

Bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe

4–5. előadás (2019. október 1–8.)

Létezés és egyértelműség

Boros Zoltán

1. Cauchy-feladat elsőrendű explicit vektor-differenciálegyenletre

1.1. A Picard–Lindelöf-tétel

Ebben a témakörben legyen $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^p$ tartomány, $(\tau, \xi) \in D$ [ahol $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{K}^p$], $f : D \rightarrow \mathbb{K}^p$ folytonos.

1.1. Állítás. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum úgy, hogy $\tau \in I$ és $x : I \rightarrow \mathbb{K}^p$ úgy, hogy $x \subset D$ [azaz $\forall t \in I : (t, x(t)) \in D$]. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(a) x megoldása az

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (2)$$

Cauchy-feladatnak,

(b) x folytonos és $\forall t \in I :$

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3)$$

BIZONYÍTÁS.

[(a) $\implies$ (b)]: (a) miatt x folytonosan differenciálható [$\implies$ folytonos] és $\forall t \in I :$

$$x(t) - \xi \stackrel{(2)}{=} x(t) - x(\tau) \stackrel{N-L}{=} \int_{\tau}^t x'(s) ds \stackrel{(1)}{=} \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds \implies (3).$$

[(b) $\implies$ (a)]: (3) $\implies x(\tau) = \xi$, továbbá az integrandus folytonossága miatt x (folytonosan) differenciálható és $\forall t \in I : x'(t) = f(t, x(t))$.

1.2. Lemma. Legyen $0 < r < +\infty$, $p \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\xi \in \mathbb{K}^p$, $\|\cdot\|$ tetszőleges norma a $\mathbb{K}^p$ téren,

$$X = \{ \varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^p \mid \varphi \text{ folytonos és } \forall t \in I : \|\varphi(t) - \xi\| \leq r \},$$

valamint $\varphi, \psi \in X$ esetén legyen

$$d(\varphi, \psi) = \sup\{ \|\varphi(t) - \psi(t)\| : t \in I \}.$$

Ekkor (X, d) teljes metrikus tér.

BIZONYÍTÁS. Az könnyen ellenőrizhető, hogy (X, d) metrikus tér.

Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$ Cauchy-sorozat. Ekkor $\forall t \in I : (x_n(t))$ Cauchy-sorozat $\mathbb{K}^p$ -ben és $\mathbb{K}^p$ teljes, tehát $\exists x(t) \in \mathbb{K}^p$:

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t).$$

Ekkor $\|x(t) - \xi\| \leq r$ ($t \in I$), továbbá, mivel (x_n) Cauchy-sorozat, tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\forall n, m > N(\varepsilon)$:

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát $\forall n, m > N(\varepsilon) : \forall t \in I :$

$$\|x_n(t) - x_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebből $m \rightarrow \infty$ határátmenettel $\forall t \in I :$

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

azaz

$$d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Továbbá így $x_n \rightarrow x$ egyenletesen, ezért x folytonos, vagyis $x \in X$.

1.3. Megjegyzés. A továbbiakban (a számítások egyszerűsítése céljából) a $\mathbb{K}^p$ téren a (valós) maximum-normát tekintjük, azaz $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $z_j = x_j + iy_j$ ($j = 1, 2, \dots, p$), $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ és $z = (z_1, z_2, \dots, z_p)$ esetén legyen $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|\}$ és

$$\|z\| = \max\{|x_1|, |y_1|, |x_2|, |y_2|, \dots, |x_p|, |y_p|\}.$$

1.4. TÉTEL. [Picard–Lindelöf-tétel]: Legyen $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ úgy, hogy

$$T = \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^p \mid |t - \tau| \leq \alpha, \|x - \xi\| \leq \beta \} \subset D,$$

valamint $M = \sup\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in T\}$. Tegyük fel, hogy

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall (t, x), (t, y) \in T : \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Legyen továbbá

$$h = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{L+1}\right\}.$$

Ekkor az (1)-(2) Cauchy-feladatnak pontosan egy $x : [\tau-h, \tau+h] \rightarrow \mathbb{K}^p$ megoldása van.

