

# Többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása (2–3. előadás)

Boros Zoltán

2019. február 19–26.

## 1. Vektorváltozós függvények differenciálhatósága és iránymenti deriváltjai

A továbbiakban  $D \subset \mathbb{R}^n$  nyílt.

### 1.1. Differenciálhatóság fogalma

**1.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenciálható az  $x_0 \in D$  pontban, ha létezik  $A \in \overbrace{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}^{\approx \mathbb{R}^{m \times n}}$  úgy, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0. \quad (1)$$

Ekkor az  $f'(x_0) = A$  lineáris leképezést (avagy mátrixot) az  $f$  függvény  $x_0$  pontbeli differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük.

**1.2. TÉTEL. [Lineáris approximálhatóság]:** Ha  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  és  $x_0 \in D$ , akkor az alábbi feltételek ekvivalensek:

(a)  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban;

(b)  $\exists A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  és  $\exists r : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  úgy, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{\|x - x_0\|} = 0 \quad \text{és} \quad f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + r(x) \quad (x \in D);$$

(c)  $\exists A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  és  $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  úgy, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0 \quad \text{és} \quad f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \|x - x_0\|\omega(x) \quad (x \in D).$$

Továbbá (a)  $\implies$  (b)-ben és (c)-ben  $A = f'(x_0)$ .

BIZONYÍTÁS. A definíció (és a következő megjegyzés) alapján nyilvánvaló.  $\square$

**1.3. Megjegyzés.** Ha  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x_0 \in D$  és az  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mátrix  $j$ -edik sorvektora  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), akkor

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} &= 0 \in \mathbb{R} && \iff \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} [f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)] &= 0 \in \mathbb{R}^m && \iff \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, m\} : \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} [f_j(x) - f_j(x_0) - A_j(x - x_0)] &= 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tehát  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban  $\iff \forall j \in \{1, 2, \dots, m\} : f_j$  differenciálható  $x_0$ -ban és

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ f'_2(x_0) \\ \vdots \\ f'_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

**1.4. TÉTEL.** Ha  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenciálható az  $x_0 \in D$  pontban, akkor  $f$  folytonos  $x_0$ -ban.

BIZONYÍTÁS. Mivel  $f$  lineárisan approximálható, a (c)-beli  $A$  és  $\omega$  választásával

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &= \|A(x - x_0) + \|x - x_0\|\omega(x)\| \leq \\ &\leq \|A(x - x_0)\| + \|\|x - x_0\|\omega(x)\| \leq \|A\|\|x - x_0\| + \|x - x_0\| \cdot \|\omega(x)\| \\ &\text{ezért } \lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0. \end{aligned}$$

$\square$

## 1.2. Irány menti és parciális derivált

**1.5. Definíció.** Legyen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x_0 \in D$  és  $e \in \mathbb{R}^n$  ( $\|e\| = 1$ ). A

$$D_e f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + te) - f(x_0))$$

határértéket, ha létezik, az  $f$  függvény  $x_0$ -beli  $e$  irány menti deriváltjának nevezzük.

**1.6. Megjegyzés.** Ha  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum úgy, hogy  $0 \in I^\circ$  és  $\forall t \in I : x_0 + te \in D$ , valamint

$$\varphi(t) = f(x_0 + te) \quad (t \in I), \quad \text{akkor} \quad D_e f(x_0) = \varphi'(0).$$

**1.7. TÉTEL.** Ha  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenciálható az  $x_0 \in D$  pontban, akkor minden  $e \in \mathbb{R}^n$  esetén létezik  $D_e f(x_0)$  és

$$D_e f(x_0) = f'(x_0) \cdot e.$$

**BIZONYÍTÁS.** A lineáris approximálhatóság (c) alakja szerint

$$\frac{1}{t} (f(x_0 + te) - f(x_0)) = \frac{1}{t} [A(te) + \|te\| \cdot \omega(x_0 + te)] =$$

$$A(e) + \underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\text{sgn}(t) \in \{-1, 1\}} \|e\| \cdot \underbrace{\omega(x_0 + te)}_{\rightarrow \omega(x_0)=0},$$

tehát  $D_e f(x_0) = A \cdot e = f'(x_0) \cdot e$ . □

**1.8. Definíció.** Ha  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x_0 \in D$  és  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , ahol az 1, az  $i$ -edik pozícióban van, akkor a

$$D_i f_j(x_0) = D_{e_i} f_j(x_0)$$

valós számot, ha létezik az  $f$  függvény  $j$ -edik koordináta-függvénye  $x_0$  pontbeli  $i$ -edik (változó szerinti) parciális deriváltjának nevezzük ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ).

