

# Bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe

11–12. előadás (2019. november 26., december 3.)

## Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

Boros Zoltán

### 1. Magasabb rendű lineáris (skalár-) differenciálegyenletek

Tekintsük a(z)

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i(t)x^{(n-i)}(t) = b(t) \quad (1)$$

differenciálegyenletet, ahol  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I \subset \mathbb{K}$  nyílt intervallum és  $a_i, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos ( $i = 1, \dots, n$ ). Ehhez  $\tau \in I$  és  $\xi_i \in \mathbb{K}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) esetén az

$$x^{(i-1)}(\tau) = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

kezdeti feltétel rendelhető.

Az (1) differenciálegyenlet homogén megfelelője [„társá”]:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i(t)x^{(n-i)}(t) = 0 \quad (3)$$

**1.1. Megjegyzés.** Az átviteli elv szerint az (1)–(2) Cauchy-feladatnak a(z)

$$\begin{cases} x'_i(t) - x_{i+1}(t) = 0 & (i = 1, \dots, n-1) \\ x'_n(t) + \sum_{i=1}^n a_i(t)x_{n-i+1}(t) = b(t) \end{cases} \quad (4)$$

$$x_i(\tau) = \xi_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték probléma felel meg; ez röviden

$$\begin{cases} \underline{x}'(t) + A(t)\underline{x}(t) = \underline{b}(t) \\ \underline{x}(\tau) = \underline{\xi} \end{cases}$$

alakú, ahol

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & \dots & a_1(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

**1.2. TÉTEL.** Az (1)–(2) Cauchy-feladatnak pontosan egy  $x : I \rightarrow \mathbb{K}$  megoldása van.

BIZONYÍTÁS. Az átviteli elv, az előző megjegyzés és a lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó megfelelő tétel következménye.

**1.3. Állítás.** Ha

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{C}^n(I) : u \text{ megoldása (1)-nek}\} \quad \text{és}$$

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{C}^n(I) : v \text{ megoldása (3)-nak}\},$$

továbbá  $u_0 \in \mathcal{U}$ , akkor

$$\mathcal{U} = u_0 + \mathcal{V}$$

és  $\mathcal{V}$  egy  $n$  dimenziós altere  $\mathcal{C}^n(I)$ -nek ( $\mathbb{K}$  felett).

BIZONYÍTÁS. Hasonló a lineáris differenciálegyenlet-rendszer elméletében felírt analóg állítások igazolásához.

**1.4. Definíció.** A  $\mathcal{V}$  altér egy bázisát (azaz (3)  $n$  db lineárisan független megoldását) a (3) differenciálegyenlet egy alaprendszerének nevezzük.

**1.5. Definíció.** Ha  $\varphi_i \in \mathcal{C}^n(I)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), legyen

$$w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \quad (t \in I).$$

Ezt a  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  függvényrendszer Wronski-determinánsának nevezzük.

**1.6. Állítás.** Ha  $\varphi_i \in \mathcal{C}^n(I)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), akkor a következő feltevések ekvivalensek.

- (a)  $(\varphi_i)_{i=1}^n$  egy alarendszere (3)-nak;
- (b)  $\varphi_i$  megoldása (3)-nak ( $i = 1, \dots, n$ ) és  $\forall t \in I : w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$ ,
- (c)  $\varphi_i$  megoldása (3)-nak ( $i = 1, \dots, n$ ) és  $\exists t_0 \in I : w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t_0) \neq 0$ .

**BIZONYÍTÁS.** Az átviteli elv alapján a lineáris differenciálegyenletrendszer alapmátrixára vonatkozó analóg állításból következik.

**1.7. TÉTEL.** [Liouville-tétel]: Ha  $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{K}$  megoldása (3)-nak ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), akkor  $\forall t \in I :$

$$w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t) = w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(\tau) \cdot \exp \left[ - \int_{\tau}^t a_1(s) ds \right].$$

**BIZONYÍTÁS.** Az Abel–Liouville-tételből kapjuk az átviteli elv (és az 1.1. megjegyzés) alapján.

**1.8. Megjegyzés.** Például  $n = 2$  esetén, ha ismert (3)-nak egy nem nulla megoldása, pl.:  $\varphi$ , akkor a Liouville-tételből elsőrendű egyenletet kapunk egy  $\varphi$ -től lineárisan független  $\psi$  megoldásra:

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \varphi(\tau) & \psi(\tau) \\ \varphi'(\tau) & \psi'(\tau) \end{vmatrix}}_{=1} \cdot \exp \left[ - \int_{\tau}^t a_1(s) ds \right]$$

$$\underbrace{\varphi(t)}_{\text{ismert}} \cdot \psi'(t) - \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{ismert}} \cdot \psi(t) = \underbrace{\exp \left[ - \int_{\tau}^t a_1(s) ds \right]}_{\text{ismert}}.$$

Az állandó(k) variálása:

Legyen  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  a (3) differenciálegyenlet egy alaprendszere, keresendő  $c_k \in C^1(I)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) úgy, hogy

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k(t) \quad (t \in I)$$

megoldása legyen (1)-nek.

