

Bevezetés a közönséges differenciálegyenletek elméletébe

3. előadás (2019. szeptember 24.)

Boros Zoltán

1. Bevezető megjegyzések a differenciálegyenletekről

Differenciálegyenletnek azokat az egyenleteket nevezzük, amelyekben az ismeretlen egy függvény és az egyenletben szerepel az ismeretlen függvény deriváltja is. Két típusa van, egyik a közönséges differenciálegyenlet, a másik pedig a parciális differenciálegyenlet.

Közönséges differenciálegyenletről akkor beszélünk, ha a függvény egyváltozós. Azokat a differenciálegyenleteket, melyekben az ismeretlen függvény többváltozós, parciális differenciálegyenletnek nevezzük, például: $D_1^2 u(x, y) - \frac{1}{x^2+1} D_2^2 u(x, y) = xy$.

A differenciálegyenletek rendjén a differenciálegyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendjét értjük.

A differenciálegyenletet explicitnek hívjuk, ha a függvénykapcsolatból egyértelműen kifejezhető a legmagasabb rendű derivált. Pl.: elsőrendű, explicit, skalár: $y'(x) = xe^{y(x)} - e^x$. Explicit, skalár és másodrendű: $y''(x) = y'(x) - xy(x)$.

Azt mondjuk, hogy a differenciálegyenlet implicit, ha nem explicit, vagyis nem tudjuk kifejezni a legmagasabb rendű deriváltat. Pl.: $y'(x)y(x) = \cos(x + y'(x))$.

Jelölések:

- Ha $D \subset \mathbb{R}^k$ nyílt (vagy ha $D \subset \mathbb{R}$ intervallum), $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ és $m \in \mathbb{N}$, legyen

$$\mathcal{C}^m(D, \mathbb{K}^p) = \{f : D \rightarrow \mathbb{K}^p \mid f \text{ } m\text{-szer folytonosan differenciálható}\}$$

$$[\text{spec. } \mathcal{C}^m(D) = \mathcal{C}^m(D, \mathbb{R})].$$

- Ha (X, d) és (Y, ϱ) metrikus terek, legyen

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ folytonos}\}, \text{ spec. } \mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

1.1. Megjegyzés. Ugyanazt a differenciálegyenletet többféleképpen is fel szokás írni, például

$$\begin{aligned} x'(t) &= te^{x(t)} - e^t \text{ más változókkal} \\ y'(x) &= xe^{y(x)} - e^x \text{ vagy röviden } y' = xe^y - e^x, \text{ ami az} \\ f(x, y) &= xe^y - e^x \text{ függvény segítségével} \\ y'(x) &= f(x, y(x)) \text{ alakban írható fel.} \end{aligned}$$

2. Közönséges differenciálegyenletek

2.1. Alapfogalmak

2.1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{p \boxed{1.}} \times \mathbb{K}^{p \boxed{2.}} \times \dots \times \mathbb{K}^{p \boxed{n.}} \times \mathbb{K}^{p \boxed{n+1.}}$ tartomány (összefüggő nyílt halmaz) és $F \in \mathcal{C}(D, \mathbb{K}^q)$, mely függ az utolsó változójától. Jelölje

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad [F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0] \quad (1)$$

azt a problémát, hogy keresendő az összes olyan $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $x : I \rightarrow \mathbb{K}^p$ n -szer folytonosan differenciálható függvény (azaz $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}^p)$), amire (1) értelmes és teljesül minden $t \in I$ esetén. Ekkor az (1) problémát közönséges, n -edrendű (p dimenziós) vektor-differenciálegyenletnek nevezzük. Ha speciálisan $q = p$ és $\exists$

$$D_1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{p \boxed{1.}} \times \mathbb{K}^{p \boxed{2.}} \times \dots \times \mathbb{K}^{p \boxed{n.}}$$

tartomány valamint $f \in \mathcal{C}(D_1, \mathbb{K}^p)$ úgy, hogy $D = D_1 \times \mathbb{K}^p$ és

$$\begin{aligned} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) - x_{n+1} \\ &((t, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in D), \end{aligned}$$

akkor az (1) differenciálegyenlet az

$$(1') \quad x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

alakra hozható, amit explicit differenciálegyenletnek, a nem ilyen alakú differenciálegyenleteket implicit differenciálegyenletnek nevezzük.