BIZONYÍTÁS. Legyen $I = [\tau-h, \tau+h]$ és

$X = \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^p \mid \varphi \text{ folytonos és } \forall t \in I : \|\varphi(t) - \xi\| \leq \beta\}$, valamint

$$A(\varphi)(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (t \in I) \quad (\varphi \in X).$$

Ekkor X teljes metrikus tér a

$$d(\varphi, \psi) = \sup\{\|\varphi(t) - \psi(t)\| : t \in I\} \quad (\varphi, \psi \in X)$$

távolsággal, továbbá $\varphi \in X$ és $t \in I$ esetén

$$\|A(\varphi)(t) - \xi\| = \left\| \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| \leq M|t - \tau| \leq Mh \leq \beta,$$

és $A(\varphi)$ folytonos, így $A(\varphi) \in X$. Ha pedig $\varphi, \psi \in X$, akkor $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned} \|A(\varphi)(t) - A(\psi)(t)\| &= \left\| \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds - \int_{\tau}^t f(s, \psi(s)) ds \right\| = \\ &= \left\| \int_{\tau}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right\| \leq \int_{\min\{\tau, t\}}^{\max\{\tau, t\}} \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \leq \\ &\leq \int_{\min\{\tau, t\}}^{\max\{\tau, t\}} L \underbrace{\|\varphi(s) - \psi(s)\|}_{\leq d(\varphi, \psi)} ds \leq L|t - \tau|d(\varphi, \psi) \leq Lhd(\varphi, \psi) \leq \frac{L}{L+1}d(\varphi, \psi), \end{aligned}$$

így

$$d(A(\varphi), A(\psi)) \leq \frac{L}{L+1} d(\varphi, \psi) \quad \text{és nyilván} \quad \frac{L}{L+1} < 1,$$

tehát $A : X \rightarrow X$ kontrakció. Ezért a Banach-féle fixpont-tétel szerint pontosan egy $x \in X$ létezik, amelyre $A(x) = x$, azaz (3) teljesül.

Még azt kell belátnunk, hogy ha $x : I \rightarrow \mathbb{K}^p$ folytonos megoldása a (3)-nak, akkor $x \in X$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $x \notin X$. Ekkor $\exists t_1 \in I$:

$$\|x(t_1) - \xi\| > \beta.$$

Nyilván $t_1 \neq \tau$ (mert $x(\tau) = \xi$). Ha pl. $t_1 > \tau$, akkor legyen

$$t_0 = \inf\{t \in [\tau, \tau + h] : \|x(t) - \xi\| > \beta\}.$$

Ekkor $\forall t \in [\tau, t_0] : \|x(t) - \xi\| \leq \beta$ és

$$\beta = \|x(t_0) - \xi\| = \left\| \int_{\tau}^{t_0} f(s, x(s)) ds \right\| \leq M(t_0 - \tau) < Mh \leq \beta,$$

ami ellentmondás, tehát $x \in X$.

1.5. Következmény. Ha $D_2 f$ folytonos, akkor f a második változójában lokálisan Lipschitz tulajdonságú, azaz teljesíti a 1.4. tétel feltételeit. Ekkor minden $(\tau, \xi) \in D$ esetén (1)-(2)-nek τ egy környezetében pontosan egy megoldása van.

1.2. Az egzisztencia-tétel és következményei

Emlékeztető: Ebben a témakörben legyen $p \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^p$ tartomány, $(\tau, \xi) \in D$ [ahol $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{K}^p$], $f : D \rightarrow \mathbb{K}^p$ folytonos.

