

# Bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe

8–9. előadás (2019. november 5., 12.)

## Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Boros Zoltán

### 1. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

**1.1. Lemma.** [GRONWALL-LEMMA]: Legyen  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ ,  $a > 0$ ,  $\varphi : [0, a[ \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és tegyük fel, hogy:

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s) ds \quad (t \in [0, a[). \quad (1)$$

Akkor

$$\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta t} \quad (t \in [0, a[). \quad (2)$$

BIZONYÍTÁS. Vezessük be az

$$f(t) = \beta \int_0^t \varphi(s) ds \quad \text{és} \quad g(t) = e^{-\beta t} \quad (t \in [0, a[)$$

függvényeket. Ekkor (1)  $\implies \varphi(t) \leq \alpha + f(t)$ . Továbbá

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(t) &= f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t) = \\ &= \beta \cdot \varphi(t) \cdot g(t) - \beta \cdot f(t) \cdot g(t) = \beta \cdot g(t) [\varphi(t) - f(t)] \leq \alpha \cdot \beta \cdot g(t) \end{aligned}$$

miatt

$$\begin{aligned} f(t) \cdot g(t) &= f(t) \cdot g(t) - f(0) \cdot g(0) = \int_0^t (f \cdot g)'(s) ds \leq \int_0^t \alpha \cdot \beta \cdot g(s) ds = \\ &= (-\alpha) \cdot \int_0^t (-\beta) \cdot g(s) ds = (-\alpha) \int_0^t g'(s) ds = (-\alpha) [g(t) - g(0)] = \alpha \cdot [1 - g(t)], \end{aligned}$$

ezért

$$f(t) \leq \alpha \cdot \frac{1 - g(t)}{g(t)} = \frac{\alpha}{g(t)} - \alpha,$$

azaz

$$\varphi(t) \leq \alpha + f(t) \leq \frac{\alpha}{g(t)} = \alpha e^{\beta t}.$$

**1.2. Megjegyzés.** Hasonló állítás igaz  $a < 0$  esetén is.

**1.3. Definíció.** Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  nyílt intervallum,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  és  $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  folytonos függvény,  $\tau \in I$ ,  $\xi \in \mathbb{K}^n$ , és tekintsük a(z)

$$x'(t) + A(t)x(t) = b(t) \quad (3)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (4)$$

Cauchy-feladatot. Az (3) differenciálegyenletet elsőrendű (inhomogén) lineáris differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük. Az (3) homogén társa [párja]:

$$x'(t) + A(t)x(t) = 0 \quad [\text{itt } 0 \in \mathbb{K}^n]. \quad (5)$$

**1.4. TÉTEL.** Az (3)–(4) Cauchy-feladatnak pontosan egy  $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  (teljes) megoldása van.

**BIZONYÍTÁS.** Az (3) differenciálegyenlet

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

alakra hozható, ahol

$$f(t, x) = -A(t)x + b(t) \quad (t \in I, x \in \mathbb{K}^n),$$

ezért  $f$  az  $x$  komponensei szerint folytonosan differenciálható, ugyanis

$$D_2 f(t, x) = -A(t);$$

tehát (3) normál-egyenlet.

Tehát (3)–(4)-nek  $\exists x : I_1 \rightarrow \mathbb{K}^n$  teljes megoldása, ahol  $I_1$  nyílt intervallum,  $\tau \in I_1 \subset I$  és  $x$  az  $I \times \mathbb{K}^n$ -ben „határtól határig halad”.

Belátjuk, hogy  $I_1 = I$ . Ehhez indirekt tegyük fel, hogy  $I_1 \subsetneq I$ , tehát  $\inf(I_1) \in I$ , vagy  $\sup(I_1) \in I$ . Tekintsük az utóbbit, tehát legyen

$t_1 = \sup(I_1) \in I$ . Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy  $\tau = 0$  [ezt elérhetnénk, ha bevezetnénk az  $\tilde{I} = I - \tau = \{t - \tau \mid t \in I\}$  intervallumot és az  $\tilde{A}(t) = A(t + \tau)$ ,  $\tilde{b}(t) = b(t + \tau)$  ( $t \in \tilde{I}$ ) (együttható) függvényeket ...]. Ekkor

$$M = \sup\{\|A(t)\| : t \in [0, t_1]\}, \quad K = \sup\{\|b(t)\| : t \in [0, t_1]\}$$

jelölésekkel  $\forall t \in [0, t_1[$ :