**1.9. Megjegyzés.** Ha  $I \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallum úgy, hogy  $x_{0,i} \in I$  és  $\forall t \in I : (x_{0,1}, \dots, x_{0,i-1}, t, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n}) \in D$ , valamint

$$\varphi(t) = f_j(x_{0,1}, \dots, x_{0,i-1}, t, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n}) \quad (t \in I),$$

akkor  $D_i f_j(x_0) = \varphi'(x_{0,i})$ .

A(z) 1.9. megjegyzés szerint a parciális deriváltak egyváltozós, valós értékű függvények deriváltjaként számolhatók. A(z) 1.8. definíció és a(z) 1.7. tétel alábbi következménye azt mutatja, hogy az előbbieket szerint az egyváltozós kalkulus eszközeivel számítható parciális deriváltak megadják a vektorváltozós, vektorértékű függvény adott pontbeli deriváltjának mátrix reprezentációját a természetes bázisokra nézve. Ez egyébként igazolja a derivált egyértelműségét is.

**1.10. TÉTEL.** Ha  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenciálható az  $x_0 \in D$  pontban, akkor  $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\} : \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \text{létezik } D_i f_j(x_0) \in \mathbb{R}$  és

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & D_2 f_1(x_0) & \dots & D_n f_1(x_0) \\ D_1 f_2(x_0) & D_2 f_2(x_0) & \dots & D_n f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x_0) & D_2 f_m(x_0) & \dots & D_n f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

### 1.3. A differenciálhatóság elegendő feltétele

**1.11. TÉTEL.** Legyen  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\delta > 0$ . Ha  $f : K(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  úgy, hogy  $\forall x \in K(x_0, \delta) : \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \exists D_i f(x)$ , akkor  $\forall h \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|h\| < \delta$  esetén  $\exists c_1, c_2, \dots, c_n \in K(x_0, \delta)$  :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n D_i f(c_i) h_i \quad (2)$$

(ahol  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ ).

BIZONYÍTÁS. Legyen  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  és

$$K_i = \{ (x_{0,1} + h_1, \dots, x_{0,i-1} + h_{i-1}, t, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n}) : t \in I_i \},$$

ahol  $I_i = [x_{0,i}, x_{0,i} + h_i]$ , ha  $h_i > 0$ , illetve  $I_i = [x_{0,i} + h_i, x_{0,i}]$ , ha  $h_i < 0$ , valamint

$$\varphi_i(t) = f(x_{0,1} + h_1, \dots, x_{0,i-1} + h_{i-1}, t, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n}) \quad (t \in I_i).$$

A Lagrange-féle középérték-tétel szerint  $\exists t_i \in I_i^\circ : \varphi_i(x_{0,i} + h_i) - \varphi_i(x_{0,i}) = \varphi_i'(t_i) h_i$  és

$$\varphi_i'(t_i) = D_i f \underbrace{(x_{0,1} + h_1, \dots, x_{0,i-1} + h_{i-1}, t_i, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n})}_{c_i} = D_i f(c_i)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ), tehát

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \sum_{i=1}^n \left( f(x_{0,1} + h_1, \dots, x_{0,i-1} + h_{i-1}, x_{0,i} + h_i, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n}) \right. \\ &\quad \left. - f(x_{0,1} + h_1, \dots, x_{0,i-1} + h_{i-1}, x_{0,i}, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\varphi_i(x_{0,i} + h_i) - \varphi_i(x_{0,i})) = \sum_{i=1}^n D_i f(c_i) h_i. \end{aligned}$$

□

**1.12. TÉTEL.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^n$  nyílt. Tegyük fel, hogy az  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény minden koordináta függvényének minden parciális deriváltja létezik az  $x_0 \in D$  pont egy környezetében.

(a) Ha a parciális deriváltak korlátosak  $x_0$  egy környezetében, akkor  $f$  folytonos  $x_0$ -ban.

