

Valós függvények folytonossága, határértéke

Differenciál- és integrálszámítás — 1. konzultáció

Boros Zoltán

Debreceni Egyetem, TTK
Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

Debrecen, 2020. február 14.

Függvények határértéke metrikus terekben

Definíció [függvény-határérték]

Legyen (X, d) és (Y, ϱ) metrikus tér, $E \subset X$. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in E'$ pontban az $f: E \rightarrow Y$ függvény határértéke $y_0 \in Y$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $0 < d(x, x_0) < \delta$ esetén $\varrho(f(x), y_0) < \varepsilon$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

vagy: $f(x) \rightarrow y_0$, ha $x \rightarrow x_0$.

Emlékeztető: E' jelöli az E halmaz torlódási pontjainak halmazát. Tehát $x_0 \in E'$ azt jelenti, hogy $x_0 \in X$ és bármely $r > 0$ esetén van olyan $x \in E$, amire $0 < d(x, x_0) < r$ teljesül.

Függvények folytonossága metrikus terekben

Definíció [folytonosság]

Legyen (X, d) és (Y, ϱ) metrikus tér, $E \subset X$. Azt mondjuk, hogy az $f: E \rightarrow Y$ függvény folytonos az $x_0 \in E$ pontban ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $d(x, x_0) < \delta$ esetén $\varrho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Az f függvényt *folytonosnak* nevezzük, ha f az E halmaz minden pontjában folytonos.

Tétel

Legyen (X, d) és (Y, ϱ) metrikus tér, $E \subset X$. Az $f: E \rightarrow Y$ függvény akkor és csak akkor folytonos az $x_0 \in E \cap E'$ pontban, ha f -nek létezik a határértéke x_0 -ban és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Sorozatok határértéke, konvergenciája

Definíció [sorozat határértéke]

Legyen (X, d) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow X$ sorozat határértéke $u \in X$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ úgy, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $d(x_n, u) < \varepsilon$.

Jelölése: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$.

Az (x_n) sorozatot konvergensnek nevezzük, ha van olyan $v \in X$, amire $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = v$.

Megjegyzés: A sorozat-határérték, ha létezik, akkor egyértelmű.

Átviteli elv

Tétel [1. átviteli elv]

Az első definíció jelölései és feltételei mellett

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n): \mathbb{N} \rightarrow E \setminus \{x_0\} : \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{esetén} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0 .$$

A bizonyítás hasonló a folytonosságra vonatkozó átviteli elv bizonyításához.

Tétel [2. átviteli elv]

Az első definíció jelölései és feltételei mellett

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n): \mathbb{N} \rightarrow E \setminus \{x_0\} : \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{esetén} \quad (f(x_n)) \text{ konvergens} .$$

Valós számhalmazok torlódási pontjai

Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy

- x_0 *belső pontja* E -nek, ha létezik $r > 0$ úgy, hogy

$$]x_0 - r, x_0 + r[\subset E;$$

- x_0 -ban E *balról torlódik*, ha minden $r > 0$ esetén

$$]x_0 - r, x_0[\cap E \neq \emptyset;$$

- x_0 -ban E *jobbról torlódik*, ha minden $r > 0$ esetén

$$]x_0, x_0 + r[\cap E \neq \emptyset;$$

- x_0 *torlódási pontja* E -nek, ha x_0 -ban E balról vagy jobbról torlódik.

Jelölések

$E \subset \mathbb{R}$ esetén legyen

$$E^\circ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ belső pontja } E\text{-nek}\},$$

$$E' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ torlódási pontja } E\text{-nek}\},$$

$$E'_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x\text{-ben } E \text{ balról torlódik}\},$$

$$E'_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x\text{-ben } E \text{ jobbról torlódik}\},$$

valamint

$$E'_\pm = E'_- \cap E'_+.$$

Megjegyzés: $E^\circ \subset E$, $E^\circ \subset E'_\pm$ és $E' = E'_- \cup E'_+$.

1. Példa: $E = [2, 4[\cup \{5\}$ esetén

$$E^\circ =]2, 4[= E'_\pm, \quad E'_- =]2, 4], \quad E'_+ = [2, 4[, \quad \text{és} \quad E' = [2, 4].$$

2. Példa: $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\mathbb{Q}'_\pm = \mathbb{R}$ (mert $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'_- = \mathbb{Q}'_+ = \mathbb{R}$).

Valós függvények határértéke (1-a)

Definíció [függvény-határérték]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in E'$ pontban az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke $y_0 \in \mathbb{R}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

vagy: $f(x) \rightarrow y_0$, ha $x \rightarrow x_0$.

Valós függvények határértéke (1-b)

Definíció [(+) végtelen határérték]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in E'$ pontban az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke $+\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $f(x) > K$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

vagy: $f(x) \rightarrow +\infty$, ha $x \rightarrow x_0$.

Valós függvények határértéke (1-c)

Definíció [(-) végtelen határérték]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in E'$ pontban az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke $-\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $f(x) < K$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

vagy: $f(x) \rightarrow -\infty$, ha $x \rightarrow x_0$.

