C
\end{aligned}$$

Hivatkozások

Gselmann Eszter.
Kalkulus II.
DE TTK, Debrecen, 2012.

Gselmann Eszter.
Kalkulus II. példatár
DE TTK, Debrecen, 2013.

Lajkó Károly.
Kalkulus II.
DE Matematikai Intézet, 2005.

Lajkó Károly.
Kalkulus II. példatár
DE Informatikai Intézet, 2004.

Walter Rudin.
A matematikai analízis alapjai
Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978.