

Differenciálszámítás gyakorló feladatok

1. Meghatározandó

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x}{(x-7)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2^x}{3^x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9}, \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

2. Meghatározandó $\varphi'(x)$, ha

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 4x^5 - 5x^4 \quad (x \in \mathbb{R}), & \varphi(x) &= (x+2)^{10} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \varphi(x) &= (x^2-3)^4 \quad (x \in \mathbb{R}), & \varphi(x) &= 3x + \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ \varphi(x) &= \frac{1}{1-x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}), & \varphi(x) &= \frac{5}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ \varphi(x) &= \frac{6x}{x^2+4} \quad (x \in \mathbb{R}), & \varphi(x) &= \frac{2x}{(1-x)^4} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}), \\ \varphi(x) &= \sqrt[3]{x^2} \quad (x > 0), & \varphi(x) &= \sqrt{3x-6} \quad (x > 2), \\ \varphi(x) &= \frac{5}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R}), & \varphi(x) &= \sqrt[4]{9-x^2} \quad (-3 < x < 3), \\ \varphi(x) &= e^{x+1} - 5^x \quad (x \in \mathbb{R}), & \varphi(x) &= 3^{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \varphi(x) &= \sin(3x+\pi) \quad (x \in \mathbb{R}), & \varphi(x) &= \frac{1-\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}(x)} \quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right), \\ \varphi(x) &= \ln(x+e^x) \quad (x > 0), & \varphi(x) &= \arcsin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

3. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényekre vonatkozóan:

$$f(x) = x^3 e^{-x}, \quad g(x) = x^4 + 8x^3 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad h(x) = \frac{x^2-9}{x-5} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}).$$

Például az f függvény vizsgálata a következő lépésekből áll:

- (a) Meghatározandó $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (b) Számítsuk ki $f'(x)$ és $f''(x)$ képletét!
- (c) Az f' és f'' , függvények zérushelyei által kijelölt részintervallumokon vizsgáljuk, hogy f növekvő vagy csökkenő, konvex vagy konkáv! Határozzuk meg f lokális szélsőérték-helyeit és inflexiós pontjait!
- (d) Vázlatosan ábrázoljuk az f függvényt!
- (e) Határozzuk meg az f függvény R_f érték-készletét!

Megjegyzés: A h függvény esetében több határértéket kell meghatározni, továbbá aszimptotá(ka)t is kereshetünk.

4. Meghatározandó

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{\operatorname{sh}(4x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 8^{-x}}{4^x - 4^{-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2^x} \\ \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \sin x}{\ln(1+x^2)}, \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x). \end{aligned}$$