Valós függvények határértéke (2-a)

Definíció [baloldali határérték]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in E'_-$ pontban az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény baloldali határértéke $y_0 \in \mathbb{R}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $x_0 - \delta < x < x_0$ esetén $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = y_0$$

vagy: $f(x) \rightarrow y_0$, ha $x \rightarrow x_0 -$.

Valós függvények határértéke (2-b)

Definíció [(+) végtelen mint baloldali határérték]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in E'_-$ pontban az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény baloldali határértéke $+\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $x_0 - \delta < x < x_0$ esetén $f(x) > K$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = +\infty$$

vagy: $f(x) \rightarrow +\infty$, ha $x \rightarrow x_0 -$.

Valós függvények határértéke (2-c)

Definíció [(-) végtelen mint baloldali határérték]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in E'_-$ pontban az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény baloldali határértéke $-\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $x_0 - \delta < x < x_0$ esetén $f(x) < K$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = -\infty$$

vagy: $f(x) \rightarrow -\infty$, ha $x \rightarrow x_0 -$.

Valós függvények határértéke (3-a)

Definíció [jobboldali határérték]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in E'_+$ pontban az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény jobboldali határértéke $y_0 \in \mathbb{R}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $x_0 < x < x_0 + \delta$ esetén $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = y_0$$

vagy: $f(x) \rightarrow y_0$, ha $x \rightarrow x_0+$.

Valós függvények határértéke (3-b)

Definíció [(+) végtelen mint jobboldali határérték]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in E'_+$ pontban az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény jobboldali határértéke $+\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $x_0 < x < x_0 + \delta$ esetén $f(x) > K$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = +\infty$$

vagy: $f(x) \rightarrow +\infty$, ha $x \rightarrow x_0+$.

Valós függvények határértéke (3-c)

Definíció [(-) végtelen mint jobboldali határérték]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $x_0 \in E'_+$ pontban az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény jobboldali határértéke $-\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x \in E$, $x_0 < x < x_0 + \delta$ esetén $f(x) < K$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = -\infty$$

vagy: $f(x) \rightarrow -\infty$, ha $x \rightarrow x_0+$.

Valós függvények határértéke (4-a)

Definíció [függvény-határérték a (+) végtelenben]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$ úgy, hogy E felülről **nem** korlátos. Azt mondjuk, hogy a $(+\infty)$ -ben az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke $y_0 \in \mathbb{R}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $L \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \in E$, $x > L$ esetén $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$$

vagy: $f(x) \rightarrow y_0$, ha $x \rightarrow +\infty$.

Valós függvények határértéke (4-b)

Definíció [(+) végtelen határérték a (+) végtelenben]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$ úgy, hogy E felülről **nem** korlátos. Azt mondjuk, hogy a $(+\infty)$ -ben az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke $+\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $L \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \in E$, $x > L$ esetén $f(x) > K$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

vagy: $f(x) \rightarrow +\infty$, ha $x \rightarrow +\infty$.

Valós függvények határértéke (4-c)

Definíció [(-) végtelen határérték a (+) végtelenben]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$ úgy, hogy E felülről **nem** korlátos. Azt mondjuk, hogy a $(+\infty)$ -ben az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke $-\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $L \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \in E$, $x > L$ esetén $f(x) < K$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

vagy: $f(x) \rightarrow -\infty$, ha $x \rightarrow +\infty$.

Valós függvények határértéke (5-a)

Definíció [függvény-határérték a (-) végtelenben]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$ úgy, hogy E alulról **nem** korlátos. Azt mondjuk, hogy a $(-\infty)$ -ben az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke $y_0 \in \mathbb{R}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $L \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \in E$, $x < L$ esetén $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

vagy: $f(x) \rightarrow y_0$, ha $x \rightarrow -\infty$.

Valós függvények határértéke (5-b)

Definíció [(+) végtelen határérték a (-) végtelenben]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$ úgy, hogy E alulról **nem** korlátos. Azt mondjuk, hogy a $(-\infty)$ -ben az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke $+\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $L \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \in E$, $x < L$ esetén $f(x) > K$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

vagy: $f(x) \rightarrow +\infty$, ha $x \rightarrow -\infty$.

Valós függvények határértéke (5-c)

Definíció [(-) végtelen határérték a (-) végtelenben]

Legyen $E \subset \mathbb{R}$ úgy, hogy E alulról **nem** korlátos. Azt mondjuk, hogy a $(-\infty)$ -ben az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke $-\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz létezik $L \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \in E$, $x < L$ esetén $f(x) < K$.

Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

vagy: $f(x) \rightarrow -\infty$, ha $x \rightarrow -\infty$.

Ajánlott irodalom



Gselmann Eszter.
Kalkulus I.
DE TTK, Debrecen, 2011.



Gselmann Eszter.
Kalkulus I. példatár
DE TTK, Debrecen, 2012.



Lajkó Károly.
Analízis I.
KLTE Matematikai és Informatikai Intézet, Debrecen, 1998.



Lajkó Károly.
Kalkulus I. példatár
DE TTK Matematikai Intézet, 2003.



Walter Rudin.
A matematikai analízis alapjai
Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978.