Bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe

1-2. előadás (2019. szeptember 10–17.)

Elemi úton megoldható differenciálegyenletek

Boros Zoltán

1. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet

1.1. Megjegyzés. Az alábbiakban az elemi úton megoldható differenciálegyenletek néhány alaptípusára fogalmazzuk meg az állításokat. A megoldási módszereket és az alaptípusokra visszavezethető további differenciálegyenlet-osztályokat a gyakorlaton tárgyaljuk.

1.2. TÉTEL. [szeparábilis differenciálegyenlet]: *Legyen $I_j \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum ($j = 1, 2$), $f : I_1 \to \mathbb{R}$ és $g : I_2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folytonos függvények, valamint $x_0 \in I_1$, $y_0 \in I_2$ és $I \subset I_1$ részintervallum úgy, hogy $x_0 \in I$. Egy $y : I \to I_2$ folytonosan differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása a(z)*

$$(SZ)\begin{cases} (SZ-1) \qquad y'(x) = f(x)g(y(x)) \quad (x \in I) \\ (SZ-2) \qquad y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

kezdeti érték problémának, ha $\forall x \in I$:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(u)}\,du\,.$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in I_1)$ és $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(u)}\,du \quad (y \in I_2)$.

Ha $y : I \to I_2$ megoldása (SZ)-nek, akkor

$$G(y(x_0)) - F(x_0) \overset{(SZ-2)}{=} G(y_0) - F(x_0) = 0 - 0 = 0 \quad \text{és}$$

$$\begin{aligned}[G(y(x)) - F(x)]' &= G'(y(x)) \cdot y'(x) - F'(x) = \\ &= \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) - f(x) \overset{(SZ-1)}{=} 0 \quad (x \in I)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad G(y(x)) - F(x) = 0 \text{ azaz } G(y(x)) = F(x) \quad (x \in I).$$

Megfordítva, ha $G(y(x)) = F(x) \quad (x \in I)$, akkor egyrészt

$$G'(y(x)) \cdot y'(x) = F'(x)$$

azaz

$$\frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) = f(x) \Longrightarrow (SZ-1),$$

másrészt

$$G(y(x_0)) = F(x_0) = 0 = G(y_0),$$

továbbá

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0 \qquad (y \in I_2)$$

miatt G' jeltartó, így G szigorúan monoton, tehát $y(x_0) = y_0$.

1.3. Megjegyzés.

$$y(x) = G^{-1}(F(x)) \qquad (x \in I).$$

1.4. Következmény. *Ha $f(x_0) \neq 0$, akkor x_0 a $G^{-1} \circ F$ értelmezési tartományának belső pontja, így (SZ)-nek $\exists$ megoldása.*

2. Lineáris differenciálegyenlet

2.1. TÉTEL. [(elsőrendű) lineáris skalár differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma]: *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$, valamint f, $g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Ekkor a(z)*

$$y'(t) + f(t)y(t) = g(t) \tag{1}$$

$$y(\tau) = \xi \tag{2}$$

kezdetiérték-problémának az egyetlen $y : I \to \mathbb{R}$ megoldása

$$y(t) = e^{-\int_\tau^t f(s)\,ds} \left[\xi + \int_\tau^t g(u) e^{\int_\tau^u f}\,du \right]. \tag{3}$$

Bizonyítás. (i) Az unicitást általánosabb esetre fogjuk bizonyítani.

(ii) Belátjuk, hogy a (3) formulával adott függvény megoldása az (1)-(2) Cauchy-feladatnak. Legyen

$$x(t) = e^{-\int_\tau^t f(s)\,ds} \qquad \text{és} \qquad k(t) = \xi + \int_\tau^t \frac{g(u)}{x(u)}\,du \qquad (t \in I).$$