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{4}$$

$$x(\tau) = \xi \tag{5}$$

1.6. Megjegyzés.

$$(4) \iff \begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)) \\ x'_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)) \\ \vdots \\ x'_p(t) = f_p(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)) \end{cases} \quad (5) \iff \begin{cases} x_1(t) = \xi_1 \\ x_2(t) = \xi_2 \\ \vdots \\ x_p(t) = \xi_p \end{cases}$$

1.7. TÉTEL. [Cauchy–Peano-tétel*]: Legyen $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ úgy, hogy

$$T = \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^p \mid |t - \tau| \leq \alpha, \|x - \xi\| \leq \beta \} \subset D,$$

$M = \sup\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in T\}$ és $h = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$. Ekkor $\exists x : [\tau - h, \tau + h] \rightarrow \mathbb{K}^p$ megoldása az (4)-(5) Cauchy-feladatnak.

1.8. TÉTEL. Ha $u : I \rightarrow \mathbb{K}^p$ egy nem kiterjeszthető megoldása az (4)-(5) Cauchy-feladatnak, akkor I nyílt intervallum.

BIZONYÍTÁS. A megoldás definíciója szerint I intervallum és $\tau \in I$. Be kell látnunk, hogy $\inf(I) \notin I$ és $\sup(I) \notin I$. Indirekt tegyük fel, hogy (például) $\omega = \sup(I) \in I$ ($\Rightarrow \omega \in \mathbb{R}$). Tekintsük az

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(\omega) = u(\omega) \end{cases} \quad (6)$$

Cauchy-feladatot. A Cauchy–Peano-tétel szerint $\exists r > 0$ és $v : [\omega - r, \omega + r] \rightarrow \mathbb{K}^p$ úgy, hogy v megoldása a (6) Cauchy-feladatnak. Legyen

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & \text{ha } t \in I, \\ v(t), & \text{ha } t \in]\omega, \omega + r]. \end{cases}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} w'_-(\omega) &= \lim_{t \rightarrow \omega-} \frac{w(t) - w(\omega)}{t - \omega} = \lim_{t \rightarrow \omega-} \frac{u(t) - u(\omega)}{t - \omega} = u'_-(\omega) = \\ &= f(\omega, u(\omega)) = f(\omega, w(\omega)) = f(\omega, v(\omega)) = \\ &= v'(\omega) = \lim_{t \rightarrow \omega+} \frac{v(t) - v(\omega)}{t - \omega} = \lim_{t \rightarrow \omega+} \frac{w(t) - w(\omega)}{t - \omega} = w'_+(\omega) \Rightarrow \end{aligned}$$

w differenciálható és megoldása (4)-nek (és $w(\tau) = u(\tau) = \xi$ miatt (5)-nek is), ami u -nak valódi kiterjesztése.

1.9. TÉTEL. [A nem kiterjeszthető megoldás „határtól határig halad”]: Ha $u : I \rightarrow \mathbb{K}^p$ egy nem kiterjeszthető megoldása az (4)-(5) Cauchy-feladatnak és $Q \subset D$ kompakt, akkor

$$\exists t_1, t_2 \in I : t_1 < \tau < t_2 \text{ és } (t_j, u(t_j)) \in D \setminus Q \quad (j = 1, 2).$$

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel — indirekt módon — például azt, hogy $\forall t \in I, t > \tau$ esetén $(t, u(t)) \in Q$. Legyen $\omega = \sup(I)$. Ekkor $+\infty > \omega \notin I$ az előző tétel és Q korlátos volta miatt.

Felhasználva a (3)

$$u(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, u(s)) ds$$

egyenlőséget, tetszőleges $\tau < t_1 < t_2 < \omega$ esetén

$$\|u(t_2) - u(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s)) ds \right\| \leq K |t_2 - t_1|, \text{ ahol}$$

$$K = \sup\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in Q\} < +\infty.$$

Ezért, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \omega,$$

ahol $(t_n) : \mathbb{N} \rightarrow I$, akkor (t_n) Cauchy-sorozat $\Rightarrow (u(t_n))$ Cauchy-sorozat [és $\mathbb{K}^p$ teljes], tehát $(u(t_n))$ konvergens. Eszerint létezik

$$w = \lim_{t \rightarrow \omega-} u(t).$$

Továbbá $(\omega, w) \in Q$, mert Q zárt. Legyen most

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & \text{ha } t \in I, \\ w, & \text{ha } t = \omega. \end{cases}$$

Ekkor $\tilde{u}$ folytonos, valódi kiterjesztése u -nak, továbbá

$$\begin{aligned} \xi + \int_{\tau}^{\omega} f(s, \tilde{u}(s)) ds &= \lim_{t \rightarrow \omega-} \left[\xi + \int_{\tau}^t f(s, u(s)) ds \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \omega-} u(t) = w = \tilde{u}(\omega) \implies \end{aligned}$$

$\tilde{u}$ megoldása (4)–(5)-nek, ami ellentmondás.