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \left\| \xi + \int_0^t [b(s) - A(s)x(s)] ds \right\| \leq \\ &\leq \|\xi\| + \int_0^t \|b(s)\| ds + \int_0^t \|A(s)\| \cdot \|x(s)\| ds \leq \\ &\leq \|\xi\| + K \cdot t + M \int_0^t \|x(s)\| ds \leq \|\xi\| + K \cdot t_1 + M \int_0^t \|x(s)\| ds, \end{aligned}$$

így a Gronwall-lemmát alkalmazva a

$$\varphi(t) = \|x(t)\|$$

függvényre és az

$$\alpha = \|\xi\| + K \cdot t_1, \quad \beta = M$$

konstansokra, kapjuk, hogy

$$\|x(t)\| \leq (\|\xi\| + K \cdot t_1) e^{Mt} \quad (t \in [0, t_1[),$$

tehát

$$x \mid_{[0, t_1[} \subset \underbrace{[0, t_1] \times \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\| \leq (\|\xi\| + K \cdot t_1) e^{Mt_1}\}}_{\text{kompakt}} \subset I \times \mathbb{K}^n,$$

ami ellentmondás.

### 1.5. Jelölés.

$$U = \{u : I \rightarrow \mathbb{K}^n \mid u \text{ megoldása (3) - nek}\},$$

$$V = \{v : I \rightarrow \mathbb{K}^n \mid v \text{ megoldása (5) - nak}\}.$$

**1.6. Állítás.** Ha  $u_0 \in U$ , akkor

$$U = u_0 + V.$$

**1.7. TÉTEL.**  $V$  egy  $n$  dimenziós vektortér  $\mathbb{K}$  felett.

BIZONYÍTÁS. Egyrészt könnyen ellenőrizhető, hogy  $V$  vektortér.

Másrészt az előző tétel szerint  $\forall \xi \in \mathbb{K}^n$  esetén pontosan egy  $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  megoldása van a (5)–(4) Cauchy-feladatnak. Ez meghatároz egy vektortér-izomorfizmust  $\mathbb{K}^n$  és  $V$  között.

**1.8. Definíció.** Ha  $(\varphi_i)_{i=1}^n$  egy lineárisan független rendszer  $V$ -ben, akkor azt mondjuk, hogy  $(\varphi_i)_{i=1}^n$  egy alaprendszer, továbbá

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \\ \vdots \\ \varphi_{in} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

jelöléssel

$$\Phi = (\varphi_1 \dots \varphi_n) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \dots & \varphi_{n1} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1n} & \varphi_{2n} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

egy alaplátrixa a (5) differenciálegyenletnek.

**1.9. Állítás.** Ha  $\psi : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ , akkor a következő feltételek ekvivalensek:

- (a)  $\psi$  alaplátrixa (5)-nek;
- (b)  $\psi'(t) + A(t)\psi(t) = 0$  és  $\forall t \in I : \det \psi(t) \neq 0$ ;
- (c)  $\psi'(t) + A(t)\psi(t) = 0$  és  $\exists t_0 \in I : \det \psi(t_0) \neq 0$ .

**1.10. Következmény.** Ha  $\psi$  egy alaplátrixa (5)-nek, akkor

$$A(t) = -\psi'(t) \cdot [\psi(t)]^{-1} \quad (t \in I).$$

**1.11. TÉTEL.** [Abel–Liouville-tétel]: Ha  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  folytonosan differenciálható és  $\forall t \in I :$

$$\Phi'(t) + A(t) \cdot \Phi(t) = 0 \implies$$

$$\det [\Phi(t)] = \det [\Phi(\tau)] \cdot \exp \left[ - \int_{\tau}^t \text{spur}(A(s)) ds \right],$$

ahol

$$\text{spur}(a_{ij})_{n \times n} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

ÚTMUTATÁS A BIZONYÍTÁSHOZ. Legyen

$$z(t) = \det [\Phi(t)] \quad (t \in I) \text{ és } \Phi = (\varphi_{ij})_{n \times n}.$$