Ekkor $x(t) \neq 0$ és

$$y(t) = x(t)k(t) \qquad (t \in I),\ \text{továbbá} \quad x'(t) = x(t)[-f(t)],$$

azaz

$$x'(t) + f(t)x(t) = 0 \tag{4}$$

(ez az inhomogén lináris (1) differenciálegyenlet *homogén társa/párja*). Másrészről

$$k'(t) = \frac{g(t)}{x(t)} \qquad (t \in I),$$

így

$$\begin{aligned} y'(t) + f(t)y(t) &= x'(t)k(t) + x(t)k'(t) + f(t)x(t)k(t) \\ &= x(t)k'(t) + \overbrace{[x'(t) + f(t)x(t)]}^{0}\,k(t) \overset{(4)}{=} x(t)\cdot\frac{g(t)}{x(t)} + 0 = g(t), \end{aligned}$$

azaz (1) teljesül. Továbbá

$$x(\tau) = e^0 = 1 \quad \text{és} \quad y(\tau) = x(\tau)k(\tau) = 1\cdot\xi = \xi\,,$$

vagyis (2) is fennáll.

2.2. Megjegyzés. 1.) Ha y_1 és y_2 megoldása (1)-nek és $x = y_1 - y_2$, akkor x megoldása (4)-nek.

2.) Ha y_0 megoldása (1)-nek és x megoldása (4)-nek, akkor $y = y_0 + x$ megoldása (1)-nek.

3. Egzakt differenciálegyenlet

3.1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány (összefüggő, nyílt halmaz), $P, Q : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. A(z)

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0 \tag{5}$$

differenciálegyenletet egzaktnak nevezzük, ha $\exists\, F : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény úgy, hogy

$$\begin{aligned} D_1 F &= P \quad \text{és} \\ D_2 F &= Q. \end{aligned}$$

3.2. Megjegyzés. (5) további alakjai:

$$\begin{aligned} P(x, y) + Q(x, y) \cdot y' &= 0\,, \quad \text{vagy} \\ P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy &= 0\,. \end{aligned}$$

3.3. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az előző definíció jelöléseivel (5) egzakt differenciálegyenlet és legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, valamint $y : I \to \mathbb{R}$ differenciálható úgy, hogy $y \subset D$ [azaz $\forall\, x \in I : (x, y(x)) \in D$].*

$$y \ \textit{megoldása} \ \ (5)\textit{-nek} \iff \exists\, c \in \mathbb{R} : \forall\, x \in I : F(x, y(x)) = c\,.$$

Bizonyítás.

($\Longleftarrow$) Legyen $h(x) = F(x, y(x))$ $(x \in I)$. Mivel h konstans, $\forall x \in I$:

$$\begin{aligned} 0 &= h'(x) = D_1 F(x, y(x)) + D_2 F(x, y(x)) \cdot y'(x) = \\ &= P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)\,. \end{aligned}$$

($\Longrightarrow$) Hasonlóan, legyen $h(x) = F(x, y(x))$ $(x \in I)$. Ekkor $h : I \to \mathbb{R}$ differenciálható és (5) $\implies \forall\, x \in I$:

$$\begin{aligned} 0 &= P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x) = \\ &= D_1 F(x, y(x)) + D_2 F(x, y(x)) \cdot y'(x) = h'(x)\,, \end{aligned}$$

tehát h konstans.

3.4. Megjegyzések. 1.) Ha P és Q differenciálható, valamint (5) egzakt, akkor

$$D_2P = D_1Q\,. \tag{6}$$

2.) Ha P és Q folytonosan differenciálható a $D \subset \mathbb{R}^2$ konvex nyílt halmazon [vagy legalábbis $\exists (x_0, y_0) \in D :$ D csillagtartomány (x_0, y_0)-ra nézve], valamint (6) teljesül, akkor (5) egzakt. Továbbá, ha $F(x_0, y_0) = 0$, akkor

$$F(x, y) = \int_{g_{x,y}} (P, Q) \qquad ((x, y) \in D),$$

ahol $g_{x,y}$ olyan szakaszonként sima görbe [azaz pálya], amelynek kezdőpontja (x_0, y_0), végpontja (x, y).

Speciálisan, ha D nyílt tégla (pl.: $D = \mathbb{R}^2$), akkor

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, s)\,ds\,.$$