1.3. Normál egyenlet teljes megoldása

Emlékeztető: Ebben a témakörben legyen $p \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^p$ tartomány, $(\tau, \xi) \in D$ [ahol $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{K}^p$], $f : D \rightarrow \mathbb{K}^p$ folytonos.

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (7)$$

$$x(\tau) = \xi \quad (8)$$

1.10. Definíció. Az (7) differenciálegyenletet normál egyenletnek nevezzük, ha f folytonosan differenciálható [elég azt feltenni, hogy D_2f folytonos].

1.11. Megjegyzés. A többváltozós analízis tárgy elméletében igazoltuk, hogy ha f folytonosan differenciálható, akkor lokálisan Lipschitz tulajdonságú. Tehát a normál egyenletekre minden kezdeti feltétel mellett alkalmazható a Picard–Lindelöf-tétel.

1.12. TÉTEL. *Ha (7) normál egyenlet, akkor az (7)–(8) Cauchy-feladatnak van teljes megoldása.*

1.13. Megjegyzés. Elegendő feltenni, hogy f a második változójában lokálisan Lipschitz [$f \in \text{Lip}_2 \text{ loc}$].

BIZONYÍTÁS. Korábbi tétel szerint elegendő belátnunk, hogy (7)–(8)-nak minden intervallumon legfeljebb egy megoldása van. Legyen I intervallum, $\tau \in I$ és tegyük fel, hogy $u_j : I \rightarrow \mathbb{K}^p$ megoldása (7)–(8)-nak ($j = 1, 2$). Ekkor

$$u_1(\tau) = \xi = u_2(\tau).$$

Ha létezik $t_1 \in I$, $t_1 > \tau$ úgy, hogy $u_1(t_1) \neq u_2(t_1)$, legyen

$$t_0 = \inf\{t \in I \cap [\tau, +\infty[: u_1(t) \neq u_2(t)\}.$$

Ekkor $\tau \leq t_0 \leq t_1$ miatt $t_0 \in I$.

Mivel $u_1 - u_2$ folytonos és $t_0 > \tau$ esetén $\forall t \in [\tau, t_0[: u_1(t) - u_2(t) = 0$, így

$$u_1(t_0) - u_2(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} (u_1(t) - u_2(t)) = 0,$$

azaz $u_1(t_0) = u_2(t_0)$. Ezt $t_0 = \tau$ esetén is beláttuk.

Másrészről $(*) \quad \forall \delta > 0 : \exists t^* \in]t_0, t_0 + \delta[\cap I : u_1(t^*) \neq u_2(t^*)$.

Viszont u_1 és u_2 megoldásai a(z)

$$(**) \begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= u_1(t_0) \end{cases}$$

Cauchy-feladatnak. A Picard–Lindelöf-tétel szerint $\exists h > 0$ úgy, hogy a $(**)$ Cauchy-feladatnak pontosan egy

$$u : [t_0 - h, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{K}^p$$

megoldása van. Legyen $h_0 > 0$ úgy, hogy $h_0 \leq h$ és $[t_0, t_0 + h_0] \subset I$. A Picard–Lindelöf-tétel bizonyítása a $[t_0, t_0 + h_0]$ intervallumra is felírható, tehát ezen is érvényes az unicitás, így

$$u_1|_{[t_0, t_0 + h_0]} = u_2|_{[t_0, t_0 + h_0]}$$

ellentétben $(*)$ -gal.

1.14. Megjegyzés. Mivel a teljes megoldás nem kiterjeszthető, érvényesek rá az előző tételek (is).