Ekkor

$$z = \sum_{k \in \sigma(n)} \nu(k) \cdot \varphi_{1k_1} \cdot \dots \cdot \varphi_{nk_n},$$

ahol  $\sigma(n)$  az  $n$  elem permutációinak a halmaza és  $\nu(k) \in \{-1, 1\}$ , ezért

$$\begin{aligned} z' &= \sum_{k \in \sigma(n)} \nu(k) \cdot \sum_{i=1}^n \varphi_{1k_1} \cdot \dots \cdot \varphi_{i-1, k_{i-1}} \varphi'_{ik_i} \cdot \varphi_{i+1, k_{i+1}} \cdot \dots \cdot \varphi_{nk_n} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \sigma(n)} \nu(k) \cdot \varphi_{1k_1} \cdot \dots \cdot \varphi_{i-1, k_{i-1}} \cdot \left( - \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \varphi_{jk_i} \right) \varphi_{i+1, k_{i+1}} \cdot \dots \cdot \varphi_{nk_n} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) \sum_{k \in \sigma(n)} \nu(k) \varphi_{1k_1} \cdot \dots \cdot \varphi_{i-1, k_{i-1}} \varphi_{jk_i} \varphi_{i+1, k_{i+1}} \cdot \dots \cdot \varphi_{nk_n} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) \det \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{i-1,1} & \dots & \varphi_{i-1,n} \\ \varphi_{j1} & \dots & \varphi_{jn} \\ \varphi_{i+1,1} & \dots & \varphi_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-a_{ij} \delta_{ij}) \det(\Phi) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-a_{ii}) \det(\Phi) = (-\text{spur} A) \cdot z, \end{aligned}$$

azaz

$$z'(t) + [\text{spur} A(t)] \cdot z(t) = 0 \quad (t \in I)$$

ezért

$$z(t) = z(\tau)e^{-\int_{\tau}^t \text{spur}A(s) ds} \quad (t \in I).$$

Az állandó(k) variálása:

Ha  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  egy alaplátria (5)-nak, akkor (3) megoldásait kereshetjük

$$x(t) = \Phi(t)c(t) \quad (t \in I)$$

alakban, ahol  $c : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  folytonosan differenciálható. Ekkor

$$\Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) + A(t)\Phi(t)c(t) = b(t),$$

azaz

$$\Phi(t)c'(t) + \underbrace{[\Phi'(t) + A(t)\Phi(t)]}_{0} c(t) = b(t),$$

tehát

$$c'(t) = [\Phi(t)]^{-1} b(t) \quad (t \in I).$$

## 2. Mátrixok egész függvényei

**2.1. Definíció.**  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  egész függvény, ha  $\exists a_k \in \mathbb{K}$  ( $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) úgy, hogy a  $\sum a_k x^k$  hatványsor konvergencia-sugara  $+\infty$  és

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (x \in \mathbb{K}). \quad (6)$$

**2.2. Jelölés.**

$$\mathcal{E}(\mathbb{K}) = \{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ egész függvény}\}.$$

**2.3. Definíció.** Ha  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{K})$  úgy, hogy (6) teljesül és  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , akkor legyen

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k.$$

**2.4. TÉTEL.**  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  esetén az  $f \mapsto f(A)$   $[\mathcal{E}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}]$  leképezés algebra-homomorfizmus [azaz művelet-tartó].

$[(f \cdot g)(A) = f(A)g(A)$  igazolása a Mertens-tétellel történik, a többi egyszerű... .]

**2.5. Példa.** Célunk, hogy meg tudjuk oldani a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x_1'(t) - 5x_1(t) - 2x_2(t) &= t, \\x_2'(t) + 8x_1(t) + 3x_2(t) &= 0.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

jelölésekkel a feladatban szereplő inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer

$$x'(t) + Ax(t) = b(t),$$

vagyis az (3) inhomogén vektor-differenciálegyenletre példa. Annyiban speciálisabb, hogy ebben a példában  $A(t) = A$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), ezért a neki megfelelő (5) homogén lineáris vektor-differenciálegyenlet ebben az esetben állandó együtthatós.

Motiváció: Ha egydimenziós egyenlet lenne, akkor

$$y'(t) + ay(t) = 0 \implies y(t) = c_0 e^{-at}.$$

**2.6. Állítás.** [deriválási szabály]: Ha  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{K})$ ,  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  és  $\varphi(t) = f(tA)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), akkor

$$\varphi'(t) = f'(tA) \cdot A \quad (t \in \mathbb{R}).$$

**2.7. Megjegyzés.**  $\varphi'(t) = A \cdot f'(tA)$ ; általában:  $h(A)g(A) = g(A)h(A)$ .  
De például

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

nem mindig igaz, csak pl. ha  $AB = BA$ .