Válasszuk a  $c_k$  függvényeket úgy, hogy  $\forall t \in I$  :

$$\sum_{k=1}^n c'_k(t) \varphi_k^{(j)}(t) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n-2) \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^n c'_k(t) \varphi_k^{(n-1)}(t) = b(t)$$

teljesüljön. Ez elérhető, mert lineáris (inhomogén) egyenletrendszer  $[c'_1(t), c'_2(t), \dots, c'_n(t)]$ -re, melynek determinánsa  $w(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$ . Ekkor

$$\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \implies \varphi' = \underbrace{\sum_{k=1}^n c'_k \varphi_k}_0 + \sum_{k=1}^n c_k \varphi'_k \implies$$

$$\varphi'' = \underbrace{\sum_{k=1}^n c'_k \varphi'_k}_0 + \sum_{k=1}^n c_k \varphi''_k \implies \dots$$

$$\varphi^{(n-1)} = \underbrace{\sum_{k=1}^n c'_k \varphi_k^{(n-2)}}_0 + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k^{(n-1)} \implies \varphi^{(n)} = \underbrace{\sum_{k=1}^n c'_k \varphi_k^{(n-1)}}_b + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k^{(n)}$$

így

$$\varphi^{(n)} + \sum_{j=1}^n a_j \varphi^{(n-j)} = b + \sum_{k=1}^n c_k \underbrace{\left[ \varphi_k^{(n)} + \sum_{j=1}^n a_j \varphi_k^{(n-j)} \right]}_0.$$

## 2. Magasabbrendű állandó együtthatós (homogén) lineáris skalár differenciálegyenlet

A megoldandó differenciálegyenlet

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^n a_j \cdot x^{(n-j)}(t) = 0, \quad (6)$$

ahol  $a_j \in \mathbb{K}$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

### 2.1. Definíció. A

$$P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=1}^n a_j \lambda^{n-j} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

polinomot a (6) differenciálegyenlet karakterisztikus polinomjának nevezzük.

**2.2. Megjegyzés.**  $x(t) = e^{\lambda t}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) megoldása (6)-nak  $\iff P(\lambda) = 0$ .

**2.3. Lemma.** Ha  $r \in \mathbb{N}$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  ( $\lambda_i \neq \lambda_j$ , ha  $i \neq j$ ) és  $Q_j$  legfeljebb  $m_j$ -edfokú polinom [ahol  $m_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ] ( $j = 1, \dots, r$ ) úgy, hogy

$$\sum_{j=1}^r Q_j(t) e^{\lambda_j t} = 0 \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (7)$$

akkor

$$Q_j(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

**BIZONYÍTÁS.** Indirekt tegyük fel, hogy  $\exists j_0 \in \{1, 2, \dots, r\} : \exists t_0 \in \mathbb{R} : Q_{j_0}(t_0) \neq 0$ . Legyen  $s$  az „ilyen”  $j_0$  indexek számának minimális értéke.

Ha  $s = 1$ , akkor (7)  $\implies$

$$Q_{j_0}(t) e^{\lambda_{j_0} t} = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \cdot e^{-\lambda_{j_0} t} \implies Q_{j_0}(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

ami ellentmondás.

A továbbiakban az  $s > 1$  esetet tekintjük. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy a (7)-beli előállításban csak  $r = s$  db nem 0 polinom szerepel. Ekkor (7)-ből  $e^{-\lambda_s t}$ -vel szorozva

$$\sum_{j=1}^{s-1} Q_j(t) e^{(\lambda_j - \lambda_s)t} + Q_s(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (8)$$

Ezt  $k > \deg Q_s$  esetén  $k$ -szor deriválva

$$\sum_{j=1}^{s-1} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \cdot \underbrace{Q_j^{(k-l)}(t) \cdot (\lambda_j - \lambda_s)^l \cdot e^{(\lambda_j - \lambda_s)t}}_{Q_{jk}(t) \text{ polinom } ((s-1) \text{ db}), \quad / \cdot e^{\lambda_s t} \implies} = 0 \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{s-1} Q_{jk}(t) e^{\lambda_j t} = 0.$$

Mivel  $Q_{jk}(t)$  főtagja megegyezik  $Q_j(t)$  főtagjának  $(\lambda_j - \lambda_s)^k$ -szorosával, ezek nem azonosan nulla polinomok, ellentétben  $s$  minimális voltával.