(b) Ha a parciális deriváltak folytonosak  $x_0$ -ban, akkor  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban.

BIZONYÍTÁS. Mindkét állítást elengedő  $m = 1$  esetre igazolni, mert

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \left( \begin{array}{c} \text{folytonos} \\ \text{differenciálható} \end{array} \right) x_0\text{-ban} \iff \forall j \in \{1, \dots, m\} : f_j \left( \begin{array}{c} \text{folytonos} \\ \text{differenciálható} \end{array} \right)$$

$x_0$ -ban.

Legyen  $r > 0$  úgy, hogy  $K(x_0, r) \subset D$  és  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  minden parciális deriváltja létezik  $K(x_0, r)$  pontjaiban.

- (a) Tegyük fel, hogy  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \forall x \in K(x_0, r) : |D_i f(x)| \leq M \in \mathbb{R}$ . Ekkor  $h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < r$  esetén az előző tétel szerint  $\exists c_i \in K(x_0, r)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) úgy, hogy

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| = \left| \sum_{i=1}^n D_i f(c_i) h_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |D_i f(c_i)| \cdot |h_i| \leq M \|h\|_1$$

- (b) Ugyancsak az előző tétel és bizonyítást felhasználva  $h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < r$  esetén  $\exists c_i \in K(x_0, r) : \|c_i - x_0\|_\infty \leq \|h\|_\infty$  ( $i = 1, \dots, n$ ) és

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \sum_{i=1}^n D_i f(c_i) h_i = \sum_{i=1}^n D_i f(x_0) h_i + \sum_{i=1}^n (D_i f(c_i) - D_i f(x_0)) h_i = \\ &= A \cdot h + \omega(x_0 + h) \cdot \|h\|, \end{aligned}$$

ahol  $A = (D_1 f(x_0) \ D_2 f(x_0) \ \dots \ D_n f(x_0)) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \approx (L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$  és

$$\omega(x_0 + h) = \begin{cases} \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=1}^n (D_i f(c_i) - D_i f(x_0)) h_i, & \text{ha } h \neq 0 \ [ \in \mathbb{R}^n ], \\ 0, & \text{ha } h = 0. \end{cases}$$

Mivel  $D_i f$  folytonos  $x_0$ -ban,  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta \in ]0, r] : x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\|_\infty < \delta$  esetén  $D_i f(x)$  léteik és  $|D_i f(x) - D_i f(x_0)| < \varepsilon$ , ezért  $\|h\|_\infty < \delta$  esetén

$$|\omega(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{\|h\|} \|h\|_1 < n\varepsilon, \quad \text{tehát } \lim_{h \rightarrow 0} \omega(x_0 + h) = 0.$$

□

**1.13. Megjegyzés.**  $f'$  a  $D$  minden pontjában létezik és  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  folytonos

$$\iff \forall j \in \{1, \dots, m\} : \forall i \in \{1, \dots, n\} : \exists D_i f_j(x) \text{ és } D_i f_j : D \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ folytonos.}$$

A továbbiakban ezen ekvivalens tulajdonságokra úgy fogunk hivatkozni, hogy

$$\boxed{f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ folytonosan differenciálható.}}$$

## 2. Differenciálási szabályok

**2.1. TÉTEL.** [Összetett függvény differenciálhatósága]: Legyen  $k, n, m \in \mathbb{N}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^k$  nyílt,  $E \subset \mathbb{R}^n$  nyílt,  $g : D \rightarrow E$  differenciálható az  $x_0 \in D$  pontban,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenciálható az  $y_0 = g(x_0)$  pontban és

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad (x \in D).$$

Ekkor  $F$  differenciálható az  $x_0$  pontban és

$$F'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \quad (3)$$

**BIZONYÍTÁS.** A feltevés szerint  $A = f'(y_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B = g'(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times k}$  [tehát  $A \cdot B$  létezik és  $A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ], továbbá léteznek

$$\omega_f : E \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \omega_g : D \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ úgy, hogy}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \omega_f(y) = \omega_f(y_0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \omega_g(x) = \omega_g(x_0) = 0, \text{ továbbá}$$

$$\forall y \in E : f(y) - f(y_0) = A(y - y_0) + \|y - y_0\| \omega_f(y) \text{ és}$$