**BIZONYÍTÁS.** [a 2.6. állítás állításé]: Legyen  $t \in \mathbb{R}$  tetszőleges és  $r > |t|$ .

$$\varphi'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{1}{s - t} [\varphi(s) - \varphi(t)] =$$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{1}{s-t} \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(sA)^k - (tA)^k] = \lim_{s \rightarrow t} \frac{1}{s-t} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (s^k - t^k) \cdot A^k.$$

Tagonként véve a határértéket

$$\lim_{s \rightarrow t} a_k \cdot \frac{s^k - t^k}{s-t} \cdot A^k = a_k \cdot kt^{k-1} \cdot A^k = a_k \cdot k \cdot (tA)^{k-1} \cdot A,$$

adódik. Ha  $|s-t| < r - |t|$ , akkor  $|s| = |(s-t) + t| \leq |s-t| + |t| < r$ , így

$$\begin{aligned} \left\| a_k \frac{s^k - t^k}{s-t} A^k \right\| &\leq |a_k| \cdot \left| \frac{s^k - t^k}{s-t} \right| \cdot \|A\|^k = \\ &= |a_k| \left| \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} t^j \right| \cdot \|A\|^k \leq |a_k| \left( \sum_{j=0}^{k-1} r^{k-1-j} r^j \right) \cdot \|A\|^k = \\ &= |a_k| k \cdot (r \cdot \|A\|)^{k-1} \cdot \|A\|, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \|a_k \cdot kt^{k-1} \cdot A^k\| &\leq |a_k| \cdot k |t^{k-1}| \cdot \|A\|^k \leq \\ &\leq |a_k| k \cdot (r \cdot \|A\|)^{k-1} \cdot \|A\|, \end{aligned}$$

és ez a közös felső becslés egy konvergens sor  $k$ -adik tagja, tehát az

$$F(s) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{s^k - t^k}{s-t} \cdot A^k, & \text{ha } s \neq t, \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (tA)^{k-1} \cdot A, & \text{ha } s = t \end{cases}$$

függvényt definiáló összeg a Weierstrass-tétel szerint egyenletesen konvergens, az előzőekben pedig beláttuk, hogy minden tagja folytonos az  $s = t$  pontban (is), így  $F$  is folytonos az  $s = t$  pontban, tehát

$$\varphi'(t) = \lim_{s \rightarrow t} F(s) = F(t) = f'(tA) \cdot A.$$

## 2.8. Következmény.

$$\psi(t) = e^{-tA} \quad (t \in \mathbb{R})$$

alapmátrixa az

$$x'(t) + Ax(t) = 0 \quad [\text{itt is } 0 \in \mathbb{K}^n]. \quad (7)$$

állandó együtthatós homogén lineáris vektor-differenciálegyenletnek.

**2.9. TÉTEL.** [Kiszámítási tétel]: Ha  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  és

$$(-1)^n (\det(A - \lambda E)) = \prod_{j=1}^r (\lambda - \lambda_j)^{m_j} \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

akkor  $\exists A_{jk} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  ( $j = 1, \dots, r; k = 0, 1, \dots, m_j - 1$ ) úgy, hogy  $\forall f \in \mathcal{E}(\mathbb{K})$ :

$$f(A) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) A_{jk} \quad (8)$$

ÚTMUTATÁS A BIZONYÍTÁSHOZ. A numerikus analízisből ismert, hogy tetszőleges  $y_{jl} \in \mathbb{K}$  ( $j = 1, \dots, r; l = 0, 1, \dots, m_j - 1$ ) esetén létezik olyan legfeljebb  $(n - 1)$ -edfokú  $H$  (Hermite-interpolációs) polinom, amelyre

$$H^{(l)}(\lambda_j) = y_{jl} \quad (j = 1, \dots, r; l = 0, 1, \dots, m_j - 1).$$

Ezt alkalmazva látható, hogy létezik legfeljebb  $(n - 1)$ -edfokú  $H_{ik}$  polinom, amelyre

$$H_{ik}^{(l)}(\lambda_j) = \delta_{ij} \delta_{kl} \quad \left( \begin{array}{l} j = 1, \dots, r \\ l = 0, 1, \dots, m_j - 1 \end{array} \right)$$

( $i = 1, \dots, r; k = 0, 1, \dots, m_i - 1$ ).

