

# Riemann-integrál gyakorló feladatok

1. Adjunk alsó és felső becsléseket az

$$f(x) = 4 - x^2 \quad (x \in [0, 2])$$

függvény grafikonja és a koordináta-tengelyek által határolt tartomány területére a  $[0, 2]$  intervallum felosztásaihoz tartozó alsó- illetve felső integrálközelítő összegek (a tartományba illesztett illetve azt együttesen lefedő téglalapok területeinek összege) formájában! Határozzuk meg a pontos területet is a Newton–Leibniz formula felhasználásával!

2. Határozzuk meg a következő Riemann-integrálok értékét (alapintegrálok és a linearitás felhasználásával):

$$\int_1^2 (8x^3 - 6x) dx, \quad \int_1^4 \frac{3x+4}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_1^2 3^{x+1} dx, \quad \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3}{\cos^2 x} dx, \quad \int_{-4}^{-2} \frac{x^2+1}{x} dx, \\ \int_1^4 \sqrt{25x^3} dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx, \quad \int_0^{\ln 2} \operatorname{ch} x dx, \quad \int_0^1 \frac{4x^2-4}{2x^2+2} dx, \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

3. Határozzuk meg a következő Riemann-integrálok értékét (parciális integrálással):

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/8} 8x \sin(2x) dx, \quad \int_0^1 (x^2+x)e^x dx, \quad \int_{-1}^1 x2^x dx, \quad \int_1^e \ln x dx, \quad \int_0^{\pi} e^x \cos x dx.$$

4. Határozzuk meg a következő Riemann-integrálok értékét (helyettesítéses integrálással):

$$\int_1^2 \frac{540}{(5-2x)^7} dx \quad (u = 5-2x), \quad \int_0^1 xe^{3x^2-1} dx \quad (u = 3x^2-1), \\ \int_0^{3/2} 12\sqrt{9-x^2} dx \quad (x = 3\sin t), \quad \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} 6x^2 \cos(x^3) dx \quad (u = x^3).$$

5. Határozzuk meg a következő Riemann-integrálok értékét:

$$\int_0^2 \frac{x^2-4x}{x^2+4} dx, \quad \int_0^1 \log_2(3x^2+1) dx, \quad \int_0^{\ln 6} e^x \sqrt{e^x+3} dx.$$

6. Határozzuk meg a következő improprius integrálok értékét:

$$\int_1^{\infty} \frac{4}{x^3} dx, \quad \int_0^{\infty} 6^{1-2x} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx, \quad \int_0^1 \ln x dx.$$

7. Meghatározandó az

$$f(x) = 7 - x \quad \text{és} \quad g(x) = \frac{10}{x} \quad (x > 0)$$

függvények grafikonjai által határolt (közrezárt) síktartomány területe.

8. (a) Határozzuk meg az  $r$  sugarú kör területét és kerületét!  
(b) Határozzuk meg az  $r$  sugarú gömb térfogatát és felszínét!