Legyen $\tau \in \mathbb{R}, \xi_i \in \mathbb{K}^p (i = 0, 1, \dots, n-1)$ úgy, hogy ha (1) explicit, akkor $(\tau, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \in D_1$, és képezzük $a(z)$

$$x^{(i)}(\tau) = \xi_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2)$$

egyenleteket. Jelölje (1)-(2) azt a problémát, hogy keresendő az (1) differenciálegyenlet összes olyan $x : I \rightarrow \mathbb{K}^p$ megoldása, amelyre (2) is értelmes (azaz $\tau \in I$) és teljesül. Ekkor az (1)-(2) problémát egy, az (1) differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának (k.é.p.) vagy Cauchy-feladatnak nevezzük.

2.2. Nem kiterjeszthető megoldások

2.2. Definíció. Az (1) differenciálegyenlet vagy az (1)-(2) Cauchy-feladat [k.é.p] egy x megoldását nem kiterjeszthetőnek nevezzük, ha x egyetlen valódi kiterjesztése sem megoldás.

2.3. TÉTEL. Ha x_0 egy megoldása az (1)-(2) Cauchy-feladatnak, akkor létezik $\tilde{x}$ nem kiterjeszthető megoldása (1)-(2)-nek, amelyre $x_0 \subset \tilde{x}$

ÚTMUTATÁS A BIZONYÍTÁSHOZ. Legyen

$$V = \{ v \mid v \text{ megoldása (1)-(2)-nek és } x_0 \subset v \}.$$

Ekkor $(V, \subset)$ nem üres (mert $x_0 \in V$) részben rendezett halmaz. Elegendő belátnunk, hogy V teljesíti a Zorn-lemma feltételeit, mert akkor $\exists \tilde{x}$ maximális eleme V -nek. Legyen $W \subset V$ rendezett részhalmaz (nem üres) és $w = \bigcup W$. Azt állítjuk, hogy $w \in V$.

Ehhez be kell látnunk, hogy w függvény, ennek I_w értelmezési tartománya intervallum, $\tau \in I_w$, w n -szer folytonosan differenciálható, $\forall t \in I_w : (t, w(t), \dots, w^{(n)}(t)) \in D$ és (1) valamint (2) teljesül a w függvényre.

(i) w függvény: Tegyük fel, hogy $t \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{K}^p$ úgy, hogy $(t, x_1) \in w$ és $(t, x_2) \in w$. Ekkor $\exists u_1, u_2 \in W : (t, x_1) \in u_1$ és $(t, x_2) \in u_2$. Mivel W rendezett, $u_1 \subset u_2$ vagy $u_2 \subset u_1$. Az első esetben $(t, x_1) \in u_2$, $(t, x_2) \in u_2$ és u_2 függvény, így $x_1 = x_2$. A másik eset hasonló.

(ii) I_w intervallum és $\tau \in I_w$: $I_w = \bigcup_{u \in W} I_u$, ahol I_u az u megoldás értelmezési tartománya, így I_u intervallum és $\tau \in I_u$. Ha

$$t_1, t_2 \in I_w \implies \exists u_1, u_2 \in W, t_i \in I_{u_i} \quad (i = 1, 2).$$

Ekkor pl.: $t_1 < \tau < t_2$ esetén

$$[t_1, \tau] \subset I_{u_1} \subset I_w \text{ és } [\tau, t_2] \subset I_{u_2} \subset I_w$$

$$\implies \tau \in I_w \text{ és } [t_1, t_2] = [t_1, \tau] \cup [\tau, t_2] \subset I_w \implies I_w \text{ intervallum.}$$

Második eset, ha $\tau < t_1 < t_2$, ekkor $\tau \in I_{u_2} \implies \tau \in I_w$ és $[t_1, t_2] \subset [\tau, t_2] \subset I_{u_2} \subset I_w$ stb.