$$\forall x \in D : g(x) - g(x_0) = B(x - x_0) + \|x - x_0\| \omega_g(x).$$

Ezért

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= f(g(x)) - \overbrace{f(g(x_0))}^{y_0} = A(g(x) - g(x_0)) + \|g(x) - g(x_0)\| \omega_f(g(x)) \\ &= A[B(x - x_0) + \|x - x_0\| \omega_g(x)] + \|B(x - x_0) + \|x - x_0\| \omega_g(x)\| \omega_f(g(x)) \\ &= A \cdot B(x - x_0) + \|x - x_0\| \omega(x) \quad (x \in D), \end{aligned}$$

ahol  $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  úgy, hogy  $\omega(x_0) = 0$  és  $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$  :

$$\omega(x) = A \cdot \omega_g(x) + \left\| \frac{1}{\|x - x_0\|} \cdot B(x - x_0) + \omega_g(x) \right\| \cdot \omega_f(g(x)),$$

$$\text{valamint } \lim_{x \rightarrow x_0} A \cdot \omega_g(x) = A \cdot \omega_g(x_0) = A \cdot 0 = 0,$$

$$\left\| \frac{1}{\|x - x_0\|} B(x - x_0) \right\| \leq \frac{1}{\|x - x_0\|} \cdot \|B\| \cdot \|x - x_0\| = \|B\|$$

és  $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_g(x) = 0$ , ezért  $\exists \delta > 0$  :  $\|x - x_0\| \leq \delta$  esetén

$$\left\| \frac{1}{\|x - x_0\|} \cdot B(x - x_0) + \omega_g(x) \right\| \leq \|B\| + \|\omega_g(x)\| \leq \|B\| + 1,$$

illetve  $g$  folytonos  $x_0$ -ban, mert differenciálható  $x_0$ -ban és  $\omega_f$  folytonos  $y_0 = g(x_0)$ -ban, így  $\omega_f \circ g$  folytonos  $x_0$ -ban, ezért

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_f(g(x)) = \omega_f(g(x_0)) = 0, \text{ tehát } \lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^m).$$

□

## 2.2. Következmény. (lánc-szabály)

Az előző tétel feltétele és jelölései mellett

$$\begin{aligned} & D_i F_j(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0,k}) = \\ & = \sum_{l=1}^n D_l f_j(g_1(x_{01}, \dots, x_{0,k}), g_2(x_{01}, \dots, x_{0,k}), \dots, g_n(x_{01}, \dots, x_{0,k})) \cdot D_l g_l(x_{01}, \dots, x_{0,k}) \\ & \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

**Speciális eset:**  $k = m = 1$  esetén

$$F'(x_0) = \sum_{l=1}^n D_l f(g_1(x_0), g_2(x_0), \dots, g_n(x_0)) \cdot g'_l(x_0).$$

**2.3. TÉTEL.** Ha  $D \subset \mathbb{R}^n$  nyílt és az  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \lambda : D \rightarrow \mathbb{R}$  függvények differenciálhatóak az  $x_0 \in D$  pontban, akkor  $f+g, \langle f, g \rangle, \lambda f$ , illetve  $\lambda(x) \neq 0$  ( $x \in D$ ) esetén  $\frac{1}{\lambda}f$  is differenciálható  $x_0$ -ban, továbbá

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0); \\ (\lambda f)'(x_0) &= f(x_0) \cdot \lambda'(x_0) + \lambda(x_0) \cdot f'(x_0); \\ \left(\frac{1}{\lambda}f\right)'(x_0) &= \frac{1}{[\lambda(x_0)]^2} \cdot [\lambda(x_0)f'(x_0) - f(x_0) \cdot \lambda'(x_0)]; \\ \langle f, g \rangle'(x_0) &= [g(x_0)]^T f'(x_0) + [f(x_0)]^T g'(x_0), \quad \text{azaz} \\ \left(\sum_{j=1}^m f_j g_j\right)'(x_0) &= \sum_{j=1}^m [g_j(x_0) f'_j(x_0) + f_j(x_0) g'_j(x_0)]. \end{aligned}$$

**BIZONYÍTÁS.** A szabályok igazolhatók közvetlenül a definíció (illetve a lineáris approximálhatóság) alapján, vagy visszavezethetők az előző tételre. Ez, utóbbi módszer céljából legyen  $\Phi : \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  úgy, hogy

$$\Phi(x, y) = x + y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m),$$

$\varphi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  úgy, hogy

$$\varphi(x, \lambda) = \lambda x \quad ((x, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}),$$