A megoldandó differenciálegyenlet

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^n a_j \cdot x^{(n-j)}(t) = 0, \quad (10)$$

ahol  $a_j \in \mathbb{K}$  ( $j = 1, \dots, n$ );  $x^{(0)} = x$ .

**2.4. TÉTEL.** *Ha az (10) lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus polinomjának gyöktényezői alakja*

$$P(\lambda) = \prod_{l=1}^r (\lambda - \lambda_l)^{m_l} \quad (\text{ahol } \lambda_l \in \mathbb{C} [l = 1, \dots, r]; \lambda_k \neq \lambda_l, \text{ ha } k \neq l),$$

akkor a

$$\varphi_{l,k}(t) = t^k e^{\lambda_l t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (l = 1, \dots, r; k = 0, 1, \dots, m_l - 1) \quad (11)$$

függvények a (10) differenciálegyenlet egy alrendszerét alkotják (esetleg csak  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  választással).

BIZONYÍTÁS.

(i)  $\varphi_{lk}$  megoldás:  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  esetén legyen

$$L_t [F(t, \lambda)] = D_1^n F(t, \lambda) + \sum_{j=1}^n a_j D_1^{n-j} F(t, \lambda) \quad (t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} L_t [t^k e^{\lambda t}] &= L_t \left[ \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^k e^{\lambda t} \right] \stackrel{\text{Young}}{=} \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^k [L_t (e^{\lambda t})] = \\ &= \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^k [P(\lambda) e^{\lambda t}] = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} P^{(k-m)}(\lambda) \cdot t^m e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Mivel  $k \in \{0, 1, \dots, m_l - 1\}$  esetén  $\forall s \in \{0, 1, \dots, k\} : P^{(s)}(\lambda_l) = 0$ , ebből

$$L_t [t^k e^{\lambda_l t}] = 0, \quad \text{ha } k \in \{0, 1, \dots, m_l - 1\}.$$

(ii)  $(\varphi_{lk})$  lineárisan független: Ha  $c_{lk} \in \mathbb{C}$   
 $(l = 1, \dots, r; k = 0, 1, \dots, m_l - 1)$  úgy, hogy  $\forall t \in \mathbb{R} :$

$$0 = \sum_{l=1}^r \sum_{k=0}^{m_l-1} c_{lk} \varphi_{lk}(t) = \sum_{l=1}^r \underbrace{\sum_{k=0}^{m_l-1} c_{lk} t^k e^{\lambda_l t}}_{Q_l(t)} = \sum_{l=1}^r Q_l(t) e^{\lambda_l t},$$

akkor a lemma szerint  $\forall l \in \{1, \dots, r\} : \forall t \in \mathbb{R} :$

$$0 = Q_l(t) = \sum_{k=0}^{m_l-1} c_{lk} t^k \implies$$

$$\forall l \in \{1, \dots, r\} : \forall k \in \{0, \dots, m_l - 1\} : c_{lk} = 0.$$

**2.5. Megjegyzés.** Ha  $a_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) és valamely  $l$  indexre

$$\lambda_l = \mu_l + i \cdot \nu_l, \quad \text{ahol } \mu_l \in \mathbb{R}, \nu_l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad [\text{így } \lambda_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}],$$

akkor  $\exists l^* \in \{1, \dots, r\} \setminus \{l\} : \lambda_{l^*} = \mu_l - i \cdot \nu_l$

[azaz  $\nu_{l^*} = -\nu_l$ , tehát  $\lambda_{l^*} = \bar{\lambda}_l$ ],

továbbá  $m_{l^*} = m_l$  és  $0 \leq k \leq m_l - 1$  esetén a

$$\begin{aligned} \varphi_{lk}(t) &= t^k \cdot e^{\lambda_l t} = t^k \cdot e^{\mu_l t} [\cos(\nu_l t) + i \cdot \sin(\nu_l t)], \\ \varphi_{l^*k}(t) &= t^k \cdot e^{\bar{\lambda}_l t} = t^k \cdot e^{\mu_l t} [\cos(\nu_l t) - i \cdot \sin(\nu_l t)] \end{aligned}$$

függvénypár helyett tekinthető a  $\mathbb{C}$  felett ugyanezt a két dimenziós alteret generáló, de valós értékű

$$\psi_{lk}(t) = t^k e^{\mu t} \cos(\nu t), \quad \psi_{l^*k}(t) = t^k e^{\mu t} \sin(\nu t)$$

függvénypár.