Bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe

13. előadás (2019. december 10.)

Variációszámítás

Boros Zoltán

1. Variációszámítás

1.1. Példa. Adott $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta,\ A, B \in [0, +\infty[$. Meghatározandó olyan $x : [\alpha, \beta] \to [0, +\infty[$ folytonosan differenciálható függvény, amelyre $x(\alpha) = A,\ x(\beta) = B$ és (ezen feltételek mellett) az x (grafikonjának) megforgatásával keletkező forgástest felszíne minimális.

A felszín

$$A^2\pi + B^2\pi + 2\pi \int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{1 + (x'(t))^2}\, dt,$$

tehát minimalizálandó

$$f(x) = \int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{1 + (x'(t))^2}\, dt.$$

1.2. Definíció. [Gâteaux:] Legyen X vektortér $\mathbb{R}$ felett, $D \subset X$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \in D$. Az mondjuk, hogy $a \in X$ megengedett irány x-ben f számára, ha $\exists r > 0 : x + \lambda a \in D$ $(\lambda \in]-r, r[)$ és $\exists$

$$\partial_a f(x) := \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda a) - f(x)}{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

Ekkor a $\partial_a f(x)$ számot az f függvény a iránymenti deriváltjának nevezzük az x pontban.

$$A(f, D, x) = \{a \in X \mid a \text{ megnegedett irány } x\text{-ben } f \text{ számára}\}.$$

1.3. Megjegyzés. $a \in A(f, D, X)$, $\varphi_a(\lambda) = f(x + \lambda a) \quad (\lambda \in]-r, r[)$ esetén

$$\varphi_a'(0) = \partial_a f(x).$$

Ezért, ha f-nek helyi szélsőértéke van x-ben, akkor $\partial_a f(x) = 0 \quad [\forall a \in A(f, D, x)]$.

1.4. Lemma. *[Du Bois Reymond Lemma:] Ha $v \in \mathcal{C}([\alpha, \beta])$ úgy, hogy $\forall\, a \in A_1 = \{a \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta]) : a(\alpha) = a(\beta) = 0\}$:*

$$\int_\alpha^\beta v(t)a'(t)\, dt = 0,$$

akkor v konstans.

Bizonyítás. Legyen

$$c = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta v(t)\, dt, \quad a(t) = \int_\alpha^t [v(s) - c]\, ds \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Ekkor $a \in A_1$ és

$$\int_\alpha^\beta [v(t) - c]^2\, dt = \int_\alpha^\beta (v(t) - c)a'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta v(t)a'(t)\, dt - c \int_\alpha^\beta a'(t)\, dt =$$

$$0 - c[a(\beta) - a(\alpha)] = 0 \Longrightarrow v(t) = c \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

1.5. Következmény. *Ha $u, v \in \mathcal{C}([\alpha, \beta])$ úgy, hogy $\forall a \in A_1$:*

$$\int_\alpha^\beta [u(t)a(t) + v(t)a'(t)]\, dt = 0,$$

akkor $v \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta])$ és $v' = u$.

Bizonyítás. Legyen

$$U(t) = \int_\alpha^t u(s)\, ds \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Ekkor $\forall a \in A_1$:

$$0 = \int_\alpha^\beta [U'(t)a(t) + v(t)a'(t)]\, dt = \underbrace{[U(t)a(t)]_\alpha^\beta}_{0} + \int_\alpha^\beta [v(t) - U(t)]\, a'(t)\, dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta [v(t)-U(t)]\,a'(t)\,dt \overset{\text{Du Bois Reymond lemma}}{\Longrightarrow} v-U \text{ konstans } \Longrightarrow$$

$v(t)=U(t)+c \implies v$ differenciálható és $v'(t)=U'(t)=u(t)\ \ (t\in[\alpha,\beta])$.

