

Tájékoztató a
Differenciál- és integrálszámítás
tárgy 2019/2020. tanév II. félévi levelezős kurzusairól és számonkéréséről

Az előadások és gyakorlatok időpontja, tematikája

Előadó és gyakorlatvezető: Boros Zoltán

— *e-mail:* zboros@science.unideb.hu

Az előadás kódja: TMOE0207_L, *féléves óraszám:* 15, *kreditérték:* 4.

A gyakorlat kódja: TMOG0207_L, *féléves óraszám:* 15, *kreditérték:* 3.

A konzultációk helyszíne: Matematikai Épület M 317 tanterem.

- február 14. péntek 16.00–20.00:** Függvény-határérték fogalma, kapcsolata a folytonossággal. Átviteli elv. Valós értékű függvények határértékének kapcsolata a műveletekkel és a rendezéssel. További határérték-fogalmak valós függvényekre: egyoldali határértékek, végtelenben vett határértékek, végtelen határértékek. Az átviteli elv ezekhez illeszkedő változatai. Szakadási helyek osztályozása. Monoton függvények határérték-tulajdonságai.
- február 15. szombat 13.00–19.00:** Valós függvények differenciálhányadosa. Lineáris approximáció. Differenciálhatóság és folytonosság. Deriválási szabályok alapműveletekre. Az összetett függvény deriváltja. Az inverz függvény deriváltja. Hatványsor összegfüggvényének differenciálhatósága.
- február 29. szombat 8.00–14.00:** Valós differenciálható függvények vizsgálata (I. rész: szélsőérték-helyek, középérték-tételek, monotonitás, L'Hospital-szabály). Valós differenciálható függvények vizsgálata (II. rész: konvexitás). Az elemi függvények és differenciálhányadosaik. Egyes elemi függvények (hatványok, exponenciális és trigonometrikus függvények, valamint inverzeik) vizsgálata. A π bevezetése. Valós függvények magasabb rendű deriváltjai, Leibniz-szabály, Taylor-tétel, a lokális szélsőérték elegendő feltétele.
- március 14. szombat 8.00–12.00:** Primitív függvény, határozatlan integrál. Integrálási szabályok (linearitás; parciális és helyettesítéses integrálás). Integrálási módszerek. A racionális törtfüggvények integrálása (parciális törtek). Racionalizáló helyettesítések.
- március 21. szombat 8.00–14.00:** A Riemann-integrál fogalma. A Newton–Leibniz-formula. A Riemann-integrálhatóság Riemann-kritériuma. Folytonos illetve monoton függvények integrálhatósága. A Riemann-integrál intervallum-additivitása. Korlátos, véges sok pont kivételével folytonos függvény integrálhatósága. *A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma. Integrálható függvények folytonos transzformáltjai integrálhatók.** Az integrál linearitása. Egyenlőtlenségek, középérték-tételek Riemann-integrálra. Az integrál, mint a felső határ függvénye. Parciális és helyettesítéses integrálás. Improprius-integrálok. Improprius-integrálok konvergenciájának elegendő feltételei. $\sum f(n)$ és $\int_1^\infty f$ konvergenciája pozitív, csökkenő f függvényre.
- április 24. péntek 15.00–19.00:** Zárthelyi dolgozat. Az integrál alkalmazásai (ívhossz; görbe alatti terület; forgástestek felszíne, térfogata). A trigonometrikus függvények geometriai interpretációja. Függvénysorozatok és -sorok tagonkénti integrálhatósága és differenciálhatósága.

A felkészüléshez ajánlott jegyzetek

A gyakorlatokra és a vizsgára legegyszerűbben minden hallgató az előadásokon és a gyakorlatokon készített saját jegyzeteiből készülhet fel. Ezek kiegészítésére javasoltak az alábbiak:

- [BM-Ap] Bessenyei Mihály: Analízis Példatár (DE Mat. Int., 2014)
<http://math.unideb.hu/media/bessenyei-mihaly/downloads/analex.pdf>
- [L-A1] Lajkó Károly: Analízis I. (KLTE Mat. és Inf. Int., 1998)
- [L-A2] Lajkó Károly: Analízis II. (KLTE Mat. és Inf. Int., 1999)
- [L-K1] Lajkó Károly: Kalkulus I. (DE Mat. Int., 2003)
- [L-K1p] Lajkó Károly: Kalkulus I. példatár (DE Inf. Int., 2004)
- [L-K2] Lajkó Károly: Kalkulus II. (DE Mat. Int., 2005)
- [L-K2p] Lajkó Károly: Kalkulus II. példatár (DE Inf. Int., 2004)
- [Sze] Székelyhidi László: Differenciál- és integrálszámítás [*A felsőbb analízis útjain*] (Palotadoktor Bt., 2009.)