Itt:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha máskor.} \end{cases}$

Másrésztől

$$p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda E) \implies p(A) = 0$$

a Cayley–Hamilton-tétel miatt. Legyen

$$F(\lambda) = f(\lambda) - \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{(k)}(\lambda_i) H_{ik}(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Ha  $\lambda \in \mathbb{K}$  és  $m \in \mathbb{N}$  úgy, hogy

$$p^{(l)}(\lambda) = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, m - 1)$$

(tehát  $\lambda$  legalább  $m$ -szeres gyöke  $p$ -nek), akkor  $\lambda = \lambda_j$  valamely  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$  esetén és  $m \leq m_j$ . Ekkor minden  $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  esetén

$$\begin{aligned} F^{(l)}(\lambda) &= F^{(l)}(\lambda_j) = f^{(l)}(\lambda_j) - \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{(k)}(\lambda_i) H_{ik}^{(l)}(\lambda_j) \\ &= f^{(l)}(\lambda_j) - \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{(k)}(\lambda_i) \delta_{ij} \delta_{kl} = f^{(l)}(\lambda_j) - f^{(l)}(\lambda_j) = 0. \end{aligned}$$

Tehát  $p$  minden gyöke  $F$ -nek is legalább ugyanolyan multiplicitással gyöke, ezért  $F/p$  szingularitásai megszüntethetők, tehát

$$\exists g \in \mathcal{E}(\mathbb{K}) : F = p \cdot g \implies F(A) = p(A)g(A) = 0.$$

$\implies$  a tétel  $A_{jk} = H_{jk}(A)$ -val.

**2.10. Példa.** A fentiek ismeretében már meg tudjuk oldani a fejezet elején megadott feladatot:

$$\begin{aligned} x_1'(t) - 5x_1(t) - 2x_2(t) &= t, \\ x_2'(t) + 8x_1(t) + 3x_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Az alábbi jelöléseket használjuk:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ezen jelölésekkel a feladatban szereplő inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer

$$x'(t) + Ax(t) = b(t).$$

Első lépésként kiszámítjuk az  $A$  mátrix sajátértékeit.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -2 \\ 8 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (-5 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 \cdot (-2) \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

Ekkor a következő adatok ismertek:  $n = 2$ ,  $r = 1$ ,  $\lambda_1 = -1$ ,  $m_1 = 2$ , ahol  $n$  a mátrix dimenziója,  $r$  a gyöktényezők száma,  $\lambda_1$  az  $A$  mátrix sajátértéke,  $m_1$  a  $\lambda_1$  sajátérték multiplicitása. Az

$$f(A) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) A_{jk}$$

képletbe behelyettesítve a következő adódik:

$$f(A) = f(-1) \cdot A_{10} + f'(-1) \cdot A_{11}.$$

$$f_1(\lambda) = 1 \text{ választással}$$

$$f_1(A) = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot A_{10} + 0 \cdot A_{11}. \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{10}.$$

$$f_2(\lambda) = \lambda + 1 \quad (f_2'(\lambda) = 1) \text{ esetén}$$

$$f_2(A) = A + E = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix},$$

illetve

$$f_2(A) = f_2(-1) \cdot A_{10} + f_2'(-1) \cdot A_{11} = 0 \cdot A_{10} + 1 \cdot A_{11}. \Rightarrow$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tehát } f(A) = f(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + f'(-1) \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ez a felírás alkalmas az  $A$  mátrix hatványainak könnyebb kiszámításához is:

$$\begin{aligned} A^n &= (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n - 4 \cdot n \cdot (-1)^{n-1} & -2 \cdot n \cdot (-1)^{n-1} \\ 8 \cdot n \cdot (-1)^{n-1} & (-1)^n + 4 \cdot n \cdot (-1)^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Most meghatározzuk az alaplátrixot.

$$\psi(t) = e^{-tA},$$

$$f(\lambda) = e^{-t\lambda}, \quad f'(\lambda) = -t \cdot e^{-t\lambda},$$

$$f(-1) = e^t, \quad f'(-1) = -t \cdot e^t,$$

$$\psi(t) = f(A) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - t \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t + 4 \cdot t \cdot e^t & 2 \cdot t \cdot e^t \\ -8 \cdot t \cdot e^t & e^t - 4 \cdot t \cdot e^t \end{pmatrix}.$$