1.6. TÉTEL. [Euler–Lagrange-tétel:]: *Legyen* $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $F : [\alpha,\beta]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *folytonos úgy, hogy* D_2F *és* D_3F *is (létezik és) folytonos;*

$$\begin{aligned} D &= \{x\in\mathcal{C}^1([\alpha,\beta]) : x(\alpha)=A \text{ és } x(\beta)=B\}, \\ f(x) &= \int_\alpha^\beta F(t,x(t),x'(t))\,dt \quad (x\in D). \end{aligned}$$

Ha f*-nek helyi szélsőértéke van az* $x\in D$ *pontban, akkor* $t\mapsto D_3F(t,x(t),x'(t))$ *differenciálható és*

$$\frac{d}{dt}D_3F(t,x(t),x'(t)) = D_2F(t,x(t),x'(t)) \quad (t\in[\alpha,\beta), \tag{1}$$

ami az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet.

Bizonyítás. $\forall\, x\in D : A_1 \subset A(f,D,x)$, továbbá $\forall\, a\in A_1$:

$$\varphi_a(\lambda) = f(x+\lambda a) = \int_\alpha^\beta F(t,x(t)+\lambda a(t),x'(t)+\lambda a'(t))\,dt, \text{ így}$$

$$\varphi_a'(\lambda) = \int_\alpha^\beta [D_2F(t,x(t)+\lambda a(t),x'(t)+\lambda a'(t))\cdot a(t)+$$

$$+D_3F(t,x(t)+\lambda a(t),x'(t)+\lambda a'(t))\cdot a'(t)]\ dt \Longrightarrow 0=\partial_a f(x)=\varphi_a'(0)=$$

$$=\int_\alpha^\beta [D_2F(t,x(t),x'(t))\cdot a(t)+D_3F(t,x(t),x'(t))a'(t)]\ dt \overset{\text{köv.}}{\Longrightarrow} (1)\ .$$

1.7. Példa. $F(t,x,y)=x\sqrt{1+y^2} \Longrightarrow$
$D_2F(t,x,y)=\sqrt{1+y^2}$, $D_3F(t,x,y)=\frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}$. 1.6. tétel $\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}\right] = \sqrt{1+(x'(t))^2}$$

$$\frac{\left[(x'(t))^2 + x(t)x''(t)\right] \cdot \sqrt{1+(x'(t))^2} - x(t)\cdot x'(t)\cdot \frac{x'(t)\cdot x''(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}}{1+(x'(t))^2} = \sqrt{1+(x'(t))^2}$$

$$\left((x'(t))^2 + x(t)x''(t)\right)\left(1+(x'(t))^2\right) - x(t)(x'(t))^2 \cdot x''(t) = \left(1+(x'(t))^2\right)^2 \implies$$

$$1+(x'(t))^2 = x(t)x''(t) \overset{\text{lsd. gyak.}}{\implies} x(t) = \frac{1}{a}\mathrm{ch}(at+b)$$

a, b úgy választandó, hogy $x(\alpha) = A,\ x(\beta) = B$ legyen...

1.8. TÉTEL. *Legyen* $A, B \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,

$$F : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

folytonos úgy, hogy $D_{1+j}F$ $(j = 1, \ldots, 2n)$ *is (létezik és) folytonos;*

$$\begin{aligned} D &= \{\, x \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta]\,, \mathbb{R}^n) \,:\, x(\alpha) = A \text{ és } x(\beta) = B \,\}, \\ f(x) &= \int_\alpha^\beta F(t, x(t), x'(t))\, dt \quad (x \in D). \end{aligned}$$

Ha f*-nek helyi szélsőértéke van az* $x \in D$ *pontban, akkor*

$$t \mapsto D_{1+n+j}F(t, x(t), x'(t))$$

differenciálható és

$$\frac{d}{dt}D_{1+n+j}F(t, x(t), x'(t)) = D_{1+j}F(t, x(t), x'(t)) \quad (t \in [\alpha, \beta]\ (j = 1, \ldots, n),$$

amit Euler–Lagrange-differenciálegyenleteknek hívunk.