Dr. Lajkó Károly felsorolt jegyzetei elektronikus formában elérhetők a <http://zeus.nyf.hu/~mattan/faliujsag/lajko/> web-oldalon.

További ajánlott irodalom:

- [Fis] Emanuel Fischer: *Intermediate Real Analysis*. Springer-Verlag, New York ◦ Heidelberg ◦ Berlin, 1983.
- [Rud] Walter Rudin: *A matematikai analízis alapjai*. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978.

Differenciál- és integrálszámítás

Zárthelyi mintadolgozat (április 24.)

Az alábbi feladatok összpontszáma 30, megoldási idő 120 perc. Tankönyv, jegyzet nem használható.
Értékelés:

0 — 11	pont	...	1
12 — 15	pont	...	2
16 — 20	pont	...	3
21 — 25	pont	...	4
26 — 30(+)	pont	...	5

FELADATOK

1. Meghatározandó

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 2x} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}}{1 - x^3}.$$

(1+1=2 pont)

2. Legyen

$$g(x) = \sqrt{1 + x^4}, \quad h(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1 + x^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Meghatározandók a g' és h' deriváltfüggvények. (2+3=5 pont)

3. Legyen

$$f(x) = x^3 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Végezzük el az f függvény teljes vizsgálatát a következő szempontok szerint: zérushelyek (illetve előjelek); határértékek ($+\infty$ -ben, $-\infty$ -ben); az első és második derivált meghatározása; a függvény monoton szakaszainak és lokális szélsőérték-helyeinek meghatározása; a függvény konvex/konkáv szakaszainak és inflexiós helyeinek meghatározása; vázlatos ábrázolás; az érték-készlet meghatározása. (8 pont)

4. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

$$\int \frac{x - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int (3^{2x} - 2^{3x}) dx \quad \text{és} \quad \int \frac{1}{x \ln(x)} dx.$$

(1+2+2=5 pont)

5. Határozzuk meg az alábbi Riemann-integrálokat:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx, \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx \quad \text{és} \quad \int_0^\pi x \sin(x) dx.$$

(2+3+3=8 pont)

6. Határozzuk meg az alábbi improprius-integrált:

$$\int_1^{+\infty} \frac{6}{x^3} dx.$$

(2 pont)

7. *Szorgalmi feladat:* Legyen

$$f(x) = x^2 \sin(2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Meghatározandó $f^{(2020)}(x)$ (tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén). (3 pont)

8. *Szorgalmi feladat:* Igazolja, hogy minden $x, y \in]0, +\infty[$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$\log_2((1-t)x + ty) \geq (1-t) \log_2 x + t \log_2 y$$

teljesül!

(3 pont)

9. *Szorgalmi feladat:* Kiszámítandó

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)} dx.$$

(4 pont)

További gyakorló feladatok

1. Differenciálható-e a $\varphi(x) = \sqrt{|x|^3}$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény az $x_0 = 0$ pontban?

2. Legyen

$$F(x) = \frac{x(x+1)}{x^2+1}, \quad G(x) = \operatorname{arctg}(x^3) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Meghatározandók az F' és G' deriváltfüggvények.

3. Meghatározandó

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3^x - 3^{-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2^x} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg}(x) \right).$$

4. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

$$\int x \sin(x^2 + \pi) dx, \quad \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx, \quad \int \arcsin(x) dx \quad \text{és} \quad \int x^2 \operatorname{ch}(5x) dx.$$

5. Határozzuk meg az alábbi Riemann-integrálokat:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2(x)} dx, \quad \int_1^e \frac{1}{x} dx \quad \text{és} \quad \int_0^\pi \sin^3(x) dx.$$

6. Határozzuk meg az alábbi improprius-integrálokat:

$$\int_0^{+\infty} 3^{-x} dx \quad \text{és} \quad \int_0^1 x \ln(x) dx.$$

7. Az

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in [1, +\infty[)$$

függvény grafikonját a x tengely körül elforgatva kapunk egy nem korlátos forgástestet. Igazoljuk, hogy ennek a forgástestnek a térfogata véges (tehát adott térfogatú gyurmából tetszőlegesen hosszú darabja elkészíthető), de a felszíne végtelen (így pl. nem tudjuk lefesteni)! (4 pont)