$\psi(t)$  lesz az eredeti egyenlet alapmátrixa. Ebből az

$$\begin{aligned}y_1'(t) - 5 \cdot y_1(t) - 2 \cdot y_2(t) &= 0 \\y_2'(t) + 8 \cdot y_1(t) + 3 \cdot y_2(t) &= 0\end{aligned}$$

homogén lineáris differenciál egyenlet-rendszer egy alaprendszer:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t + 4 \cdot t \cdot e^t \\ -8 \cdot t \cdot e^t \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot t \cdot e^t \\ e^t - 4 \cdot t \cdot e^t \end{pmatrix},$$

általános megoldása pedig

$$\begin{aligned}y(t) &= c_1 \cdot \varphi_1(t) + c_2 \cdot \varphi_2(t) \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \cdot (e^t + 4te^t) + c_2 \cdot 2te^t \\ -c_1 \cdot 8te^t + c_2 \cdot (e^t - 4te^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [c_1 + (4c_1 + 2c_2)t] e^t \\ [c_2 - (4c_2 + 8c_1)t] e^t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Következő lépés az állandók variálása az  $x'(t) + Ax(t) = b(t)$  egyenletben. Ha  $\psi(t)$  a homogén egyenlet egy alapmátrixa és  $x(t) = \psi(t) \cdot \mathbf{c}(t)$ , akkor

$$\begin{aligned}\psi'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \psi(t) \cdot \mathbf{c}'(t) + A \cdot \psi(t) \cdot \mathbf{c}(t) &= b(t), \\ [\psi'(t) + A \cdot \psi(t)] \cdot \mathbf{c}(t) + \psi(t) \cdot \mathbf{c}'(t) &= b(t).\end{aligned}$$

Mivel  $\psi'(t) + A \cdot \psi(t) = 0$ , ezért

$$\mathbf{c}'(t) = (\psi(t))^{-1} \cdot b(t) = (e^{-tA})^{-1} \cdot b(t) = e^{tA} \cdot b(t) = \psi(-t) \cdot b(t).$$

A példánkban  $b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ , így

$$\mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} - 4te^{-t} & -2te^{-t} \\ 8te^{-t} & e^{-t} + 4te^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-t} - 4t^2e^{-t} \\ 8t^2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ezt komponensenként integráljuk.

$$\begin{aligned}\int t \cdot e^{-t} dt &= -t \cdot e^{-t} - \int -e^{-t} dt = -t \cdot e^{-t} + \int e^{-t} dt \\ &= -t \cdot e^{-t} - e^{-t} + K_1 = -(t+1) \cdot e^{-t} + K_1. \\ \int t^2 \cdot e^{-t} dt &= -t^2 \cdot e^{-t} - \int 2t \cdot (-e^{-t}) dt = -t^2 \cdot e^{-t} + 2 \cdot \int t \cdot e^{-t} dt \\ &= -t^2 \cdot e^{-t} - 2t \cdot e^{-t} - 2 \cdot e^{-t} = -(t^2 + 2t + 2) \cdot e^{-t} + K_2.\end{aligned}$$

Ezekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \begin{pmatrix} -(t+1) \cdot e^{-t} + K_1 + 4 \cdot (t^2 + 2t + 2) \cdot e^{-t} - 4K_2 \\ -8 \cdot (t^2 + 2t + 2) \cdot e^{-t} + 8K_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4t^2 + 7t + 7) \cdot e^{-t} + c_1 \\ -8 \cdot (t^2 + 2t + 2) \cdot e^{-t} + c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Végül azt kapjuk, hogy a 2.10. példabeli inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= x(t) = \psi(t) \cdot \mathbf{c}'(t) \\ &= \begin{pmatrix} (1+4t) \cdot e^t & 2t \cdot e^t \\ -8t \cdot e^t & (1-4t) \cdot e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (4t^2 + 7t + 7) \cdot e^{-t} + c_1 \\ -8 \cdot (t^2 + 2t + 2) \cdot e^{-t} + c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1+4t)e^t(4t^2 + 7t + 7)e^{-t} + (1+4t)e^t \cdot c_1 + 2te^t \cdot (-8)(t^2 + 2t + 2)e^{-t} + 2te^t c_2 \\ -8te^t(4t^2 + 7t + 7)e^{-t} - 8te^t c_1 + (1-4t)e^t(-8)(t^2 + 2t + 2)e^{-t} + (1-4t)e^t c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3t + 7 + (1+4t) \cdot e^t \cdot c_1 + 2t \cdot e^t \cdot c_2 \\ -8t - 16 - 8t \cdot e^t \cdot c_1 + (1-4t) \cdot e^t \cdot c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$