(iii) w megoldás: Legyen $t_0 \in I_w$ és tegyük fel, hogy $\exists t_1 \in I_w : \tau < t_0 < t_1$. Ekkor $\exists u_1 \in W : t_1 \in I_{u_1}$ így $t_0 \in I_{u_1}^\circ$ és u_1 n -szer folytonosan differenciálható t_0 -ban, $(t_0, u_1(t_0), \dots, u_1^{(n)}(t_0)) \in D$ és (1) teljesül az u_1 függvényre a t_0 pontban. Továbbá $w|_{I_{u_1}} = u_1$, ezért w is n -szer folytonosan differenciálható a t_0 pontban és (1) w -re is teljesül t_0 -ban.

Hasonlóan a (t_0 helyett a τ pontot írva) kapjuk, hogy (2) öröklődik W elemeiről w -re.

Ha t_0 (vagy τ) végpontja I_w -nek, akkor a deriváltak egyoldali deriváltak lesznek.

2.4. Következmény. Az (1) differenciálegyenlet bármely megoldása kiterjeszthető egy nemkiterjeszthető megoldássá.

2.5. Definíció. Az (1)-(2) Cauchy-feladat egy $\tilde{x}$ megoldását teljesnek nevezzük, ha az (1)-(2) bármely x megoldására $x \subset \tilde{x}$.

2.6. TÉTEL. Ha az (1)-(2) Cauchy-feladatnak van megoldása, akkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) Az (1)-(2) Cauchy-feladatnak van teljes megoldása;

(ii) Az (1)-(2) Cauchy-feladatnak minden intervallumon legfeljebb egy megoldása van.

BIZONYÍTÁS. (i) $\implies$ (ii) nyilvánvaló.

(ii) $\implies$ (i): Legyen $U = \{u \mid u \text{ megoldása (1)-(2)-nek}\}$ és $u_0 = \bigcup U$. Azt kell belátnunk, hogy $u_0 \in U$.

u_0 függvény: Legyen $(t, z_1), (t, z_2) \in u_0$.

Ekkor $\exists u_i \in U : u_i(t) = z_i \quad (i = 1, 2)$. Legyen $I = I_{u_1} \cap I_{u_2}$ (ahol I_{u_j} az u_j értelmezési tartománya, $j = 1, 2$). Akkor $t, \tau \in I$ és I intervallum, továbbá $u_j|_I \in U \quad (j = 1, 2)$, így (ii) miatt

$$u_1|_I = u_2|_I, \text{ ezért } z_1 = z_2.$$

$$\left. \begin{array}{l} u_0 \text{ } I_{u_0} \text{ értelmezési tartománya intervallum} \\ \tau \in I_{u_0} \\ u_0\text{-ra (1) és (2) teljesül} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ugyanúgy, mint} \\ \text{az előző tételnél.} \end{array}$$

2.3. Átviteli elv

2.7. TÉTEL. [Átviteli elv]: *Legyen*

$$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{p \boxed{1.}} \times \mathbb{K}^{p \boxed{2.}} \times \dots \times \mathbb{K}^{p \boxed{n.}}$$

összefüggő nyílt halmaz és $f : D \rightarrow \mathbb{K}^p$ folytonos, valamint $\tau \in \mathbb{R}, \xi_i \in \mathbb{K}^p \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$ úgy, hogy

$$(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in D.$$

Tekintsük az

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (3)$$

$$x^{(i)}(\tau) = \xi_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (4)$$

kezdetiérték-problémát.

(a) *Ha $u : I \rightarrow \mathbb{K}^p$ megoldása a (3)–(4) Cauchy-feladatnak és $u_i = u^{(i-1)} \quad (i = 1, \dots, n)$, akkor $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ megoldása az*

$$(1^*) \begin{cases} x'_i(t) = x_{i+1}(t) & (i = 1, \dots, n-1), \\ x'_n(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)); \end{cases}$$

$$(2^*) \quad x_i(\tau) = \xi_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Cauchy-feladatnak.

(b) *Megfordítva, ha $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ megoldása az $(1^*) - (2^*)$ Cauchy-feladatnak, akkor u_1 megoldása a (3)–(4) Cauchy-feladatnak.*

BIZONYÍTÁS. Egyszerű behelyettesítés.