Az elméleti vizsga teljesítése:

A kollokvium szóbeli, tételhúzással, írásbeli felkészüléssel. A tételsor ezen tájékoztató utolsó oldalán található. A tétel kidolgozása során a bizonyítások leírására vagy felvázolására (majd részletesebb szóbeli ismertetésére) is törekedjenek! Természetesen a hosszabb, összetettebb bizonyítások ismerete csak a jeles illetve (részben) a jó érdemjegy megszerzéséhez követelhető meg. A vizsga során a felkészültség minél pontosabb felmérése érdekében a kihúzott tétel áttekintése mellett a tananyag más részeiből (a többi tétel anyagából) is kapnak kérdéseket (fogalmakra, alapvető tételekre vonatkozóan). A felkészülés folyamán különösen ügyeljenek az alább felsorolt alapvető fogalmak (definíciók) illetve tételek pontos megtanulására, mivel ezek hibátlan ismertetése (a kihúzott vizsgatétel témakörében illetve a vizsga során feltett kérdésre válaszolva) elengedhetetlen a kollokvium sikeréhez!

Alapvető fogalmak és tételek

Legalapvetőbb definíciók:

Függvény határértéke.

Függvény differenciálhatósága, differenciálhányadosa (deriváltja).

Függvény lokális minimuma, maximuma.

Primitív függvény.

Függvény Riemann-integrálhatósága, Riemann-integrálja (beleértve a szükséges segédfogalmakat és állításokat: beosztások, alsó és felső integrálközelítő összegek illetve összehasonlításuk, alsó és felső Darboux-integrálok).

További alapvető definíciók:

Határérték-fogalmak valós függvényekre.

Magasabb rendben (n -szer) differenciálható függvény (pontban, intervallumon).

Konvex (konkáv) függvény; inflexiós pont.

Integrálfüggvény (az integrál, mint a felső határ függvénye).

Alaptételek:

Átviteli elv függvény-határértékre.

Folytonosság és határérték.

Elemi függvények deriváltfüggvényei.

Deriválási szabályok (alpműveletekre, összetett függvényre, inverz függvényre).

A differenciálszámítás középérték-tételei (Rolle, Lagrange, Cauchy féle).

Alapintegrálok.

Integrálási szabályok (linearitás, parciális és helyettesítéses integrálás) határozatlan illetve határozott integrálra.

Newton–Leibniz-formula.

Integrálfüggvény (mint a felső határ függvénye) deriválása.

Differenciál- és integrálszámítás

VIZSGATÉTELEK

1. Függvény-határérték fogalma, kapcsolata a folytonossággal. Átviteli elv. Valós értékű függvények határértékének kapcsolata a műveletekkel és a rendezéssel.
2. További határérték-fogalmak valós függvényekre: egyoldali határértékek, végtelenben vett határértékek, végtelen határértékek. Szakadási helyek osztályozása. Monoton függvények határérték-tulajdonságai.
3. Valós függvények differenciálhányadosa. Lineáris approximáció. Differenciálhatóság és folytonosság.
4. Differenciálhatóság és műveletek (alpműveletek, az összetett függvény deriváltja). A valós változós függvény inverzének deriváltja.
5. Hatványsorok differenciálhatósága. Az elemi függvények deriválása.
6. A differenciálszámítás középérték-tételei. L'Hospital-szabály.
7. Valós differenciálható függvények vizsgálata (szélsőérték-helyek, monotonitás, konvexitás).
8. Valós függvények magasabb rendű deriváltjai, Leibniz-szabály, Taylor-tétel, a lokális szélsőérték elegendő feltétele.
9. Primitív függvény, határozatlan integrál. Integrálási szabályok.
10. Racionális törtfüggvények integrálása.
11. A Riemann-integrál fogalma. Az integrál kiszámítása: Newton–Leibniz-formula.
12. A Riemann-integrálhatóság Riemann-kritériuma. Az integrálhatóság elegendő feltételei. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma.*
13. A Riemann-integrál műveleti tulajdonságai. Egyenlőtlenségek, középérték-tételek Riemann-integrálra.
14. Az integrál intervallum-additivitása. Az integrál, mint a felső határ függvénye. Parciális és helyettesítéses integrálás.
15. Impropius-integrálok.
16. Függvénysorozatok és -sorok tagonkénti integrálhatósága és differenciálhatósága.
17. Az integrál alkalmazásai (görbe alatti terület; ívhossz; forgástestek felszíne, térfogata).