$\psi : \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^m$  úgy, hogy

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda}x \quad ((x, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})),$$

illetve  $\Omega : \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  úgy, hogy

$$\Omega(x, y) = \langle x, y \rangle \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m).$$

Ekkor

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$(f + g)'(x_0) = [\Phi \circ (f, g)]'(x_0) = \Phi'(f(x_0), g(x_0)) \cdot \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ g'(x_0) \end{pmatrix} = f'(x_0) + g'(x_0);$$

$$\varphi'(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & x_m \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(x_0) &= (\varphi \circ (f, \lambda))'(x_0) = \varphi'(f(x_0), \lambda(x_0)) \cdot \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ \lambda'(x_0) \end{pmatrix} = \\ &= \lambda(x_0) \cdot E_{m \times m} f'(x_0) + f(x_0) \cdot \lambda'(x_0); \end{aligned}$$

$$\psi'(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -x_1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & -x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -x_m \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\lambda} f\right)'(x_0) &= (\psi \circ (f, \lambda))'(x_0) = \psi'(f(x_0), \lambda(x_0)) \cdot \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ \lambda'(x_0) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(\lambda(x_0))^2} [\lambda(x_0) \cdot E_{m \times m} f'(x_0) - f(x_0) \cdot \lambda'(x_0)]; \end{aligned}$$

$$\Omega'(x, y) = (y^T, x^T) \implies$$

$$\langle f, g \rangle'(x_0) = \Omega'(f(x_0), g(x_0)) \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ g'(x_0) \end{pmatrix} = [g(x_0)]^T f'(x_0) + [f(x_0)]^T g'(x_0).$$

□

### 3. Közéérték-tétel és következménye

**3.1. TÉTEL. (Lagrange):** Ha  $D \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz és  $x, y \in D$  úgy, hogy  $x \neq y$ , valamint  $D$  tartalmazza az  $x$  és  $y$  pontokat összekötő  $I(x, y)$  szakaszt, továbbá az  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható, akkor  $\exists u \in I(x, y) \setminus \{x, y\}$ :

$$f(y) - f(x) = f'(u)(y - x).$$

**BIZONYÍTÁS.** Legyen  $\varphi(t) = f[\overbrace{(1-t)x + ty}^{\in I(x,y)}]$  ( $t \in [0, 1]$ ). Ekkor  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható és

$$\varphi'(t) = f'[(1-t)x + ty] \cdot (y - x) \quad (t \in [0, 1]).$$

Az egyváltozós Lagrange-féle középérték-tételből következik, hogy  $\exists \xi \in ]0, 1[$  úgy, hogy

$$f(y) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)(1-0) = \varphi'(\xi) = f'[(1-\xi)x + \xi y](y-x) = f'(u)(y-x),$$

ahol  $u = (1 - \xi)x + \xi y \in I(x, y) \setminus \{x, y\}$ . □

**3.2. Következmény.** Ha  $D \subset \mathbb{R}^n$  nyílt és  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  folytonosan differenciálható, akkor minden  $K \subset D$  kompakt, konvex halmazhoz  $\exists L_K \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $\forall x, y \in K$  :

$$\|f(y) - f(x)\| \leq L_K \|x - y\|.$$

[„ $f$  lokálisan Lipschitz.”]

**BIZONYÍTÁS.** Legyen  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Mivel  $K$  kompakt és  $f'_j : D \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$  folytonos, ezért  $f'_j$  korlátos a  $K$  halmazon, azaz létezik  $M_j \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $\forall u \in K$  :  $\|f'_j(u)\| \leq M_j$ , tehát  $\forall x, y \in K$  :

$$|f_j(y) - f_j(x)| = |f'_j(u_j)(y-x)| \leq \|f'_j(u_j)\| \|y-x\| \leq M_j \|y-x\|,$$

tehát

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty \leq \max\{M_1, \dots, M_m\} \|y-x\|,$$

illetve

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \underbrace{\sqrt{m} \cdot \max\{M_1, \dots, M_m\}}_{L_K} \|y-x\| = L_K \|y-x\|.$$

□